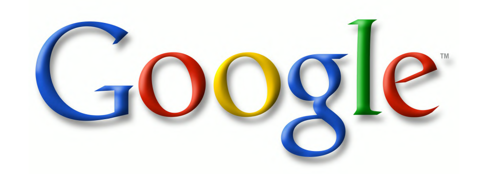




ROBERT MARCOLONGO
O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT NEAPEL

THEORETISCHE MECHANIK

AUTORISIERTE DEUTSCHE BEARBEITUNG
VON

H. E. TIMERDING
O. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE
IN BRAUNSCHWEIG

ERSTER BAND

KINEMATIK UND STATIK

MIT 110 TEXTFIGUREN

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1911

VORREDE ZUR DEUTSCHEN AUSGABE.

Das Lehrbuch, von dem der erste Band hier vorliegt, beruht auf der in den *Manuali Hoepli* als Nr. 352 bis 355 im Jahre 1905 zu Mailand erschienenen, ebenfalls zweibändigen *Meccanica razionale* des Verfassers. Unverändert erhalten geblieben ist der ganze Plan des Werkes, seine Einteilung und Behandlungsweise: die Betonung des prinzipiell Bedeutsamen, überhaupt das Streben, lieber durch eine zweckmäßige Auswahl als durch systematische Vollständigkeit einen Überblick über das große Gebiet der Mechanik zu geben, die Beifügung von Übungsbeispielen zu den einzelnen Kapiteln und die Ergänzung der Darstellung durch historische und bibliographische Nachweise über die Entwicklung der Probleme. Im einzelnen aber sind die Änderungen so stark gewesen, daß es eigentlich ein neues Werk ist, was jetzt in deutscher Sprache erscheint. Der Verfasser selbst hat viele Partien der ursprünglichen Ausgabe neu bearbeitet und große Stücke neu hinzugefügt. So ist die Einleitung über die Vektorenrechnung zum größten Teil und der letzte Abschnitt des zweiten Bandes, die Mechanik der Kontinua, völlig neu. Erheblich verändert sind auch z. B. die Kapitel über Kinematik und Dynamik der starren Körper.

Die deutsche Bearbeitung hat dann vor allen Dingen den Zielpunkt verfolgt, die Darstellung den deutschen Verhältnissen und den deutschen Bedürfnissen nach Möglichkeit anzupassen. Schon um dem Buche die Lesbarkeit eines Originals zu sichern ist eine wörtliche Übersetzung grundsätzlich vermieden worden. An einzelnen Stellen ist aber auch das Beweisverfahren der Vorlage geändert, an anderen sind größere Zusätze gemacht worden, alles das so, daß ein möglichst enger Anschluß an die vorhandene deutsche Literatur erreicht wird. Die stärksten Änderungen liegen in den Übungsbeispielen. Unsere akademischen Lehrbücher pflegen so gehalten zu werden, daß der Leser

sie verstehen kann, ohne ein Blatt Papier daneben zu halten, auf dem er die fehlenden Entwicklungen ergänzt, und ohne andere Literatur zu Hilfe zu nehmen. Für Aufgaben, die ohne Lösung oder nur mit der Andeutung einer solchen gestellt werden, hat der Studierende wenig Sympathie, meistens fehlt ihm auch ein Berater, der sein Resultat prüft oder ihm bei der Arbeit hilft. Aus diesen Gründen erschien eine breitere Ausführung der Beispiele durchaus geboten. Sie bieten so im wesentlichen eine Ergänzung und Erläuterung des größer gedruckten Textes. Dabei war es leider nicht zu umgehen, daß ihre Anzahl verringert werden mußte. Vereinzelt sind aber auch neue Aufgaben, vornehmlich solche, die ein technisches oder physikalisches Interesse haben, hinzugefügt worden. Endlich sind die Figuren, die aus äußeren Gründen in der italienischen Ausgabe sehr spärlich bemessen waren, bedeutend vermehrt worden.

Was die hier versuchte Darstellung der Mechanik innerlich charakterisiert, ist vornehmlich die konsequente Verwendung der Vektorenrechnung, durch die es möglich wurde, einen großen Stoff ohne allzu gedrängte Kürze auf knappem Raume zu bewältigen. Diese neue Behandlungsart ist aber nicht einseitig zur Geltung gebracht worden, im Gegenteil sind, wo es des Verständnisses oder des Anschlusses an die herkömmliche Darstellungsweise wegen angebracht schien, auch die Koordinatenausdrücke angegeben worden. Was an Vektorenrechnung zur Verwendung gelangt, ist nach dem bestimmten, von dem Verfasser und Herrn Burali-Forti ausgearbeiteten System auf ein Minimum beschränkt. Es bietet daher dieses Lehrbuch nebenbei eine gute Gelegenheit, sich in die zwar jetzt allgemein als unumgänglich anerkannten, aber besonders den Technikern noch wenig vertrauten vektoriellen Methoden mit leichter Mühe einzuarbeiten. Was an Formeln und Regeln gebraucht wird, ist ja wenig, nur die Übung in der Anwendung dieser Formeln und Regeln ist es, was Schwierigkeiten macht. Dazu braucht es eben größerer Übung, wie sie wohl ein solcher Lehrgang der ganzen Mechanik gestattet, wie sie aber der kurze Anhang,

der sich in den zumeist sehr knapp gehaltenen Büchern über Vektoranalysis findet, selten zu geben vermag.

Auch Föppl hat in seinen Vorlesungen über technische Mechanik die Vektorenrechnung von ähnlichen Gesichtspunkten aus, wie es hier geschieht, verwendet; leider sind die Bezeichnungen hier und dort völlig verschieden, doch genügt es, einmal die Abweichungen einander gegenüber zu stellen, um ohne Mühe die verschiedenen Symbole gleich zu verstehen. Wir können deshalb auf das Werk von Föppl, dem sich die vorliegende Ausgabe äußerlich eng anschmiegt, für die technische Ausgestaltung und Verwertung der hier vorgetragenen theoretischen Disziplinen um so eher hinweisen, als dort von den theoretischen Grundlagen gerade die Elastizitätstheorie, auf die wir hier nicht näher eingehen konnten, ausführlich entwickelt wird.

Die Verlagshandlung hat der Ausstattung des vorliegenden Buches die gewohnte Sorgfalt angedeihen lassen und, wenn es nicht ohne Erfolg bleiben sollte, so gebührt ihr ein großer Teil des Verdienstes.

Neapel und Braunschweig, November 1910.

R. MARCOLONGO.
H. E. TIMERDING.

INHALTSVERZEICHNIS.

Erster Teil. **Kinematik.**

Erstes Kapitel. **Vektorgeometrie.**

Zweites Kapitel. **Vektoranalysis.**

Drittes Kapitel. **Geschwindigkeit und Beschleunigung.**

Viertes Kapitel. **Endliche Verrückungen eines starren Systems.**

Fünftes Kapitel. **Die momentane Bewegung eines starren Systems.**

Sechstes Kapitel. **Kontinuierliche Bewegung eines ebenen starren Systems.**

Siebentes Kapitel. **Kontinuierliche Bewegung eines räumlichen starren Systems.**

Zweiter Teil. Statik.

Erstes Kapitel. **Zusammensetzung der Kräfte.**

Zweites Kapitel. **Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen.**

Drittes Kapitel. **Gleichgewicht der Seilkurven.**

Berichtigungen.

Seite 25 Zeile 17 v. u. lies „nicht komplanare" statt „komplanare".
„ 35 „ 8 v. u. lies $\times u$ statt u.
„ 37 „ 16 v. o. lies $x \wedge y = - y \wedge x$ statt $x \wedge y = - x \wedge y$.
„ 57 „ 3 v. o. lies „gleichförmig" statt „auf einer Kugel".
„ 57 „ 4 v. o. ist zu streichen „auch".
„ 59 „ 10 v. o. sind zu vertauschen $\frac{\partial f}{\partial z}$ und $\frac{\partial f}{\partial z_1}$.
„ 82 „ 16 v. u. (Anm.) lies „Den" statt „Der".
„ 96 „ 1 v. o. lies ξ_1 statt η_1.
„ 97 „ 8 und 10 v. o. lies $\delta - \alpha$ statt $\alpha - \delta$.
„ 100 „ 8 v. u. (Anm.) lies „worauf diese dann" statt „die dann".
„ 101 „ 2, 7 und 9 v. u. lies $+$ statt $-$.
„ 101 „ 1 und 3 v. u. lies $-$ statt $+$.
„ 102 „ 2 v. o. sind zu vertauschen z_1 und z_3; in den Formeln nach Zeile 3 müssen die Ausdrücke auf der rechten Seite lauten

$$2\frac{\varkappa\lambda - \mu\nu}{\varkappa^2 - \lambda^2 - \mu^2 + \nu^2}, \quad 2(\varkappa\mu + \nu\lambda), \quad 2\frac{\varkappa\nu - \lambda\mu}{\varkappa^2 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2}.$$

„ 108 „ 14 und 15 v. u. lies $\frac{\omega_2}{2}$ statt $\frac{\omega_1}{2}$.
„ 111 „ 16 v. u. lies „auf drei mit p, q, r komplanaren Vektoren" statt „auf den drei Vektoren".
„ 121 „ 5 v. o. lies $\dot{P} = \dot{R} + \Omega \wedge (P - R)$ statt $P = R + \Omega \wedge (P - R)$.
„ 125 „ 21 v. o. lies $\dot{x}(X - x) + \dot{y}(Y - y) + \dot{z}(Z - z) = 0$ statt $x(X - x) + y(Y - y) + \dot{z}(Z - z) = 0$.
„ 159 „ 4 v. u. lies „Mémoires des savants étrangers, St. Pétersbourg" statt „Mémoires des savants étrangers".
„ 160 „ 1 v. u. lies Γ statt Γ'.
„ 161 „ 1 v. o. lies Γ' statt Γ.
„ 165 „ 5 und 7 v. u. lies ωr statt ω.
„ 180 „ 8 v. u. lies $B > D$ statt $B < D$.
„ 192 „ 1 v. u. (Anm.) lies S. 20 statt S. 5.
„ 200 „ 23 v. o. lies 1769, p. 278 statt 1767, p. 285.
„ 231 „ 12 v. o. lies „12. Aufgabe" statt „vorigen Aufgabe".

ERSTER TEIL

KINEMATIK



Erstes Kapitel.

Vektorgeometrie.

1. Vektoren. Viele Größen, die in der Mechanik und überhaupt in der Physik vorkommen, sind direkt zahlmäßig miteinander vergleichbar und erschöpfen ihr Wesen in dieser Vergleichung. Es läßt sich dann immer für die Größe eine Skala aufstellen, und sie wird vollständig festgelegt durch eine bestimmte Stelle in dieser Skala. Deshalb spricht man von Skalaren und bezeichnet als solche z. B. die Masse, die Temperatur, den Arbeitsausdruck u. a. m. Dagegen gibt es auch Größen, denen außer einem bestimmten zahlmäßigen Betrage auch eine bestimmte Richtung zukommt. Diese Größen heißen Vektoren, zu ihnen gehören die Wegstrecken, Geschwindigkeiten, Impulse oder Bewegungsgrößen, Kräfte usw. Da sie für die Mechanik und insbesondere für die Kinematik von grundlegender Bedeutung sind, sollen sie zunächst vom rein mathematischen Standpunkte aus kurz erörtert werden.[1])

1) Wir beabsichtigen hier nicht eine ausführliche Auseinandersetzung der Vektorenrechnung, wir wollen uns vielmehr mit einer kurzen Hervorhebung dessen, was für die Mechanik von Wichtigkeit ist, begnügen. Der Leser, der weiter auf den Gegenstand eingehen will, möge sich an die Spezialwerke halten, unter denen wir die folgenden neueren Lehrbücher anführen:

Wilson, Vector-Analysis founded upon the Lectures of J. W. Gibbs, New York 1902.

Bucherer, Elemente der Vektoranalysis, Leipzig, 2. Auflage 1902.

Gans, Einführung in die Vektoranalysis, Leipzig, 2. Auflage 1909.

Jahnke, Vorlesungen über die Vektorenrechnung, Leipzig 1905.

Valentiner, Vektoranalysis (Sammlung Göschen), Leipzig 1907.

Ignatowsky, Die Vektoranalysis und ihre Anwendungen in der theoretischen Physik, Leipzig, 1. Teil 1909; 2. Teil 1910.

Burali-Forti e Marcolongo, Elementi di Calcolo vettoriale, Bologna 1909; Omografie vettoriali con applicazioni alle derivate rispetto ad un punto e alla Fisica-matematica, Torino 1909.

Ein Vektor ist ein geometrisches Gebilde, das die Merkmale **Größe**, **Richtung** und **Sinn** zeigt und sich durch zwei Punkte festlegen läßt derart, daß der durch zwei Punkte A und B bestimmte (von A nach B laufende) Vektor mit dem durch zwei andere Punkte C und D bestimmten (von C nach D laufenden) Vektor identisch ist, wenn die **Strecken** AB und CD **dieselbe Länge haben, parallel sind und der Sinn von** A **nach** B **mit dem von** C **nach** D **identisch wird**, mit anderen Worten, wenn $ABDC$ die Ecken eines Parallelogramms sind in der Reihenfolge eines Umlaufes um das Innere dieses Parallelogramms genommen.

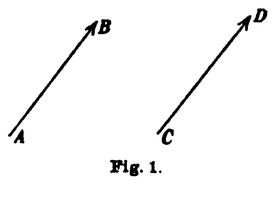


Fig. 1.

Wir wollen für einen Vektor die Bezeichnung $B - A$ gebrauchen (ihn als die Differenz zweier Punkte ansehen), die soeben angegebene Identität schreibt sich dann

$$B - A = D - C.$$

Es folgt daraus

$$B - D = A - C.$$

Wir bezeichnen häufig auch einen Vektor durch einen fetten lateinischen Buchstaben und schreiben so z. B.

$$B - A = \boldsymbol{a}. \tag{1}$$

Wenn B mit A zusammenfällt, erhält man den Vektor **Null**.

Die positive oder verschwindende Zahl, welche die Länge der einen Vektor darstellenden Strecke angibt, heißt der **Modul** des Vektors und wird durch $\operatorname{mod} \boldsymbol{a}$ ausgedrückt. Wenn der Vektor Null ist, ist auch sein Modul Null und umgekehrt.

Die **Summe eines Vektors** $\boldsymbol{a}$ **und eines Punktes** A ist ein Punkt B von der Art, daß

$$B - A = \boldsymbol{a}$$

wird, und wir werden dann schreiben

$$B = A + \boldsymbol{a}.$$

Hieraus ergeben sich sofort die folgenden Identitäten

$$A + (B - A) = B, \quad A + (B - B) = A.$$

Die Summe zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, die wir durch $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ bezeichnen werden, ist ein Vektor von der Art, daß, wie wir auch den Punkt O annehmen mögen, die Gleichung gilt

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \{(O + \mathfrak{a}) + \mathfrak{b}\} - O.$$

Dieser Vektor ist eindeutig bestimmt. Seine Konstruktion ergibt sich sofort wie folgt: Wir müssen an den Punkt O den Vektor $\mathfrak{a}$ als eine Strecke anlegen und an den Endpunkt dieser Strecke weiter den Vektor $\mathfrak{b}$; der Vektor, der nach dem Endpunkte dieser zweiten Strecke von O aus hinläuft, ist dann der Summenvektor $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. Dieser Vektor erscheint so als die dritte Seite eines Dreiecks, von dem die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die beiden ersten Seiten bilden, und wenn wir dieses Dreieck durch ein kongruentes Dreieck zu einem Parallelogramm vervollständigen, können wir auch sagen: Lassen wir alle drei Vektoren von einem beliebig wählbaren Punkte O auslaufen, so erhalten wir den Summenvektor als die Diagonale eines Parallelogramms, von dem die Summanden zwei Seiten bilden.

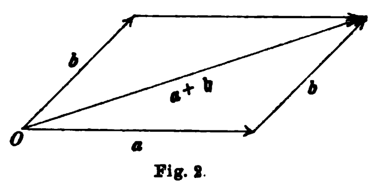


Fig. 2.

Die so definierte Summe befolgt das assoziative und das kommutative Gesetz, d. h. es wird

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}), \quad \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}. \tag{2}$$

Hieraus ergibt sich, daß wir einfach schreiben können
$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$.

Fig. 3.

Man beachte die folgenden Identitäten

$$(B - A) + (C - B) = C - A,$$
$$(B - A) + (C - B) + (A - C) = 0,$$
$$D = A + (B - A) + (C - B) + (D - C),$$

die sich aus den auch für Vektoren gültig gefundenen Regeln der Algebra ergeben.

Das Produkt eines Vektors a mit einer reellen Zahl m ist ein paralleler Vektor, dessen Modul das m-fache von dem Modul des ersten Vektors ist und der mit diesem Vektor gleich oder entgegengesetzt gerichtet ist, jenachdem m das Vorzeichen $+$ oder $-$ hat.

Wir schreiben dieses Produkt ma, und nach der vorstehenden Definition folgt dann sofort:

$$m(a+b)=ma+mb; \quad (m+n)a=ma+na,$$
$$m0=0, \quad 0a=0.$$

Wir setzen noch

$$-a=(-1)a, \quad a-b=a+(-1)b, \quad \frac{a}{m}=\frac{1}{m}a$$

und schließen, daß der ganze algebraische Algorithmus der Operationen $+$ und $-$, sowie das Multiplizieren und Dividieren mit einer reellen Zahl sich ohne weiteres auf die Vektoren übertragen läßt.

Wenn e_1, e_2, e_3 drei von Null verschiedene und nicht komplanare (d. h. nicht derselben Ebene parallele) Vektoren sind, so läßt sich jeder andere Vektor a auf eine einzige Art linear und homogen durch diese drei Vektoren e_1, e_2, e_3 ausdrücken, so daß

$$a=xe_1+ye_2+ze_3 \tag{3}$$

wird, wobei x, y, z drei reelle, eindeutig bestimmte Zahlen bedeuten.

In der Tat, ist zunächst a parallel zu e_1, so beachten wir, daß die beiden Vektoren

$$(\operatorname{mod} e_1)a \quad \text{und} \quad (\operatorname{mod} a)e_1$$

denselben Modul und dieselbe Richtung haben, und finden demnach

$$(\operatorname{mod} e_1)a=\pm(\operatorname{mod} a)e_1,$$

mithin existiert eine einzige reelle Zahl, nämlich $x=\pm\frac{\operatorname{mod} a}{\operatorname{mod} e_1}$, derart, daß

$$a=xe_1$$

wird.

Ist weiter a komplanar mit e_1 und e_2, so nehmen wir

$$a = A - O$$

und ziehen durch O und A zu den Vektoren e_1 und e_2 die Parallelen, die sich in einem Punkte B schneiden. Dann wird

$$a = (B - O) + (A - B)$$

und die Vektoren $B - O$ und $A - B$ sind zu den Vektoren e_1 und e_2 parallel, lassen sich also in der Form ansetzen

$$B - O = xe_1, \quad A - B = ye_2,$$

und es wird

Fig. 4.

$$a = xe_1 + ye_2.$$

Wäre auf eine zweite Art

$$a = x'e_1 + y'e_2,$$

so würde sich durch Subtraktion ergeben

$$0 = (x - x')e_1 + (y - y')e_2,$$

also $x - x' = 0$, $y - y' = 0$, da e_1 und e_2 nicht parallel sind. So sieht man, daß x und y wieder eindeutig bestimmt sind.

Ist der Vektor $a = A - O$ nicht komplanar mit zweien der Vektoren e_1, e_2, e_3, so legen wir durch O die Ebene ε_1 die zu den Vektoren e_1 und e_2 parallel ist und ziehen durch A die Parallele zu e_3, welche die Ebene ε_1 in einem Punkte B schneiden möge; durch B legen wir die Parallele zu e_2, durch O die Parallele zu e_1, diese beiden Parallelen mögen sich in C schneiden, dann wird

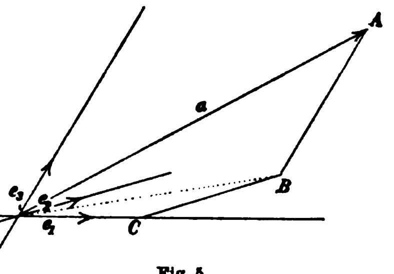


Fig. 5.

$$a = (C - O) + (B - C) + (A - B)$$

und die Glieder der Summe auf der rechten Seite haben die Form

$$C - O = xe_1, \quad B - C = ye_2, \quad A - B = ze_3,$$

also wird

$$a = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

oder

$$A = O + xe_1 + ye_2 + ze_3. \tag{4}$$

Sind e_1, e_2, e_3 Einheitsvektoren, d. h. ihr Modul gleich 1, so werden x, y, z die kartesischen Koordinaten des Punktes A, bezogen auf ein Koordinatensystem, dessen Ursprung O ist und dessen Achsen parallel sind zu den Vektoren e_1, e_2, e_3 derart, daß der Sinn dieser Vektoren die positiven Seiten auf den Koordinatenachsen angibt.

Unter der Projektion a_g eines Vektors a auf eine gerade Linie g verstehen wir einen Vektor, der in diese gerade Linie g fällt und durch die Fußpunkte der aus den Endpunkten von a auf g gefällten Lote begrenzt wird. Hat g einen bestimmten Richtungssinn, wie ihn die Achsen eines Koordinatensystems besitzen, und nennen wir dann φ den Winkel, den diese Richtung mit der Richtung des Vektors a bildet, so wird der Modul des projizierten Vektors

$$\operatorname{mod} a_g = \operatorname{mod} a \cdot \cos \varphi,$$

und die Richtung dieses Vektors ist der Richtung von g gleich oder entgegengesetzt, jenachdem φ spitz oder stumpf ist.

Sind nun x, y, z die Projektionen des Vektors a auf die Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so wird

$$a = x + y + z.$$

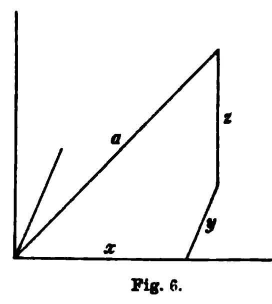


Fig. 6.

Nehmen wir aber in den Koordinatenachsen drei Einheitsvektoren an, welche die Richtung der positiven Achsen haben, und nennen sie der Reihe nach e_1, e_2, e_3, so läßt sich setzen

$$x = xe_1, \quad y = ye_2, \quad z = ze_3$$

und man findet

$$a = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

Geht der Vektor a vom Koordinatenursprung O aus, so sind x, y, z die Koordinaten seines Endpunktes. Allgemein werden

x, y, z als seine Komponenten nach den Koordinatenachsen bezeichnet.

Sind jetzt α, β, γ die Richtungskosinus der mit einem bestimmten Richtungssinn behafteten Geraden g, so wird die Projektion des Vektors $\boldsymbol{a}$ auf g

$$\boldsymbol{a}_g = (\alpha x + \beta y + \gamma z) \cdot (\alpha \boldsymbol{e}_1 + \beta \boldsymbol{e}_2 + \gamma \boldsymbol{e}_3).$$

2. Vektorprodukte. Man unterscheidet zwei Arten von Vektorprodukten, innere und äußere. Das innere oder skalare Produkt zweier Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ ist das Produkt der Moduln beider Vektoren mit dem Kosinus des Winkels, den sie bilden. Wir schreiben dieses Produkt

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \operatorname{mod} \boldsymbol{a} \cdot \operatorname{mod} \boldsymbol{b} \cdot \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \tag{5}$$

und lesen es: $\boldsymbol{a}$ in $\boldsymbol{b}$. Nach dieser Definition läßt sich die Projektion eines Vektors $\boldsymbol{a}$ auf eine orientierte Gerade g auffassen als ein in die Richtung von g fallender Einheitsvektor $\boldsymbol{g}$, den man mit dem inneren Produkt von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{g}$ multipliziert hat.

Das skalare Produkt verschwindet, wenn einer der beiden Vektoren verschwindet oder sie aufeinander senkrecht sind. Es befolgt das kommutative Gesetz, und aus der bekannten Regel für die Projektion eines Streckenzuges auf eine Gerade kann man sofort ableiten, daß für jenes Produkt auch das distributive Gesetz gilt, d. h. es bestehen allgemein die Gleichungen

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \cdots) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \cdots, \tag{7}$$

$$m(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (m\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (m\boldsymbol{b}).$$

Außerdem schreiben wir

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^2, \tag{8}$$

und zwar ist dieser Ausdruck $= (\operatorname{mod} \boldsymbol{a})^2$. Es ergibt sich dann

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 + 2\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \tag{9}$$

genau ebenso wie in der gewöhnlichen Algebra.

Das äußere oder vektorielle Produkt zweier Vektoren a, b ist ein dritter Vektor c, der zu den beiden ersten Vektoren senkrecht und dessen Modul gleich dem Inhalte des durch die Ecken O, $O+a$, $O+a+b$, $O+b$ bestimmten Parallelogramms, d. h. gleich dem Produkte ihrer Moduln mit dem Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels ist. Was den Sinn des Produktvektors betrifft, so setzen wir fest, daß die drei Vektoren a, b, c immer ein Rechtssystem bilden sollen. Das bedeutet: Der Sinn von c ist der, den der Daumen der rechten Hand annehmen kann, wenn man dem Zeige- und Mittelfinger die Richtungen von a und b gibt. Wir schreiben

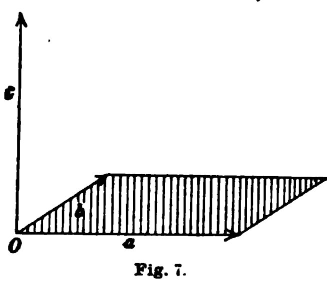


Fig. 7.

$$c = a \wedge b \tag{10}$$

und lesen dies: a gegen b. Außerdem haben wir

$$\operatorname{mod} c = \operatorname{mod} a \cdot \operatorname{mod} b \cdot \sin(a, b), \tag{11}$$

wenn der Winkel zwischen a und b immer positiv gerechnet wird.

Dieses Produkt befolgt nicht das kommutative Gesetz, vielmehr haben wir

$$a \wedge b = -b \wedge a. \tag{12}$$

Das Produkt verschwindet, wenn einer der beiden Vektoren a, b verschwindet oder wenn a zu b parallel ist. Aus $b = ma$ folgt also immer $a \wedge b = 0$. Ferner erkennt man leicht, daß die Formel gilt

$$m(a \wedge b) = (ma) \wedge b = a \wedge (mb).$$

Es besteht das distributive Gesetz, d. h.

$$d \wedge (a+b) = d \wedge a + d \wedge b \tag{13}$$

oder auch

$$(a+b) \wedge d = a \wedge d + b \wedge d. \tag{14}$$

Infolge von (12) genügt es, eine von diesen beiden Gleichungen zu beweisen. Die Gleichung (14) ist zunächst erfüllt, wenn

$\boldsymbol{d}$ auf $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ senkrecht ist, denn in diesem Falle erhält man, wenn wir mod $\boldsymbol{d} = 1$ voraussetzen, was die Allgemeinheit der Betrachtung nicht einschränkt, $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{d}$ aus $\boldsymbol{a}$ durch eine Viertelumdrehung um eine zu $\boldsymbol{d}$ parallele Achse. Durch dieselbe Rotation ergibt sich $\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{d}$ aus $\boldsymbol{b}$ und $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{d}$ aus $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. Also ist der Satz richtig. Er ist auch richtig, wie man sofort sieht, wenn $\boldsymbol{a}$ senkrecht zu $\boldsymbol{d}$ und $\boldsymbol{b}$ parallel zu $\boldsymbol{d}$ ist. Im allgemeinen Falle setzen wir nun

Fig. 8.

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{d} + \boldsymbol{a}', \quad \boldsymbol{b} = y\boldsymbol{d} + \boldsymbol{b}',$$

wobei $\boldsymbol{a}'$ und $\boldsymbol{b}'$ zu $\boldsymbol{d}$ senkrecht seien. Es ergibt sich dann

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{d} &= \{(x+y)\boldsymbol{d} + \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}'\} \wedge \boldsymbol{d} \\ &= \{\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'\} \wedge \boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}' \wedge \boldsymbol{d} + \boldsymbol{b}' \wedge \boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{d} + \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{d},\end{aligned}$$

und damit ist der Satz allgemein bewiesen.

Für die Grundvektoren $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ gelten, da sie aufeinander senkrecht sind und die Länge 1 haben, die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{lll} \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = 1, & \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 = 1, & \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 = 1, \\ \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = 0, & \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = 0, & \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = 0, \\ \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_1 = 0, & \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_2 = 0, & \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_3 = 0, \\ \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1, & \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2, & \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1, & \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_2, & \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_3. \end{array}\right\} \quad (15)$$

Setzen wir nun

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{b} = x'\boldsymbol{e}_1 + y'\boldsymbol{e}_2 + z'\boldsymbol{e}_3,$$

so wird nach dem distributiven Gesetz

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = xx'\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 + \cdots + xy'\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 + \cdots$$

und wegen (15)

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = xx' + yy' + zz'. \quad (16)$$

Insbesondere ist

$$\boldsymbol{a}^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (17)$$

Analog wird

$$a \wedge b = xx'e_1 \wedge e_1 + \cdots + xy'e_1 \wedge e_2 + \cdots$$

und wegen (15)

$$a \wedge b = (yz' - zy')e_1 + (zx' - xz')e_2 + (xy' - yx')e_3$$

oder in Determinantenform geschrieben

$$a \wedge b = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}. \tag{18}$$

3. Beziehungen zwischen skalaren und vektoriellen Produkten. Die zuletzt gefundenen Formeln gestatten, mit Leichtigkeit einige wichtige Identitäten herzuleiten. Wir nehmen einen dritten Vektor

$$c = x''e_1 + y''e_2 + z''e_3$$

hinzu und beweisen zunächst die Identität:

$$(a \wedge b) \wedge c = (c \times a)b - (c \times b)a. \tag{19}$$

Nennen wir den Vektor, der das Resultat der Operationen auf der linken Seite dieser Gleichung ist, $Xe_1 + Ye_2 + Ze_3$, so finden wir z. B.

$$\begin{aligned} X &= (zx' - xz')z'' - (xy' - yx')y'' \\ &= (x''x + y''y + z''z)x' - (x''x' + y''y' + z''z')x \\ &= (c \times a)x' - (c \times b)x. \end{aligned}$$

Nehmen wir die analogen Gleichungen für Y, Z hinzu, so ergibt sich in der Tat

$$\begin{aligned} &Xe_1 + Ye_2 + Ze_3 \\ &\quad = (c \times a)(x'e_1 + y'e_2 + z'e_3) - (c \times b)(xe_1 + ye_2 + ze_3) \\ &\quad = (c \times a)b - (c \times b)a. \end{aligned}$$

Aus der somit bewiesenen Gleichung (19) kann man leicht auch die folgende ableiten:

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \times c)b - (a \times b)c. \tag{20}$$

Die Gleichungen (19) und (20) zeigen deutlich, daß für das vektorielle Produkt dreier Vektoren das assoziative Gesetz nicht gilt.

Wir gehen nun zu dem gemischten Produkt dreier Vektoren über und beweisen für dasselbe die wichtige Identität

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \tag{21}$$

d. h. die Vertauschbarkeit der inneren und äußeren Produktbildung. Dieser Identität ist noch die folgende hinzuzufügen:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}, \tag{22}$$

welche die zyklische Vertauschbarkeit der Faktoren ausdrückt.

Führen wir nämlich in (21) die Komponenten der drei Vektoren ein, so geht diese Gleichung über in die folgende:

$$\begin{aligned} &x(y'z'' - z'y'') + y(z'x'' - x'z'') + z(x'y'' - y'x'') \\ &= (yz' - zy')x'' + (zx' - xz')y'' + (xy' - yx')z'', \end{aligned}$$

die in der Tat identisch erfüllt ist. Die beiden Seiten der letzten Gleichung lassen sich in Determinantenform schreiben

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix},$$

woraus dann auch die Richtigkeit von (22) folgt. Die vorstehende Determinante bedeutet das Volumen des Parallelepipeds, das die drei Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ bestimmen, positiv genommen, wenn sie ein Rechtssystem bilden, und negativ im entgegengesetzten Falle.

Aus (21) folgt, wenn man $\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d}$ statt $\boldsymbol{c}$ nimmt,

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d}) = [(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c}] \times \boldsymbol{d}$$

und nach (19) wird weiter

$$[(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c}] \times \boldsymbol{d} = [(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{a}] \times \boldsymbol{d},$$

somit ergibt sich endlich die Formel

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}). \tag{23}$$

4. Komplanare Vektoren. Wenn drei Vektoren a, b, c in einer Ebene liegen, wird ihr gemischtes Produkt $= 0$. Andererseits läßt sich dann c durch Addition aus zwei Vektoren gewinnen, welche den Vektoren a, b parallel sind, d. h. es läßt sich setzen

$$c = ma + nb,$$

wenn m, n Zahlfaktoren bedeuten. Wir nehmen insbesondere für c einen Vektor $P - O$ in der xy-Ebene, der vom Koordinatenursprung O ausgeht. Dann ist

$$P - O = xe_1 + ye_2$$

oder

$$P - O = \varrho (\cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2),$$

wenn $\varrho = \operatorname{mod}(P - O)$ und φ der Winkel ist, den der Vektor mit der positiven x-Richtung einschließt.

Fig. 9.

Wir verwenden nun i als Symbol für eine Drehung in positivem Sinne um 90^0, die in der xy-Ebene ausgeführt wird. Dann ist

$$e_2 = ie_1, \quad -e_1 = ie_2,$$

also

$$-e_1 = i^2 e_1 \quad \text{oder} \quad i^2 = -1.$$

Weiter wird $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, somit hat der Operator i alle Eigenschaften der imaginären vierten Einheitswurzel $\sqrt{-1}$, und wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet, hat man

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

mithin

$$P - O = \varrho e^{i\varphi} e_1, \tag{24}$$

wofür wir auch schreiben können

$$P = O + \varrho e^{i\varphi} e_1. \tag{25}$$

Wenn φ von 0 bis 2π geht, beschreibt der Punkt P einen Kreis um O mit dem Radius ϱ, als dessen Vektorgleichung sich (25) auffassen läßt.

Liegt allgemein eine Gleichung vor

$$P = O + [f(u) + i\varphi(u)]\, e_1$$

oder

$$P = O + f(u) e_1 + \varphi(u) e_2,$$

in der f und φ irgendwelche Funktionen des veränderlichen Parameters u bedeuten, so stellt diese Gleichung eine Kurve in der xy-Ebene dar. Z. B. ist

$$P = O + a \cos u e_1 + b \sin u e_2 \tag{26}$$

die Gleichung einer Ellipse, deren Halbachsen a, b in die x- und y-Achse fallen, und

$$P = O + a u e_1 + b u^2 e_2 \tag{27}$$

die Gleichung einer Parabel, deren Achse zur y-Achse parallel und deren Parameter $= a^2 : 2b$ ist.

5. Vektorsysteme. In der Mechanik kommt es häufig vor, daß ein Vektor an einen bestimmten Punkt geknüpft oder gebunden ist, wie z. B. die Geschwindigkeit oder die Kraft sich auf einen bestimmten materiellen Punkt bezieht. Wir sprechen dann von einem gebundenen Vektor. Eine (diskrete oder kontinuierliche) Gesamtheit von solchen Vektoren bildet ein Vektorsystem.

Es sei $P - A = p$ ein Vektor, der an einen Punkt A gebunden ist und O irgend ein anderer Punkt. Dann definieren wir einen Vektor $M - O = m$ durch die Gleichung

$$M - O = (A - O) \wedge p \tag{28}$$

und nennen m das Vektormoment des gebundenen Vektors p für den Punkt O. Dieses Vektormoment ändert sich nicht, wenn der Angriffspunkt von p sich auf der Geraden AP verschiebt, und es verschwindet nur dann, wenn der Bezugspunkt O auf der Linie des Vektors liegt.

Fig. 10.

Wir betrachten nun ein Vektorsystem, dessen Vektoren $p_1, p_2, \ldots$ in den Punkten $A_1, A_2, \ldots$ angreifen und nennen O wieder einen beliebigen Bezugspunkt. Dann setzen wir

$$\left.\begin{aligned} p &= p_1 + p_2 + \cdots \\ m &= (A_1 - O) \wedge p_1 + (A_2 - O) \wedge p_2 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

und bezeichnen p als den resultierenden Vektor des Vektorsystems, m als das resultierende Moment des Systems für den Punkt O. p und m zusammen sollen die Vektorkoordinaten des Systems, auf das Zentrum O bezogen, heißen.

Wählen wir irgendeinen anderen Punkt O' als Zentrum und nennen p', m' die zugehörigen Vektorkoordinaten, so ergibt sich zunächst

$$p = p'. \tag{30}$$

Ferner folgt aus

$$A_\varrho - O = A_\varrho - O' + O' - O$$

die Gleichung

$$(A_\varrho - O) \wedge p_\varrho = (A_\varrho - O') \wedge p_\varrho + (O' - O) p_\varrho,$$

nehmen wir hierin $\varrho = 1, 2, \ldots$ und addieren die entstehenden Gleichungen, so finden wir nach (29):

$$m = m' + (O' - O) \wedge p. \tag{31}$$

Fig. 11.

Gemäß dieser Gleichung verändert sich also das resultierende Moment, wenn das Zentrum verändert wird, während hierbei der resultierende Vektor ungeändert bleibt. Es wird $m = m'$ nur dann, wenn $O' - O$ zu p parallel ist, also dann, wenn das Zentrum in der Richtung des resultierenden Vektors verschoben wird.

Aus (30) und (31) folgt, da $(O' - O) \wedge p \times p = 0$ ist, sofort

$$p \times m = p' \times m',$$

d. h. das skalare Produkt des resultierenden Vektors und des resultierenden Momentes ist konstant. Wir wollen dieses konstante Produkt das Eigenmoment des Vektorsystems nennen und mit V bezeichnen, wir setzen also

$$V = p \times m. \tag{32}$$

Da auch p konstant ist, können wir sagen: Die Projektion des resultierenden Momentes auf den resultierenden Vektor ist konstant. Diese Projektion ist nämlich $= V : \operatorname{mod} p$.

Es sei nun zunächst

$$p \neq 0.$$

Wenn dann das Eigenmoment verschwindet, muß entweder $m = 0$ oder p senkrecht zu m sein. Im letzten Falle läßt sich aber O' derart bestimmen, daß $m' = 0$ wird. Es genügt nach (31) zu diesem Zwecke, den Punkt O' so zu wählen, daß

$$m = (O' - O) \wedge p$$

wird. Durch diese Gleichung wird aber eine gerade Linie p festgelegt, auf der O' liegen muß. Daraus folgt: **Wenn das Eigenmoment verschwindet, so verschwindet entweder der resultierende Vektor oder das Vektorsystem läßt sich auf einen einzigen Vektor, nämlich einen in die Linie p gelegten Vektor p, reduzieren,** derart, daß das Moment $(O' - O) \wedge p$ dieses Vektors für alle Punkte des Raumes dasselbe wird wie das Moment m des Systems.

Setzt man in (32) die Werte (29) ein, so ergibt sich

$$V = \sum_\varrho \sum_\sigma p_\varrho \times (A_\sigma - O) \wedge p_\sigma,$$

oder, da

$$p_\varrho \times (A_\sigma - O) \wedge p_\sigma + p_\sigma \times (A_\varrho - O) \wedge p_\varrho = (A_\varrho - A_\sigma) \times p_\varrho \wedge p_\sigma$$

ist, finden wir weiter

$$V = \sum_{\varrho, \sigma} (A_\varrho - A_\sigma) \times p_\varrho \wedge p_\sigma, \tag{33}$$

wobei $\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots$ und jede Wertekombination ϱ, σ nur einmal vorkommt. Der Ausdruck unter der Summe gibt das Volumen des Parallelepipeds an, von dem $A_\varrho - A_\sigma$, p_ϱ, p_σ drei Kanten bilden, mit der bereits angegebenen Vorzeichenbestimmung. Dieses Volumen kann man aber auch durch das sechsfache Volumen des Tetraeders ersetzen, von dem die beiden gebundenen Vektoren p_ϱ und p_σ zwei Gegenkanten bilden, mit der folgenden Vorzeichenregel: Man lege eine Ebene α_ϱ durch A_ϱ und p_σ und lasse A_ϱ den Vektor p_ϱ durchlaufen. Wenn dann ein Beobachter, der in der Richtung von p_σ mit den Füßen in A_σ steht, die Bewegung der Ebene α_ϱ im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers erfolgen sieht, so ist das Vor-

zeichen + und im entgegengesetzten Sinne —. So wird das Eigenmoment eines Vektorsystems gleich der algebraischen Summe der sechsfachen Volumina aller der Tetraeder, von denen je zwei Vektoren des Systems zwei Gegenkanten bilden, jedes Volumen mit dem gehörigen Vorzeichen genommen.

Ein Vektorsystem, dessen resultierender Vektor verschwindet, heißt eine Koppel. Für $p = 0$ liefert aber (31)

$$m = m',$$

das resultierende Moment bleibt also bei der Verlegung des Zentrums ungeändert, es ist eine Konstante, die als das Koppelmoment bezeichnet wird.

Das einfachste Beispiel einer Koppel wird durch zwei gleiche Vektoren von entgegengesetzten Richtungen, die in zwei verschiedenen Punkten A_1, A_2 angreifen, geliefert. Dann folgt aus

$$m = (A_1 - O) \wedge p_1 + (A_2 - O) \wedge p_2,$$

da $p_1 = -p_2$,

$$m = (A_2 - A_1) \wedge p_2, \qquad (34)$$

Fig. 12.

also liegen p_2 und p_1 in einer Ebene, die zu dem Vektor m normal ist. Ferner wird der Inhalt des Parallelogramms, von dem die beiden Vektoren zwei Gegenseiten bilden, gleich dem Modul von m und sie bestimmen an diesem Parallelogramm einen Umlaufssinn, der um die Richtung von m positiv (links) herumführt. Weiter aber sind die beiden Vektoren der Koppel durch das Moment nicht bestimmt und können noch auf unendlich viel verschiedene Arten angenommen werden.

6. Zentralachse eines Vektorsystems. Zwei Vektorsysteme, die für ein Zentrum O dieselben Vektorkoordinaten haben, haben nach (31) dieselben Vektorkoordinaten auch für irgendein anderes Zentrum O'. Zwei solche Systeme heißen äquivalent.

Ein System, das die Vektoren von zwei oder mehr Systemen

vereinigt enthält, heißt das aus diesen **resultierende System** oder kurz ihre **Resultante**, seine Vektorkoordinaten sind die **Summen** oder **Resultanten** von den Vektorkoordinaten der Einzelsysteme. Es ergibt sich sofort: **Die Resultante mehrerer Koppeln ist eine Koppel, deren Moment die Summe der Momente aller der einzelnen Koppeln ist**

Wenn das vorgelegte System nicht eine Koppel und nicht einem Einzelvektor äquivalent ist und man aus dem resultierenden Vektor des Systems, im Zentrum O angebracht, und einer Koppel, deren Moment gleich dem resultierenden Moment für das Zentrum ist, ein neues System zusammensetzt, so hat dies letztere offenbar dieselben Vektorkoordinaten wie das vorgelegte System. Es ergibt sich also: **Ein allgemeines Vektorsystem ist auf unendlich viele Arten einem aus einem Einzelvektor und einer Koppel zusammengesetzten System äquivalent.**

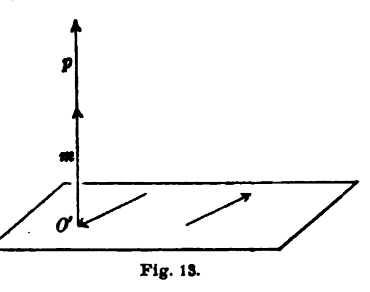


Fig. 13.

Wir können nun beweisen, daß eine einzige Gerade von der Art existiert, daß für ein auf ihr angenommenes Zentrum O' der resultierende Vektor dem resultierenden Momente parallel wird. In der Tat folgt aus (31) mit Hilfe von (19)

$$m \wedge p = m' \wedge p + \{(O' - O) \wedge p\} \wedge p$$
$$= m' \wedge p + \{p \times (O' - O)\} p - p^2 (O' - O).$$

Machen wir nun

$$O' - O = -\frac{m \wedge p}{p^2}, \tag{35}$$

so wird, da zufolge dieser Gleichung der Vektor $O' - O$ zu dem Vektor p senkrecht ist,

$$p \times (O' - O) = 0$$

und damit

$$m' \wedge p = 0,$$

d. h. m' zu p parallel. Der durch (35) bestimmte Punkt O' hat demnach die verlangte Eigenschaft. Wir können dann setzen

$m' = \alpha p$, wenn α einen Zahlfaktor bedeutet. Hat nun ein weiterer Punkt O'' dieselbe Eigenschaft, wird also für ihn ebenso das Moment $m'' = \beta p$, so folgt aus

$$m'' = m' + (O' - O'') \wedge p$$

sofort

$$(\beta - \alpha)p = (O' - O'') \wedge p.$$

Diese Gleichung ist aber nur dadurch zu erfüllen, daß ihre beiden Seiten verschwinden, daß also $\beta = \alpha$ und

$$(O' - O'') \wedge p = 0$$

wird. Der Punkt O'' liegt demnach auf der durch O' parallel zu p gezogenen Geraden und kann beliebig auf dieser angenommen werden.

7. Einführung kartesischer Koordinaten. Wir legen als Koordinatensystem ein Rechtssystem $O(e_1, e_2, e_3)$ zugrunde, x, y, z seien die Koordinaten eines Punktes A, α, β, γ die Richtungskosinus und r der Modul eines in A angreifenden Vektors p. Wir haben dann

$$A - O = xe_1 + ye_2 + ze_3,$$
$$p = r(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3).$$

Daraus folgt nach (28)

$$m = r[(\gamma y - \beta z)e_1 + (\alpha z - \gamma x)e_2 + (\beta x - \alpha y)e_3].$$

Wir setzen

$$\lambda = \gamma y - \beta z, \quad \mu = \alpha z - \gamma x, \quad \nu = \beta x - \alpha y, \tag{36}$$

woraus

$$\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0 \tag{37}$$

folgt. Die Komponenten des Vektormomentes m sind dann $r\lambda$, $r\mu$, $r\nu$. Die sechs Zahlwerte

$$r\alpha, \quad r\beta, \quad r\gamma, \quad r\lambda, \quad r\mu, \quad r\nu,$$

bei denen noch die Relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \tag{38}$$

zu beachten ist, legen den Vektor p und die Gerade p, die

seinen Träger bildet, fest und heißen die homogenen Koordinaten des gebundenen Vektors. Die Größen α, β, γ, λ, μ, ν selbst, zwischen denen die Relationen (37) und (38) bestehen, legen einen Einheitsvektor in der Geraden p fest, sie heißen die homogenen Koordinaten der Geraden.

Nehmen wir nun ein System von Vektoren $p_\varrho (\varrho = 1, 2, \ldots)$ an, deren Koordinaten $r_\varrho \alpha_\varrho, r_\varrho \beta_\varrho, \ldots, r_\varrho \nu_\varrho$ seien, und nennen p_x, p_y, p_z die Komponenten des resultierenden Vektors, m_x, m_y, m_z die des resultierenden Momentes, so ergibt sich sofort

$$p_x = \sum r_\varrho \alpha_\varrho, \quad p_y = \sum r_\varrho \beta_\varrho, \quad p_z = \sum r_\varrho \gamma_\varrho, \tag{39}$$

$$m_x = \sum r_\varrho \lambda_\varrho, \quad m_y = \sum r_\varrho \mu_\varrho, \quad m_z = \sum r_\varrho \nu_\varrho. \tag{40}$$

Diese Komponenten sind also die Summen der Koordinaten aller einzelnen Vektoren des Systems.

Aus der Definition (32) von V folgt

$$V = p_x m_x + p_y m_y + p_z m_z, \tag{41}$$

und setzen wir hierin die Werte (39) und (40) ein, so ergibt sich $V = \sum V_{\varrho\sigma}$ für

$$V_{\varrho\sigma} = r_\varrho r_\sigma (\alpha_\varrho \lambda_\sigma + \beta_\varrho \mu_\sigma + \gamma_\varrho \nu_\sigma + \lambda_\varrho \alpha_\sigma + \mu_\varrho \beta_\sigma + \nu_\varrho \gamma_\sigma).$$

Dieser Ausdruck liefert das sechsfache Volumen des Tetraeders, von dem die gebundenen Vektoren p_ϱ und p_σ zwei Gegenkanten bilden, ausgedrückt durch die homogenen Koordinaten dieser Vektoren.

Nehmen wir statt des Vektors p_ϱ den ursprünglich betrachteten Vektor p, für p_σ den Grundvektor e_1, also

$$\alpha_2 = 1, \quad \beta_2, \gamma_2, \lambda_2, \mu_2, \nu_2 = 0,$$

so ergibt sich an Stelle von $V_{\varrho\sigma}$

$$V = r\lambda.$$

Die drei letzten Koordinaten eines Vektors p bedeuten also die sechsfachen Volumina der Tetraeder, von welchen der Vektor p und je einer der drei Grundvektoren e_1, e_2, e_3 zwei Gegenkanten bilden.

Historische Bemerkungen. Die Scheidung von Skalaren und Vektoren stammt von W. R. Hamilton und ist die Grundlage seines *Quaternionenkalküls*, dessen Hauptzüge er am 13. November 1843 der irischen Akademie in Dublin mitteilte [siehe Proceedings of the R. Irish Academy vol. 2 (1844), Philosophical Magazine (3) vol. 25 (1844), p. 10] und in seinen *Lectures on Quaternions*, 1853, ausführlich darstellte. Schon lange vor ihm war die Bezeichnung gerichteter Größen in der Ebene durch Wessel, Om directionens analytiske Betegning, Nye Samling af det kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, vol. 5, 1799 (Neudruck in französischer Sprache 1897) und Argand, Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires, 1806, begründet und durch Gauß populär gemacht worden. Bei dem Versuch einer Ausdehnung auf den Raum hatten aber beide, Wessel und Argand, versagt. Dagegen veröffentlichte Graßmann fast gleichzeitig mit Hamilton in seiner *Linealen Ausdehnungslehre* 1844 (Werke, Bd. I_1) eine Theorie, in welcher der Begriff des Vektors als „Strecke" ererscheint, die aber noch allgemeiner ist als die Hamiltonsche Theorie, indem sie sich von vornherein auf einen Raum von beliebig vielen Dimensionen bezieht. In der Beschränkung auf den Raum der Anschauung stellte Graßmann seine Untersuchungen dar in der *Geometrischen Analyse* 1847 (ebenfalls abgedruckt in den Werken Bd. I_1 und gab eine neue Ausarbeitung der allgemeinen Theorie in der zweiten *Ausdehnungslehre* 1862 (Werke Bd. I_2; vgl. dazu einige seiner Abhandlungen, die in seinen Werken, Bd. II_1 stehen). Die Scheidung von äußerem und innerem Produkte rührt von Graßmann her; bei Hamilton vereinigen sich beide zu dem Quaternionenprodukt. Zu beachten ist aber, daß bei Graßmann das äußere Produkt nicht ohne weiteres mit dem Vektorprodukt zusammenfällt, vielmehr eine besondere Größenart darstellt, es wird unmittelbar durch das Parallelogramm gegeben, das die beiden in dem Produkt vereinigten Vektoren festlegen, und bedeutet eine Fläche von bestimmtem Inhalt und Umlaufssinn in einer Ebene von bestimmter Stellung, so daß es mit der oben eingeführten Koppel im wesentlichen übereinstimmt. Das Vektorprodukt ist von dieser Größe nach der Graßmannschen Terminologie die *Ergänzung*. Die Theorie der gebundenen Vektoren ist auf Graßmanns *Linienteile* oder *Liniengrößen* begründet, während sie Hamilton durchaus fern lag; in ihrer statischen Ausdeutung ist sie aber schon durch die Werke von Poinsot und Moebius ausgebildet worden. Die Theorie der Vektormomente hat Cauchy entwickelt, Exercices de mathématiques vol. 1 (1826), Œuvres (2) tome 6, p. 89. Dagegen ist die im folgenden Kapitel dargestellte Vektoranalysis wesentlich auf Hamilton zurückzuführen.

Übungsbeispiele.

1. Aufgabe. *Von dem beweglichen Parallelogramm $OQPS$ drehen sich die beiden Seiten OQ und OS um O mit den konstanten Winkelgeschwindigkeiten ω und θ. Welches ist die Vektorgleichung der dann von der Ecke P beschriebenen Kurve?*

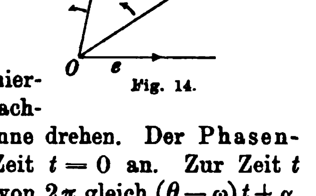


Fig. 14.

Auflösung. Es sei p die Länge von OQ, q die Länge von OS und zur Zeit $t=0$ sei pe der Vektor, der die Seite OQ der Länge und Lage nach angibt. Dann wird zur Zeit t

$$P = O + \{pe^{i\omega t} + qe^{i(\theta t+\alpha)}\}\, e.$$

Die Winkelgeschwindigkeiten ω, θ sind hierbei positiv oder negativ genommen, je nachdem sie in positivem oder negativem Sinne drehen. Der Phasenwinkel α gibt den Winkel QOS zur Zeit $t=0$ an. Zur Zeit t ist derselbe Winkel bis auf ein Vielfaches von 2π gleich $(\theta-\omega)t+\alpha$. Setzen wir also

$$t_0 = -\frac{\alpha}{\theta-\omega}, \quad \tau = \frac{\pi}{\theta-\omega},$$

so wird der in Rede stehende Winkel gleich Null für die Zeiten $t = t_0 + 2n\tau$, und ein gestreckter Winkel für $t = t_0 + (2n+1)\tau$, wenn n eine beliebige ganze Zahl ist. Daraus folgt, daß die betrachtete Kurve nicht spezialisiert wird, wenn man in ihrer Vektorgleichung nach Belieben $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$ annimmt.

2. Aufgabe. *Wenn ein beweglicher Kreis auf einem festen Kreise rollt, so sind drei Fälle zu unterscheiden: 1. die beiden Kreise schließen einander aus, 2. der rollende Kreis wird von dem festen umschlossen, 3. der rollende Kreis umschließt den festen Kreis. Die Kurven, die in den drei Fällen von einem mit dem rollenden Kreise fest verbundenen Punkte beschrieben werden, werden der Reihe nach als Epi-, Hypo- und Perizykloiden bezeichnet. Man soll ihre Identität mit den in der vorigen Aufgabe behandelten Kurven nachweisen.*

Auflösung. Nennt man O das Zentrum des festen Kreises, P den die Kurve beschreibenden Punkt, λr seinen Abstand vom Zentrum M des rollenden Kreises, ferner R den Radius des festen Kreises, r den des rollenden Kreises, und rechnet r positiv, wenn die beiden Kreise sich ausschließen, negativ, wenn sie sich umschließen, so erhält man für alle drei Kurvenarten die gemeinsame Gleichung

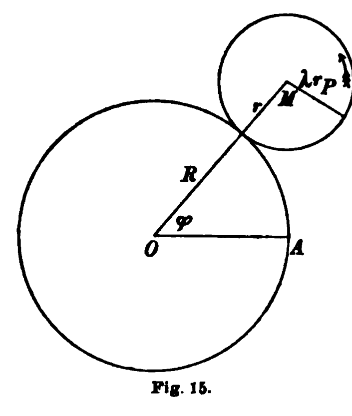


Fig. 15.

$$P = O + \left\{(R+r)e^{i\varphi} + \lambda r e^{i\frac{R+r}{r}\varphi}\right\} e,$$

wenn e einen festen Einheitsvektor bezeichnet. Die drei Kurvenarten scheiden sich dann wie folgt: 1. $r > 0$ Epizykloide, 2. $r < 0, R + r > 0$ Hypozykloide, 3. $r < 0, R + r < 0$ Perizykloide.

Um die gefundene Gleichung mit der früheren zusammenfallen zu lassen, mache man $m = \pm e$, je nachdem $R + r \gtrless 0$. Man nehme ferner je nachdem $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$. Dann kann man (da $e^{i\pi} = -1$) für p, q die absoluten Beträge von $R + r$ und λr nehmen, und setzt man noch $\omega t = \varphi$,

$$\theta t = \psi = \frac{R+r}{r}\varphi,$$

so ist die völlige Übereinstimmung hergestellt.

3. Aufgabe. *Man soll nachweisen, daß jede Epizykloide auch eine Perizykloide ist und jede Hypozykloide auf doppelte Weise gewonnen werden kann.*

Auflösung. Setzen wir in der Gleichung

$$P = O + \{pe^{i\varphi} + qe^{i\psi}\} e,$$

in der φ und ψ gleiche Vorzeichen haben, einmal $\psi = \frac{R+r}{r}\varphi$, $p = R + r$, $q = \lambda r$, das andere Mal $\varphi = \frac{R'+r'}{r'}\psi$, $-q = R' + r'$, $-p = \lambda' r'$, so findet man das einemal die Gleichung einer Epizykloide, das anderemal die Gleichung einer Perizykloide. Dabei wird

$$R' = \lambda R, \quad r' = -\lambda(R + r), \quad \lambda' = \frac{1}{\lambda}.$$

Setzen wir ferner in der Gleichung

$$P = O + \{pe^{i\varphi} + qe^{i\psi}\} e,$$

in der jetzt φ, ψ entgegengesetzte Vorzeichen haben, einmal

$$\psi = \frac{R+r}{r}\varphi, \quad p = R + r, \quad q = -\lambda r,$$

so daß $r < 0$, $R + r > 0$, das andere Mal

$$\psi = \frac{r'}{R'+r'}\varphi, \quad p = -\lambda' r', \quad q = R' + r',$$

woraus $r' < 0$, $R' + r' > 0$, so ergeben sich dieselben Relationen wie vorhin und beidemal erhalten wir eine Hypozykloide. Vgl. Ebner, *Leitfaden der technisch wichtigen Kurven*, Leipzig 1906.

4. Aufgabe. *Es seien* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *drei beliebige nicht komplanare Vektoren, und wir setzen*

$$\mathbf{a}' = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}, \quad \mathbf{b}' = \mathbf{c} \wedge \mathbf{a}, \quad \mathbf{c}' = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b},$$

ferner $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \Delta$, *dann ist zu beweisen, daß*

$$\mathbf{b}' \wedge \mathbf{c}' = \Delta \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{c}' \wedge \mathbf{a}' = \Delta \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{a}' \wedge \mathbf{b}' = \Delta \cdot \mathbf{c}$$

und $\mathbf{a}' \wedge \mathbf{b}' \times \mathbf{c}' = \Delta^2$ *wird.*

Auflösung. Man findet nach (19) z. B.

$$\mathbf{c}' \wedge \mathbf{a}' = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{a}' = (\mathbf{a}' \times \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{a}' \times \mathbf{b})\mathbf{a}.$$

Es ist aber

$$\mathbf{a}' \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \Delta,$$
$$\mathbf{a}' \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{b} \times \mathbf{c} = 0,$$

also wird $\mathbf{c}' \wedge \mathbf{a}' = \Delta \cdot \mathbf{b}$ usw. Dann aber wird weiter

$$\mathbf{a}' \wedge \mathbf{b}' \times \mathbf{c}' = \Delta(\mathbf{c} \times \mathbf{c}') = \Delta(\mathbf{c} \times \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \Delta^2.$$

5. Aufgabe. *Es seien* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *drei beliebige komplanare Vektoren,* α, β, γ *irgend drei Zahlen. Man soll einen vierten Vektor* $\mathbf{k}$ *so finden, daß*

$$\alpha = \mathbf{a} \times \mathbf{k}, \quad \beta = \mathbf{b} \times \mathbf{k}, \quad \gamma = \mathbf{c} \times \mathbf{k}$$

wird.

Auflösung. Die drei Gleichungen ergeben eine einzige Auflösung; denn aus

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{k} - \mathbf{k}') = 0, \qquad \mathbf{b} \times (\mathbf{k} - \mathbf{k}') = 0, \qquad \mathbf{c} \times (\mathbf{k} - \mathbf{k}') = 0$$

folgt

$$\mathbf{k} - \mathbf{k}' = 0.$$

Die Lösung lautet

$$\mathbf{k} = \frac{\alpha \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} + \beta \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} + \gamma \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \times \mathbf{c}}.$$

In der Tat ist

$$\beta \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0, \quad \gamma \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \times \mathbf{a} = 0,$$

und damit wird für den angegebenen Wert von $\mathbf{k}$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{k} = \alpha,$$

und ebenso $\mathbf{b} \times \mathbf{k} = \beta$, $\mathbf{c} \times \mathbf{k} = \gamma$.

6. Aufgabe. *Zu zeigen, daß das Quadrat der Entfernung einer Geraden vom Ursprung O durch den Ausdruck $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$ gegeben wird.*

Auflösung. Der in Rede stehende Ausdruck ist gleich

$$\begin{aligned}(\gamma y - \beta z)^2 &+ (\alpha z - \gamma x)^2 + (\beta x - \alpha y)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 \\ &= r^2 - r^2 \cos \varphi^2 = r^2 \sin \varphi^2,\end{aligned}$$

wenn r die Entfernung OA eines Punktes A der Geraden vom Ursprung O und φ den Winkel zwischen OA und der Geraden bedeutet. Hieraus folgt in der Tat die Behauptung.

7. Aufgabe. *Die Formel für das Volumen des durch zwei gebundene Vektoren als zwei Gegenkanten bestimmten Tetraeders direkt abzuleiten.*

Auflösung. Die Koordinaten der Anfangspunkte beider Vektoren seien x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2. Die Koordinaten ihrer Endpunkte drücken sich dann aus in der Form

$$x_1 + r_1\alpha_1,\; y_1 + r_1\beta_1,\; z_1 + r_1\gamma_1 \text{ und } x_2 + r_2\alpha_2,\; y_2 + r_2\beta_2,\; z_2 + r_2\gamma_2$$

und damit ergibt sich für das gesuchte Volumen der Ausdruck

$$\tfrac{1}{6} V = \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_1 + r_1\alpha_1 & y_1 + r_1\beta_1 & z_1 + r_1\gamma_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_2 + r_2\alpha_2 & y_2 + r_2\beta_2 & z_2 + r_2\gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Entwickeln wir diese Determinante und führen ein

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \gamma_1 y_1 - \beta_1 z_1,\; \mu_1 = \alpha_1 z_1 - \gamma_1 x_1,\; \nu_1 = \beta_1 x_1 - \alpha_1 y_1, \\ \lambda_2 &= \gamma_2 y_2 - \beta_2 z_2,\; \mu_2 = \alpha_2 z_2 - \gamma_2 x_2,\; \nu_2 = \beta_2 x_2 - \alpha_2 y_2,\end{aligned}$$

so finden wir

$$V = r_1 r_2(\alpha_1\lambda_2 + \beta_1\mu_2 + \gamma_1\nu_2 + \lambda_1\alpha_2 + \mu_1\beta_2 + \nu_1\gamma_2).$$

8. Aufgabe. *Die Geraden, deren Koordinaten einer homogenen Gleichung ersten Grades genügen, bilden, wie man sagt, einen linearen Strahlenkomplex. Welche Fläche erfüllen die Komplexstrahlen, die durch einen gegebenen Punkt gehen?*

Auflösung. Setzen wir in die Gleichung des Komplexes

$$m_x\alpha + m_y\beta + m_z\gamma + p_x\lambda + p_y\mu + p_z\nu = 0$$

die Werte (36) von λ, μ, ν ein, so ergibt sich eine Gleichung

$$m_x'\alpha + m_y'\beta + m_z'\gamma = 0,$$

die zeigt, daß die durch den Punkt (xyz) gehenden Komplexstrahlen zu dem Vektor

$$m' = m_x' e_1 + m_y' e_2 + m_z' e_3$$

senkrecht sind, also eine Ebene erfüllen. Dabei wird

$$m_x' = m_x + p_y z - p_z y,$$
$$m_y' = m_y + p_z x - p_x z,$$
$$m_z' = m_z + p_x y - p_y x.$$

Umgekehrt gehen auch immer, wie leicht zu sehen ist, die Komplexstrahlen, die einer Ebene angehören, durch einen Punkt dieser Ebene. Vgl. Plücker, *Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement,* Leipzig 1868—69.

9. Aufgabe. *Die Gleichungen der Zentralachse eines gegebenen allgemeinen Vektorsystems zu finden.*

Auflösung. Rechnet man nach (29) und (31) das Moment m' des Vektorsystems für einen Punkt O' mit den Koordinaten x, y, z aus, indem man die Werte (39) und (40) einführt, so findet man genau den in der vorigen Aufgabe benutzten Vektor m'. Setzt man nun voraus $m' = \varkappa p$ oder

$$m_x' e_1 + m_y' e_2 + m_z' e_3 = \varkappa (p_x e_1 + p_y e_2 + p_z e_3),$$

wobei $\varkappa$ einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet, so findet man sofort

$$\frac{m_x + p_y z - p_z y}{p_x} = \frac{m_y + p_z x - p_x z}{p_y} = \frac{m_z + p_x y - p_y x}{p_z} = \varkappa$$

als die Darstellung der Zentralachse.

10. Aufgabe. *Zu zeigen, daß sich ein allgemeines Vektorsystem durch ein äquivalentes Vektorsystem, das aus nur zwei Vektoren besteht, ersetzen läßt.*

Auflösung. Es handelt sich hier darum, die sechs Gleichungen

$$r_1 \alpha_1 + r_2 \alpha_2 = p_x, \ldots, r_1 \nu_1 + r_2 \nu_2 = m_z$$

unter der Voraussetzung

$$\alpha_1 \lambda_1 + \beta_1 \mu_1 + \gamma_1 \nu_1 = 0, \quad \alpha_2 \lambda_2 + \beta_2 \mu_2 + \gamma_2 \nu_2 = 0$$

aufzulösen. Man leitet aus ihnen ab (vgl. (41))

$$V = r_2 M_2$$

für

$$M_2 = p_x \lambda_2 + \cdots + m_z \gamma_2.$$

Sind also die Koordinaten der einen Geraden $(\alpha_2, \ldots \nu_2)$ gegeben, so findet man zunächst $r_2 = V : M_2$ und dann weiter

$$r_1 \alpha_1 = p_x - r_2 \alpha_2, \ldots, r_1 \nu_1 = m_z - r_2 \nu_2.$$

Von einem der beiden Vektoren kann also der Träger beliebig angenommen werden (nur darf diese Gerade nicht dem linearen Komplex

$$p_x\lambda + \cdots + m_z\gamma = 0$$

angehören), dann sind von den beiden Vektoren die Koordinaten eindeutig festgelegt.

11. Aufgabe. *Das Moment eines Vektorsystems für eine gegebene Achse zu finden.*

Auflösung. Moment eines Vektors für eine Achse heißt das mit dem gehörigen Vorzeichen genommene sechsfache Volumen des Tetraeders, von dem der Vektor und eine Einheitsstrecke auf der Achse zwei Gegenkanten bilden. Das Moment eines Vektorsystems ist die Summe der Momente aller einzelnen Vektoren. Es ergibt sich somit nach (39) und (40), wenn $\alpha, \ldots, \nu$ die Koordinaten der Einheitsstrecke auf der Achse sind, für das Moment der Ausdruck

$$\alpha m_x + \beta m_y + \gamma m_z + \lambda p_x + \mu p_y + \nu p_z.$$

12. Aufgabe. *Von jedem Punkte des Raumes wird auf seine Polarebene bezüglich einer gegebenen Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung das Lot gefällt. Den Strahlenkomplex zu untersuchen, den alle diese Lote bilden.*

Auflösung. Um die Gleichung des Strahlenkomplexes zu erhalten, lege man die Koordinatenachsen in die Hauptachsen der Fläche zweiter Ordnung. Dann hat die Polarebene eines Punktes (xyz) eine Gleichung von der Form

$$Ax\xi + By\eta + Cz\zeta = 1,$$

wenn ξ, η, ζ laufende Koordinaten bedeuten. Für die Richtungskosinus α, β, γ des Lotes findet man also

$$\alpha : \beta : \gamma = Ax : By : Cz$$

und damit nach (36) für seine drei letzten Koordinaten

$$\lambda : \mu : \nu = (C - B)yz : (A - C)zx : (B - A)xy.$$

Demnach wird

$$\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right)\alpha\lambda + \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)\beta\mu + \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\gamma\nu = 0,$$

und dies läßt sich als die Gleichung des Komplexes auffassen.

Zu dem Komplex gehören alle Durchmesser der Fläche zweiter Ordnung und alle Parallelen zu ihren Hauptachsen. Die Komplexstrahlen durch einen beliebigen Punkt erfüllen einen orthogonalen Kegel (der unendlich viele Tripel zueinander senkrechter Seitenlinien enthält) und die Komplexstrahlen in einer beliebigen Ebene umhüllen eine Parabel. Dieser Strahlenkomplex heißt der *Reyesche Achsenkomplex.* Vgl. Reye, *Geometrie der Lage,* 2. Bd., 4. Aufl. 1907, 28. Vortrag.

Zweites Kapitel.

Vektoranalysis.

1. Derivierte eines Vektors.[1]) Wenn zwischen irgendwelchen Grenzen jedem Werte einer numerischen Veränderlichen t eine bestimmte Lage eines Punktes P zugeordnet ist, so heißt P eine Funktion von t und wird geschrieben $P(t)$. Die Koordinaten, welche die Lage von P festlegen, sind dann ebenfalls Funktionen von t.

Man kann nun in der gewöhnlichen Weise die Derivierte des Punktes P definieren. Bezeichnet t_1 einen zweiten Wert der Variablen t, so ist die Differenz $P(t_1) - P(t)$ ein Vektor und es läßt sich stets ein neuer Vektor $\boldsymbol{a}$ so bestimmen, daß

$$P(t_1) - P(t) = (t_1 - t)\,\boldsymbol{a}$$

wird. Geht man zur Grenze über, indem man t_1 sich ins Unbegrenzte t nähern läßt, so geht der Vektor $\boldsymbol{a}$ in die Derivierte

$$\boldsymbol{a} = \frac{dP}{dt} \tag{1}$$

des Punktes P über. $\boldsymbol{a}$ ist dann wieder eine Funktion von t und in der gleichen Weise wie die Derivierte von P läßt sich auch die Derivierte von $\boldsymbol{a}$, d. h. die zweite Derivierte von P

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \frac{d^2P}{dt^2} \tag{2}$$

festlegen. Nimmt man $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$ an, so wird

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \boldsymbol{e}_1\frac{da_1}{dt} + \boldsymbol{e}_2\frac{da_2}{dt} + \boldsymbol{e}_3\frac{da_3}{dt}. \tag{3}$$

---

1) Zu dem Inhalte dieses Kapitels vergleiche man außer den im vorigen Kapitel zitierten Werken noch: Élie, *La fonction vectorielle et son application à la physique*, Mémoires de Bordeaux (4) vol. 3 (1893), p. 1; Heaviside, *Electromagnetic theory*, vol. 1, London 1894; Ferraris, *Teoria geometrica dei campi vettoriali*, Memorie di Torino (2) vol. 47 (1897), p. 259; Föppl, *Die Geometrie der Wirbelfelder*, Leipzig 1897.

Die Sätze über die Derivierte einer Summe oder Differenz gelten in der gewöhnlichen Form auch für Vektoren. Ebenso ergeben sich aus der vorstehenden Gleichung die den bekannten Formeln genau analogen Regeln für die Derivierten der Produkte zweier Vektoren a, b

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(a \times b)}{dt} &= \frac{da}{dt} \times b + a \times \frac{db}{dt}, \\ \frac{d(a \wedge b)}{dt} &= \frac{da}{dt} \wedge b + a \wedge \frac{db}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

2. Anwendungen auf ebene und räumliche Kurven. Die Punkte P einer Kurve sind als eine Funktion der von einem bestimmten Anfangspunkte und in bestimmtem Sinne gerechneten Bogenlänge s anzusehen. Die erste Derivierte von P nach s wollen wir mit t bezeichnen. Nach der gegebenen Definition ergibt sich, wenn P die Koordinaten x, y, z hat,

$$t = \frac{dx}{ds} e_1 + \frac{dy}{ds} e_2 + \frac{dz}{ds} e_3. \tag{5}$$

Da aber

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

bedeutet t einen zur Kurventangente parallelen Einheitsvektor, der im Sinne der wachsenden Bogenlänge s gerechnet ist. Die zweite Derivierte P'' ist ein neuer Vektor t', der der Schmiegungsebene der Kurve parallel ist. Wird $t' = 0$, so ist t ein konstanter Vektor c und es wird $P = P_0 + sc$, d. h. die Kurve ist eine Gerade in der Richtung des Vektors c durch den Punkt P_0. Ist $t' \neq 0$, so differenziere man die Gleichung $t \times t = 1$ nach s und findet

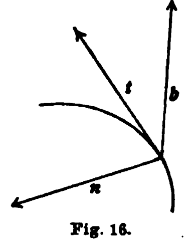


Fig. 16.

$$t \times t' = 0,$$

also ist der Vektor t' senkrecht zu t. Wir setzen nun

$$\varrho = \frac{1}{\operatorname{mod} t'} \tag{6}$$

und

$$n = \varrho t'; \tag{7}$$

ϱ heißt dann der Krümmungsradius der Kurve in P. Der Einheitsvektor $\boldsymbol{n}$ ist der „Hauptnormale" der Kurve (d. h. der durch P in der Schmiegungsebene von P senkrecht zur Tangente gezogenen Geraden) parallel und nach dem Krümmungszentrum Q (das im Abstande ϱ von P auf der Hauptnormalen liegt) hin gerichtet; wir finden somit

$$Q = P + \varrho \boldsymbol{n}. \tag{8}$$

Setzen wir schließlich

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{n}, \tag{9}$$

so ist $\boldsymbol{b}$ ein dritter Einheitsvektor, der der „Binormale" der Kurve in P parallel und so orientiert ist, daß $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ ein Rechtssystem bilden. Da

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{t} = 0 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{t}' = 0$$

ist, ergibt sich durch Differentiation der ersten dieser Gleichungen $\boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{t} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{t}' = 0$ und wegen der dritten Gleichung

$$\boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{t} = 0.$$

Ist $\boldsymbol{b}' = 0$ für jeden Kurvenpunkt, so wird $\boldsymbol{b}$ ein konstanter Vektor $\boldsymbol{l}$. Dann läßt die Gleichung $\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{t} = 0$ oder $\boldsymbol{l} \times \frac{dP}{ds} = 0$ sich direkt integrieren und ergibt

$$\boldsymbol{l} \times (P - P_0) = \text{konst.}$$

Die Konstante ist aber 0, da für $P = P_0$ die linke Seite verschwindet. Also ist der Vektor $P - P_0$ beständig senkrecht zu einem konstanten Vektor $\boldsymbol{l}$, d. h. die Kurve ist in einer Ebene enthalten.

Ist $\boldsymbol{b}' \neq 0$, so ist $\boldsymbol{b}'$, weil $\boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{t} = 0$, senkrecht zu $\boldsymbol{t}$, aber, da aus $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b} = 1$ wieder $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b}' = 0$ folgt, auch senkrecht zu $\boldsymbol{b}$, also ist $\boldsymbol{b}'$ parallel zu $\boldsymbol{n}$, und es ergibt sich eine Gleichung

$$\boldsymbol{n} = \tau \boldsymbol{b}'. \tag{10}$$

In dieser bedeutet τ einen (positiven oder negativen) Zahlfaktor, der der Torsionsradius der Raumkurve im Punkte P heißt. Der umgekehrte Wert $1/\tau$ wird als die Torsion bezeichnet. Wir beweisen jetzt das

Frenetsche Theorem: Die Derivierten der drei Vektoren t, n, b nach der Bogenlänge s lassen sich durch ϱ und τ und die Vektoren t, n, b selbst ausdrücken.

Da t' und b' bereits durch (7) und (10) gefunden sind, haben wir nur noch n' aus der Gleichung

$$n = b \wedge t$$

abzuleiten. Es ergibt sich sofort

$$n' = b' \wedge t + b \wedge t' = \frac{1}{\tau} n \wedge t + \frac{1}{\varrho} b \wedge n$$
$$= -\frac{1}{\tau} b - \frac{1}{\varrho} t,$$

und die gesuchten Formeln sind somit:

$$t' = \frac{1}{\varrho} n, \quad n' = -\frac{1}{\varrho} t - \frac{1}{\tau} b, \quad b' = \frac{1}{\tau} n. \tag{11}$$

Vielfach ist der Punkt P nicht unmittelbar als Funktion der Bogenlänge s gegeben, sondern als Funktion eines anderen Parameters φ, der seinerseits als Funktion von s angesehen werden kann. In diesem Falle hat man

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP}{d\varphi} &= t\frac{ds}{d\varphi}, \\ \frac{d^2P}{d\varphi^2} &= t\frac{d^2s}{d\varphi^2} + n\frac{1}{\varrho}\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Diese Gleichungen sagen aus, daß die Derivierte von P nach φ ein zur Tangente paralleler Vektor ist, dessen Modul gleich dem absoluten Betrage von $ds/d\varphi$ wird, und daß die zweite Derivierte ein der Schmiegungsebene paralleler Vektor ist, dessen Komponenten nach Tangente und Hauptnormale der Größe und dem Sinne nach durch die Ausdrücke $\frac{d^2s}{d\varphi^2}$ und $\frac{1}{\varrho}\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2$ angegeben werden. Man kann auch schreiben

$$\frac{d^2P}{d\varphi^2} \times n = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{dP}{d\varphi}\right)^2. \tag{13}$$

3. Vektorfunktionen. Der Gradient. Bisher haben wir den Punkt als Funktion einer Zahl betrachtet, jetzt wollen wir die Zahl u als Funktion eines Punktes P, der innerhalb

eines dreidimensionalen Feldes[1]) variiert, ansehen. Geht P in $P + dP$ über, wo dP einen infinitesimalen Vektor bezeichnet, so geht u in $u + du$ über. Wir setzen dann voraus, es existiere ein Vektor a derart, daß die Gleichung

$$du = a \times dP$$

besteht, welches auch die unendlich kleine Verschiebung des Punktes P sei. Man kann leicht einsehen, daß nur ein einziger solcher Vektor existieren kann. Denn wäre b ein zweiter, so würde sich ergeben

$$a \times dP - b \times dP = (a - b) \times dP = 0$$

und somit, da dP beliebig bleibt, $a = b$. Der Vektor a heißt der Gradient von u[2]), und wir schreiben

$$a = \operatorname{grad} u, \tag{14}$$

es gilt dann die identische Relation

$$du = \operatorname{grad} u \times dP. \tag{15}$$

Durch die Operation grad wird, wie man sieht, aus einer skalaren Funktion ein Vektor abgeleitet. Es ist im übrigen leicht zu zeigen, daß sie denselben Regeln wie das Differentialzeichen d unterworfen ist. Ist z. B. f eine Funktion von $u, v, \ldots$, die ihrerseits Funktionen von P sind, so ergibt sich

$$\begin{aligned} df = \operatorname{grad} f \times dP &= \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv + \cdots \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} (\operatorname{grad} u \times dP) + \frac{\partial f}{\partial v} (\operatorname{grad} v \times dP) + \cdots \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial u} \operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v} \operatorname{grad} v + \cdots\right) \times dP \end{aligned}$$

und somit

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial u} \operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v} \operatorname{grad} v + \cdots \tag{16}$$

in genauer Analogie zu der Formel

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv + \cdots$$

---

1) Der Begriff des Feldes ist entwickelt worden von W. Thomson, Philosophical Magazine (4) vol. 1 (1851), p. 179; Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism, p. 467.

2) Vgl. Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik, Bd. 1, S. 213.

Insbesondere erhält man

$$\left.\begin{aligned}\text{grad}\,(u+v+\cdots) &= \text{grad}\,u + \text{grad}\,v + \cdots,\\ \text{grad}\,mu &= m\,\text{grad}\,u \quad (m\,\text{konstant}),\\ \text{grad}\,(uv) &= u\,\text{grad}\,v + v\,\text{grad}\,u.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Ist O ein fester Punkt und setzt man

$$r = \text{mod}\,(P-O),$$

so wird

$$r^2 = (P-O)^2,$$

mithin

$$r\,dr = (P-O) \times dP,$$

oder

$$dr = \frac{P-O}{r} \times dP,$$

und da andrerseits $dr = \text{grad}\,r \times dP$ ist, ergibt sich

$$\text{grad}\,r = \frac{P-O}{r}, \tag{18}$$

d. h. der Gradient der Entfernung r ist ein dem Vektor $P-O$ paralleler Einheitsvektor. Allgemeiner wird

$$\text{grad}\,f(r) = \frac{df(r)}{dr}\cdot\text{grad}\,r = \frac{df(r)}{r\,dr}(P-O). \tag{18a}$$

Hat P die Koordinaten x, y, z, so folgt aus

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

und $dP = e_1\,dx + e_2\,dy + e_3\,dz$ nach der Definitionsgleichung (15)

$$\text{grad}\,u = e_1\frac{\partial u}{\partial x} + e_2\frac{\partial u}{\partial y} + e_3\frac{\partial u}{\partial z}, \tag{19}$$

d. h. der Gradient von u ist ein Vektor, dessen Komponenten die Derivierten von u nach den Koordinaten sind. Insbesondere ist

$$\text{grad}\,x = e_1, \quad \text{grad}\,y = e_2, \quad \text{grad}\,z = e_3.$$

Die Gleichung

$$u = \text{const.}$$

stellt eine sogenannte Niveaufläche dar. Findet die Verschiebung dP längs dieser Fläche statt, so ist $du = 0$, mithin

$$\text{grad}\,u \times dP = 0,$$

d. h. der grad u ist ein Vektor, der zu der durch den Punkt P gehenden Niveaufläche normal ist.

Ist dn das Stück, das auf dieser Normalen durch eine unendlich nahe benachbarte und zu dem Werte $u + du$ gehörende Niveaufläche abgeschnitten wird, so ist der Modul des grad u gleich dem absoluten Betrage des Differentialquotienten

$$\frac{du}{dn},$$

der das Gefälle an der betreffenden Stelle heißt.

4. Die Rotation. Wir betrachten jetzt nicht mehr eine skalare Funktion u, sondern eine vektorielle Funktion $\boldsymbol{u}$ des Punktes P. Erteilen wir dem Punkte P zwei verschiedene unendlich kleine Verschiebungen dP und δP, so geht $\boldsymbol{u}$ hierbei über in zwei unendlich wenig verschiedene Vektoren $\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}$. Dann definieren wir einen neuen Vektor, der wieder eine Funktion von P ist und die Rotation der Vektorfunktion $\boldsymbol{u}$ heißt, in Zeichen rot $\boldsymbol{u}$, durch die folgende Gleichung

$$\text{rot}\, \boldsymbol{u} \times dP \wedge \delta P = d\boldsymbol{u} \times \delta P - \delta \boldsymbol{u} \times dP, \tag{20}$$

die für alle Verschiebungen dP, δP identisch erfüllt sein soll.[1] Daß dies möglich und nur auf eine Art möglich ist, wird noch zu beweisen sein, vorläufig ziehen wir die Konsequenzen aus der vorstehenden Gleichung. Zunächst ist klar, daß

$$\text{rot}\, (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \text{rot}\, \boldsymbol{u} + \text{rot}\, \boldsymbol{v} \tag{21}$$

wird. Ersetzen wir ferner in der Definitionsgleichung $\boldsymbol{u}$ durch $m\boldsymbol{u}$, wobei m eine skalare Funktion ist, so ergibt sich nach (15)

$$\begin{aligned}\text{rot}\, m\boldsymbol{u} \times dP \wedge \delta P &= m[d\boldsymbol{u} \times \delta P - \delta \boldsymbol{u} \times dP] \\ &+ [(\text{grad}\, m \times dP)\, \delta P - (\text{grad}\, m \times \delta P)\, dP]\, \boldsymbol{u}.\end{aligned}$$

Die erste eckige Klammer auf der rechten Seite ist durch rot $\boldsymbol{u} \times dP \wedge \delta P$ zu ersetzen, die zweite eckige Klammer

1) Der Begriff und die Bezeichnung rühren von Maxwell her, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, vol. 1, art. 25: Maxwell selbst hat auch die sonst übliche Bezeichnung *Curl* aufgebracht, *Classification of physical quantities*, Proceedings of the London Math. Society, vol. 3 (1871), p. 224; Papers vol. 2, p. 257.

wird nach Formel (19) in Kap. I gleich $(dP \wedge \delta P) \wedge \operatorname{grad} m$ und da weiter nach (21) in Kap. I

$$(dP \wedge \delta P) \wedge \operatorname{grad} m \times u = (\operatorname{grad} m \wedge u) \times (dP \wedge \delta P)$$

wird, erhalten wir schließlich

$$\operatorname{rot} mu \times dP \wedge \delta P = [m \operatorname{rot} u + \operatorname{grad} m \wedge u] \times dP \wedge \delta P,$$

also

$$\operatorname{rot} mu = m \operatorname{rot} u + \operatorname{grad} m \wedge u. \tag{22}$$

Bezeichnet u irgend eine Skalarfunktion von P, so ist

$$\operatorname{grad} u \times \delta P = \delta u, \quad \operatorname{grad} u \times dP = du.$$

Aus diesen Gleichungen finden wir, indem wir P in der ersten nach $P + dP$, in der zweiten nach $P + \delta P$ rücken lassen,

$$d \operatorname{grad} u \times \delta P + \operatorname{grad} u \times d\delta P = d\delta u,$$
$$\delta \operatorname{grad} u \times dP + \operatorname{grad} u \times \delta dP = \delta du.$$

Es ist aber $d\delta u = \delta du$ und ebenso $d\delta P = \delta dP$, also folgt durch Subtraktion der vorstehenden Gleichungen

$$d \operatorname{grad} u \times \delta P - \delta \operatorname{grad} u \times dP = 0.$$

Vergleichen wir dies mit dem, was aus (20) für

$$u = \operatorname{grad} u$$

wird, so ergibt sich $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u \times dP \wedge \delta P = 0$, und da hierbei die Vektoren dP, δP willkürliche Richtungen haben, muß

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0 \tag{23}$$

sein: die Rotation des Gradienten einer Skalarfunktion ist immer Null. Insbesondere ist $\operatorname{rot} a = 0$, wenn a einen konstanten Vektor bezeichnet. Wir haben also auch

$$\operatorname{rot} e_1 = 0, \quad \operatorname{rot} e_2 = 0, \quad \operatorname{rot} e_3 = 0. \tag{23a}$$

Rechnen wir demnach auf Grund der Formeln (21) und (22), indem wir

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$$

setzen, die Rotation aus, so ergibt sich

$$\operatorname{rot} u = \operatorname{grad} u_1 \wedge e_1 + \operatorname{grad} u_2 \wedge e_2 + \operatorname{grad} u_3 \wedge e_3, \tag{24}$$

und beachtet man, daß

$$\operatorname{grad} u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} e_1 + \frac{\partial u_1}{\partial y} e_2 + \frac{\partial u_1}{\partial z} e_3 \text{ usw.}$$

ist, so findet man durch Ausführung der äußeren Produkte

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}\right) e_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}\right) e_2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) e_3. \quad (25)$$

Da dieser Ausdruck mit Notwendigkeit aus der Definitionsgleichung (20) folgt, ist die Erfüllbarkeit dieser Gleichung als bewiesen anzusehen, und es ist auch klar, daß die Rotation durch die Definitionsgleichung in eindeutiger Weise bestimmt ist.

5. Die Divergenz. Wir nehmen an, daß vier Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}'$, die Funktionen von P sind, der identischen Gleichung genügen

$$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}' \wedge \boldsymbol{y}', \quad (\alpha)$$

dann sind $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}'$ komplanar mit $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ und es wird somit

$$\boldsymbol{x}' = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}' = c\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{y}. \quad (\beta)$$

Trägt man diese Werte in die vorstehende Gleichung ein, so ergibt sie, da $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{x} = 0$, $\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{y} = 0$, $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}$ ist,

$$ad - bc = 1. \quad (\gamma)$$

Aus (β) folgt aber

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{x}' = a \operatorname{rot} \boldsymbol{x} + b \operatorname{rot} \boldsymbol{y}, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{y}' = c \operatorname{rot} \boldsymbol{x} + d \operatorname{rot} \boldsymbol{y}$$

und hieraus mit Rücksicht auf (γ)

$$\boldsymbol{y}' \times \operatorname{rot} \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}' \times \operatorname{rot} \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{y}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung ist demnach, wenn man

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}$$

setzt, eine Funktion des Vektors $\boldsymbol{u}$ und soll als dessen Divergenz, geschrieben $\operatorname{div} \boldsymbol{u}$, bezeichnet werden.[1]) Da man aber jede Vektorfunktion $\boldsymbol{u}$ auf unendlich viele Arten als das vektorielle Produkt zweier anderen Vektorfunktionen $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ gewinnen kann, ergibt sich die allgemeine Definitionsgleichung

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \operatorname{div}(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{y}. \quad (26)$$

1) Die Bezeichnung *Divergenz* stammt von Clifford, *Elements of dynamic* (1878), p. 209. Maxwell sagt *Konvergenz*.

Setzen wir noch

$$v = x \wedge z, \quad \text{also} \quad u + v = x \wedge (y + z),$$

so erhalten wir nach (26) mit Rücksicht auf (21) sofort

$$\operatorname{div}(u + v) = \operatorname{div} u + \operatorname{div} v. \tag{27}$$

Ferner finden wir nach (22)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} m u &= y \times \operatorname{rot} m x - m x \times \operatorname{rot} y \\ &= y \times (m \operatorname{rot} x + \operatorname{grad} m \wedge x) - m x \times \operatorname{rot} y \\ &= m (y \times \operatorname{rot} x - x \times \operatorname{rot} y) + \operatorname{grad} m \times x \wedge y, \end{aligned}$$

also

$$\operatorname{div} m u = m \operatorname{div} u + \operatorname{grad} m \times u. \tag{28}$$

Nehmen wir wieder $u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$ an, so folgt aus (27) und (28), da nach (26) und (23a) für $u = e_1 = e_2 \wedge e_3$ usw.

$$\operatorname{div} e_1 = 0, \quad \operatorname{div} e_2 = 0, \quad \operatorname{div} e_3 = 0$$

wird, sofort

$$\operatorname{div} u = \operatorname{grad} u_1 \times e_1 + \operatorname{grad} u_2 \times e_2 + \operatorname{grad} u_3 \times e_3 \tag{29}$$

oder

$$\operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}. \tag{30}$$

Ist u konstant, so verschwindet hiernach die Divergenz.

Vergleicht man die Formeln (28) und (29) mit (22) und (24), so sieht man, daß sie völlig analog sind, indem beim Übergange von den ersteren zu den letzteren nur die Rotation durch die Divergenz und die äußeren Produkte durch die inneren ersetzt werden.

Aus (30) und (25) folgt

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} u = 0. \tag{31}$$

In der Tat wird dieser Ausdruck

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)$$

und hierin zerstören sich die sechs bei Ausführung der Differentiation entstehenden Glieder paarweise.

Nach (19) und (30) ergibt sich endlich noch

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{32}$$

was wir auch schreiben wollen

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \Delta u. \tag{32a}$$

6. Integralformeln. Die Greenschen Sätze. Wir bezeichnen mit σ eine geschlossene Oberfläche, mit τ das von ihr eingeschlossene Raumstück, $\mathfrak{n}$ sei ein Einheitsvektor, der zu σ normal und nach dem Innern von τ zu gerichtet ist, u bedeute eine Skalarfunktion, $\mathfrak{u}$ eine Vektorfunktion der Punkte P von τ und σ, und es seien diese Funktionen eindeutig, endlich, stetig und differenzierbar innerhalb dieses Bereiches.

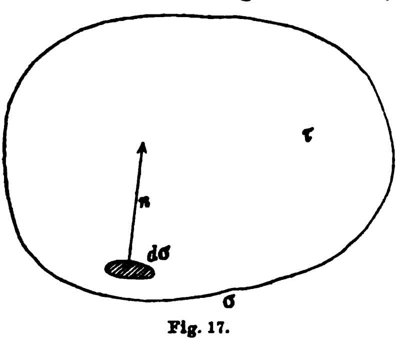


Fig. 17.

Wir nennen das Integral

$$\int (\mathfrak{n} \times \mathfrak{u})\, d\sigma$$

den Fluß der Vektorfunktion $\mathfrak{u}$ durch die Fläche σ. Zerlegen wir das Volumen τ durch drei Scharen unendlich benachbarter und zu den Koordinatenebenen paralleler Ebenen in unendlich kleine, rechtwinklige Parallelepipeda und rechnen den Fluß für alle diese Parallelepipeda aus, so heben sich in der Summe dieser Ausdrücke zwei Glieder, die sich auf die gemeinsame Seitenfläche zweier angrenzenden Parallelepipeda beziehen, jedesmal fort, weil diese Glieder sich nur im Vorzeichen von $\mathfrak{n}$ unterscheiden, also der Fluß für sie entgegengesetzt gleiche Werte annimmt. Es bleiben also nur die Glieder übrig, die sich auf die an der äußeren Oberfläche liegenden Seitenflächen des durch die Parallelepipeda gebildeten Raumstückes beziehen, dies aber ist der Fluß durch die Oberfläche σ. Wir greifen nun eines der Parallelepipeda

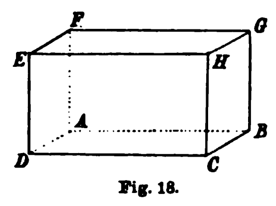


Fig. 18.

heraus (Fig. 18), $d\sigma_1$ sei der Inhalt der Seitenfläche $ADEF$, der Fluß durch diese Seitenfläche ist dann

$$u_1 d\sigma_1,$$

wenn u_1 die Komponente der Vektorfunktion u nach der Kantenrichtung AB, die der x-Achse parallel sei, bedeutet. Für die gegenüberliegende Seitenfläche $BCHG$ erhalten wir den Fluß

$$-(u_1 + du_1)\,d\sigma_1.$$

Die Summe der beiden gefundenen Ausdrücke ist

$$-du_1 \cdot d\sigma_1 = -(\operatorname{grad} u_1 \times e_1)\cdot d\tau,$$

denn ist dx die Länge der Kante AB, so wird das Volumen des Parallelepipedon $d\tau = d\sigma_1 \cdot dx$, und es ist ferner

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \operatorname{grad} u_1 \times e_1.$$

Für die beiden anderen Paare gegenüberliegender Seitenflächen des Parallelepipedon erhalten wir die analogen Ausdrücke

$$-(\operatorname{grad} u_2 \times e_2)\,d\tau, \quad -(\operatorname{grad} u_3 \times e_3)\,d\tau$$

und damit für die Summe aller drei Ausdrücke

$$-(\operatorname{grad} u_1 \times e_1 + \operatorname{grad} u_2 \times e_2 + \operatorname{grad} u_3 \times e_3)\,d\tau = -\operatorname{div} u \cdot d\tau$$

[vgl. (29)]. Somit ergibt sich für den Fluß durch die Oberfläche σ schließlich

$$\int (n \times u)\,d\sigma = -\int \operatorname{div} u\,d\tau$$

und umgekehrt wird

$$\int \operatorname{div} u\,d\tau = -\int n \times u\,d\sigma. \tag{33}$$

Aus dieser Formel erhalten wir mit Leichtigkeit noch zwei andere. Zuerst ersetzen wir u durch ua, wobei a konstant aber willkürlich ist, dann folgt aus (28), wenn wir beachten, daß $\operatorname{div} a = 0$ wird,

$$a \times \int \operatorname{grad} u\,d\tau = -a \times \int n u\,d\sigma,$$

also

$$\int \operatorname{grad} u\,d\tau = -\int n u\,d\sigma. \tag{34}$$

Ersetzen wir in (33) u durch $a \wedge u$, dann ergibt sich aus (26), daß

$$\operatorname{div}(a \wedge u) = -a \times \operatorname{div} u$$

ist, und ferner wird

$$n \times a \wedge u = -a \times n \wedge u,$$

also erhalten wir

$$a \times \int \operatorname{rot} u \, d\tau = -a \times \int n \wedge u \, d\sigma$$

oder

$$\int \operatorname{rot} u \, d\tau = -\int n \wedge u \, d\sigma. \tag{35}$$

Die drei so gefundenen Formeln (33) bis (35) wollen wir der Reihe nach als das Divergenztheorem, den Gradientensatz und das Rotationstheorem bezeichnen.

Aus diesen Formeln lassen sich zwei andere ableiten, die unter dem Namen der Greenschen Sätze bekannt sind. Wir gehen von der aus (28) unmittelbar folgenden Formel aus:

$$\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = u \operatorname{div} \operatorname{grad} v + \operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v,$$

in der u und v skalare Funktionen des Ortes von der oben angegebenen Art bedeuten. Integrieren wir diese Gleichung und wenden auf ihre linke Seite das Divergenztheorem an, so ergibt sich

$$\int (\operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v + u \operatorname{div} \operatorname{grad} v) \, d\tau = -\int (n \times u \operatorname{grad} v) \, d\sigma. \tag{36}$$

Vertauschen wir hierin u und v und subtrahieren die so entstehende Formel von der vorstehenden, so ergibt sich

$$\int (u \operatorname{div} \operatorname{grad} v - v \operatorname{div} \operatorname{grad} u) \, d\tau = -\int (u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u) \times n \, d\sigma. \tag{37}$$

Die beiden gefundenen Gleichungen gestatten noch eine einfache Umformung, die aus ihnen die Vektorsymbolik ganz entfernt. Machen wir

$$dP = n \, dn,$$

indem dn eine unendlich kleine Strecke auf der Normalen n bedeutet, so geht die Gleichung [s. (15)]

$$dv = \operatorname{grad} v \times dP$$

über in

$$\frac{dv}{dn} = \operatorname{grad} v \times n,$$

und somit finden wir mit Rücksicht auf (32a)

$$\int (\operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v + u \Delta v)\, d\tau = -\int u \frac{dv}{dn}\, d\sigma,$$

$$\int (u \Delta v - v \Delta u)\, d\tau = -\int \left(u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn}\right) d\sigma,$$

wobei die Derivierten auf der rechten Seite nach der Normalen der Fläche σ genommen sind.

7. Der Stokessche Satz. Ist s eine geschlossene Kurve, die von einem Punkte P in bestimmtem Sinne durchlaufen wird, σ eine Fläche, deren Rand die Kurve s bildet, ein sogenanntes Diaphragma, ist ferner u eine Vektorfunktion der Punkte P von s und σ, von welcher sich die rot bilden läßt, endlich n ein vom Punkte P ausgehender Einheitsvektor, der zu σ normal und so gerichtet ist, daß ein Beobachter, der mit den Füßen in P und mit dem Kopf in $P + n$ aufgestellt ist, die Randkurve s links drehend durchlaufen sieht, so wird

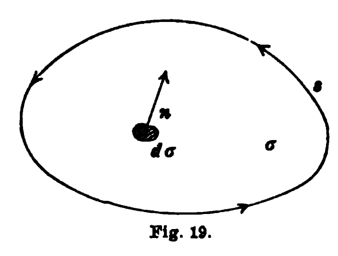


Fig. 19.

$$\int_s u \times dP = \int_\sigma \operatorname{rot} u \times n\, d\sigma. \tag{38}$$

Das Integral auf der linken Seite heißt nach W. Thomson die Zirkulation des Vektors u längs s.

Wir beweisen zunächst den Satz unter der Voraussetzung, daß s eine ebene Kurve und die von ihr eingeschlossene Fläche σ ebenfalls eben ist. Von dem Randpunkte P lassen wir drei Einheitsvektoren ausgehen, den einen t tangential zur Randkurve, den zweiten

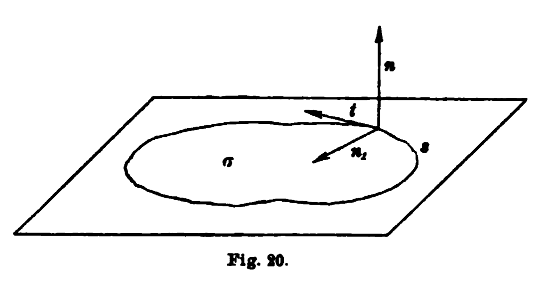


Fig. 20.

$\boldsymbol{n}_1$ normal zu dieser Kurve in ihrer Ebene und den dritten $\boldsymbol{n}$ senkrecht zu den beiden ersten, so daß $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{n}_1$ wird; $\boldsymbol{n}$ ist dann ein konstanter Vektor senkrecht zu der Ebene der Kurve. Man erhält sofort

$$\int \boldsymbol{u} \times d\boldsymbol{P} = \int \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{t}\, ds.$$

Es ist aber

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{t} = -\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{n}_1 = -(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{n}) \times \boldsymbol{n}_1,$$

wenden wir also den Divergenzsatz (33) an, so ergibt sich

$$\int \boldsymbol{u} \times d\boldsymbol{P} = -\int (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{n}) \times \boldsymbol{n}_1 ds = \int \operatorname{div} (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{n})\, d\sigma.$$

Beachten wir nun, daß nach (26)

$$\operatorname{div} (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{u}$$

wird, so folgt sofort die Gleichung (38).

Im Falle einer beliebig gestalteten Randkurve s_1 können wir σ durch ein Netz von transversalen Linien in soviel Teilflächen zerlegen, daß wir jede dieser Teilflächen ohne merkbaren Fehler als eben ansehen können. Die Zirkulation der Randkurve ist aber die Summe von den Zirkulationen der Ränder aller einzelnen Teilflächen, denn wenn wir diese Summe bilden, so heben sich die Bestandteile der Randintegrale, die sich auf ein gemeinsames Randstück zweier aneinander grenzenden Flächenteile beziehen, weil bei ihnen das Randstück in entgegengesetztem Sinne durchlaufen wird, weg und es bleiben nur die Bestandteile übrig, die sich auf den Rand der ganzen Fläche beziehen. Sonach bleibt die Formel (38) gültig, da sie für jede einzelne Teilfläche erfüllt ist.

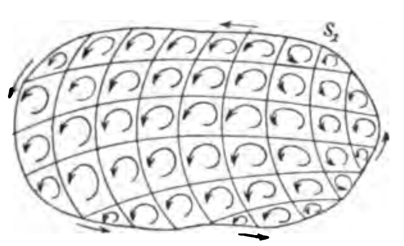


Fig. 21.

Lassen wir die Fläche σ sich sackförmig zusammenziehen, so daß ihre Randkurve s kleiner und kleiner wird und schließlich verschwindet, so muß auch das auf s bezogene Integral

verschwinden und es ergibt sich, daß für eine geschlossene Fläche σ stets

$$\int_\sigma \boldsymbol{n} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{u}\, d\sigma = 0 \tag{39}$$

ist.

Wir wollen den Stokesschen Satz benutzen zum Beweise des Satzes, daß jede Vektorfunktion, deren Rotation identisch verschwindet, der Gradient einer Skalarfunktion ist. Dieser Satz bedeutet sozusagen die Umkehrung der Formel (23).

In einem einfach zusammenhängenden Felde τ sei also

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = 0; \tag{40}$$

s sei eine in τ gezogene geschlossene Kurve, durch sie legen wir ein Diaphragma σ, von dem wir annehmen, es sei ganz in τ enthalten. Dann wird infolge von (40) und (38)

$$\int_s \boldsymbol{u} \times dP = 0.$$

Wir teilen nun s durch zwei Punkte P_0, P in zwei Teile s_1, s_2 und kehren im einen Teile die Integrationsrichtung um, dann folgt aus der vorstehenden Gleichung

$$\int_{s_1} \boldsymbol{u} \times dP = \int_{s_2} \boldsymbol{u} \times dP.$$

Der Wert dieses Integrals hängt also nur von der Lage der Punkte P_0, P ab, es ist also, wenn wir den Punkt P_0 fest lassen, eine eindeutige Funktion u des in τ beliebig variierbaren Punktes P, und wir finden

$$du = \boldsymbol{u} \times dP,$$

also

$$\boldsymbol{u} = \operatorname{grad} u,$$

womit der Satz bewiesen ist. Wäre der Raum τ nicht einfach zusammenhängend, z. B. das Innere eines Kreisringes, so würde der Satz bestehen bleiben, nur ist dann u nicht mehr eine eindeutige Funktion.

Übungsbeispiele.

1. Aufgabe. *Wenn ein Kreis ohne zu gleiten auf einer Geraden rollt, so beschreibt irgend ein Punkt auf ihm eine Zykloide. Von dieser Kurve die Normalen, die Krümmungsradien und die Evolute zu bestimmen.*

Auflösung. Der die Kurve beschreibende Punkt sei aus der Anfangslage O auf der Geraden in die Lage P übergegangen, und dabei habe der rollende Kreis, dessen Radius a sei, sich um seinen Mittelpunkt M um den Winkel $PMC = \varphi$ gedreht, wobei C den momentanen Berührungspunkt des Kreises mit der Geraden bezeichnet. m sei ein der festen Geraden paralleler Einheitsvektor. Dann ist

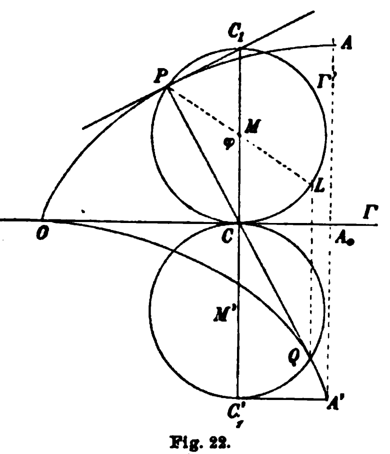


Fig. 22.

$$P - M = e^{-i\varphi}(C - M)$$

und es wird

$$C - M = -aim, \qquad C - O = a\varphi m;$$

daraus folgt

$$P - M = -ae^{-i\varphi}im$$

und

$$P - O = a\varphi m + aim - ae^{-i\varphi}im.$$

Durch Differentiation nach φ ergibt sich hieraus

$$\frac{dP}{d\varphi} = am - ae^{-i\varphi}m$$

oder

$$i\frac{dP}{d\varphi} = P - C,$$

und da $i\frac{dP}{d\varphi}$ ein zur Normalen paralleler Vektor ist, erkennen wir, daß die Normale den Punkt P mit dem Berührungspunkte C verbindet.

Mit Rücksicht auf (12) ergibt sich noch

$$\frac{ds}{d\varphi} = \operatorname{mod}(P - C).$$

Weiter wird

$$\frac{d^2P}{d\varphi^2} = ae^{-i\varphi}im = M - P.$$

Vergleichen wir dies mit der zweiten Formel (12), so zeigt sich, daß

$$\frac{1}{\varrho}\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\operatorname{mod}(P-C)$$

also

$$\varrho = 2\operatorname{mod}(P-C)$$

wird: der Krümmungsradius ist das doppelte der geometrischen Normalen PC.

Das Krümmungszentrum Q bestimmt sich aus der Gleichung (8), wonach

$$Q = P + 2(C-P),$$

also

$$Q = O + a\varphi m - aim + ae^{-i\varphi}im.$$

Setzen wir

$$A_0 = O + a\pi m, \quad A' = A_0 - 2aim,$$
$$\varphi - \pi = \varphi_1,$$

so ergibt sich

$$Q = A' + a\varphi_1 m + aim - ae^{-i\varphi_1}im,$$

also ist die Evolute einer Zykloide wieder eine kongruente Zykloide.

2. Aufgabe. *Den Gradienten von* $u = m \times (P-O)$ *zu berechnen, wenn* m *einen konstanten Vektor bedeutet.*

Auflösung. Es ist

$$du = m \times dP = \operatorname{grad} u \times dP,$$

also

$$\operatorname{grad} u = m.$$

3. Aufgabe. *Den Gradienten von*

$$u = [a \wedge (P-O)] \times [b \wedge (P-O)]$$

zu berechnen, wenn a, b *konstante Vektoren bedeuten.*

Auflösung. Es wird nach Gl. (23) in Kap. I

$$u = [a \times b]\cdot(P-O)^2 - [a \times (P-O)]\cdot[b \times (P-O)]$$

und demnach

$$\operatorname{grad} u = 2[a \times b](P-O) - [a \times (P-O)]\,b - [b \times (P-O)]\,a,$$

wofür man auch schreiben kann [s. Gl. (19) in Kap. I]

$$\operatorname{grad} u = [a \wedge (P-O)] \wedge b + [b \wedge (P-O)] \wedge a.$$

4. Aufgabe. *Zu berechnen*

$$\operatorname{div}(P-O).$$

Auflösung. Es sei

$$P - O = x e_1 + y e_2 + z e_3,$$

so ergibt sich unmittelbar

$$\operatorname{div}(P - O) = 3.$$

5. Aufgabe. *Zu beweisen, daß*

$$\Delta \frac{1}{r} = 0.$$

Auflösung. Es ist

$$\operatorname{grad} \frac{1}{r} = - \frac{P - O}{r^3},$$

also nach (28), da zufolge (18a) $\operatorname{grad} \frac{1}{r^3} = - \frac{3}{r^5} (P - O)$ wird,

$$\Delta \frac{1}{r} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{1}{r} = - \frac{1}{r^3} \operatorname{div}(P - O) + \frac{3}{r^3}$$

und da $\operatorname{div}(P - O) = 3$, ist der Satz bewiesen.

6. Aufgabe. *Zu zeigen, daß, wenn man* $\boldsymbol{u} = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$ *annimmt und*

$$\Delta \boldsymbol{u} = e_1 \Delta u_1 + e_1 \Delta u_2 + e_3 \Delta u_3$$

setzt,

$$\Delta \boldsymbol{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{u}$$

wird.

Auflösung. Man setze

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = r_1 e_1 + r_2 e_2 + r_3 e_3,$$

dann ergibt sich bei der Ausrechnung in rechtwinkligen Koordinaten

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}\right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right) \\ &= \frac{\partial \operatorname{div} \boldsymbol{u}}{\partial x} - \Delta u_1, \end{aligned}$$

und analog für r_2 und r_3. Hieraus aber folgt die zu beweisende Formel.

7. Aufgabe. *Zu zeigen, daß für*

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{c} \wedge (P - O),$$

wobei $\boldsymbol{c}$ *einen konstanten Vektor bedeutet,*

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 2 \boldsymbol{c}$$

wird.

Auflösung. Nimmt man

$$P - O = x e_1 + y e_2 + z e_3, \quad c = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3,$$

so wird

$$v = (c_2 z - c_3 y) e_1 + (c_3 x - c_1 z) e_2 + (c_1 y - c_2 x) e_3,$$

und danach ist die Behauptung leicht zu beweisen.

8. Aufgabe. *Zu zeigen, daß, wenn man mit*

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

einen konstanten Vektor bezeichnet,

$$a \operatorname{div} u - \operatorname{rot}(a \wedge u) = a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y} + a_3 \frac{\partial u}{\partial z}$$

wird.

Auflösung. Die zu beweisende Formel ergibt sich sofort durch einfache Ausrechnung der linken Seite; hierbei wird z. B. der Koeffizient von e_1

$$a_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}(a_1 u_2 - a_2 u_1) + \frac{\partial}{\partial z}(a_3 u_1 - a_1 u_3)$$
$$= a_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + a_3 \frac{\partial u_1}{\partial z}.$$

9. Aufgabe. *Zu zeigen, daß für jede geschlossene Oberfläche* σ

$$\int n \times \operatorname{rot} u \, d\sigma = 0, \qquad \int n \wedge \operatorname{grad} u \, d\sigma = 0$$

wird.

Auflösung. Das erste folgt aus (33), da $\operatorname{div}\operatorname{rot} u = 0$ ist, das zweite aus (35), da $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0$ wird.

10. Aufgabe. *Die Gleichungen* (33) *bis* (38) *in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten auszudrücken.*

Auflösung. Es ergibt sich z. B. aus (33)

$$\int_\tau \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right) d\tau = -\int_\sigma \{u_1 \cos(nx) + u_2 \cos(ny) + u_3 \cos(nz)\} \, d\sigma,$$

aus (38)

$$\int_s (u_1 \, dx + u_2 \, dy + u_3 \, dz) = \int_\sigma \left\{\left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}\right) \cos(nx) + \cdots + \cdots\right\} d\sigma.$$

Drittes Kapitel.

Geschwindigkeit und Beschleunigung.

1. Gegenstand der Kinematik. Bewegung heißt die Änderung der Lage mit der Zeit. Das Bewegte ist im geometrischen Sinne ein Teil des Raumes, im mechanischen Sinne ein Körper. Die Lage eines Körpers ist zu verstehen in bezug auf einen anderen Körper, den Bezugskörper. Es wird also jede Bewegung zunächst als relativ aufgefaßt, die Frage einer absoluten Bewegung ist erst in einem anderen Teile der Mechanik zu erörtern. Wenn wir trotzdem von Punkten sprechen, die im Raume fest sein sollen, so ist dies so zu verstehen, daß sie fest sind gegen ein Bezugssystem, das der zu bestimmenden Bewegung zugrunde gelegt wird, ohne daß wiederum seine Bewegung gegen ein neues Bezugssystem in Betracht gezogen wird. Man denke z. B. an die Bewegungen auf der Erdoberfläche, bei denen die Erde unbedenklich als ruhend angesehen wird.

Unter Kinematik versteht man nun allgemein die Lehre von der Bewegung, insofern der Zusammenhang zwischen den einzelnen bewegten Raumteilen oder Körpern als ein rein geometrischer und nicht als ein mechanischer aufgefaßt wird. Auf diese Weise werden der Kinematik allein die Begriffe von Raum und Zeit zugrunde gelegt, und das Studium der Mechanik hat füglich mit ihr zu beginnen, da sie das Mindestmaß an Begriffen voraussetzt.[1]) Die Kinematik zerfällt in eine

1) Die Wichtigkeit und Zweckmäßigkeit einer der Beschäftigung mit der Dynamik voraufgehenden Behandlung der Kinematik wurde schon von d'Alembert, Euler, Kant, Carnot, Wronski und Ampère erkannt. Von dem letzteren rührt die Benennung Kinematik für

geometrische Kinematik oder Phoronomie und eine technische Kinematik oder Zwanglauflehre. Jene betrachtet das Bewegte lediglich in geometrischer Beziehung, also als Raumteil, oder zieht auch wohl den ganzen Raum oder eine Ebene als in Bewegung befindlich in Betracht, die technische Kinematik dagegen untersucht die Bewegung wirklicher Körper, indem sie sich die maschinelle Realisierung einer vorgeschriebenen oder bestimmte Zwecke erfüllenden Bewegung zur Aufgabe macht. Sie bildet auf diese Weise einen wesentlichen Bestandteil der technischen Mechanik, während die geometrische Bewegungslehre oder, wie man auch sagt, Geometrie der Bewegung in die theoretische Mechanik gehört und somit uns vorzugsweise zu beschäftigen hat.

2. Geschwindigkeit und Beschleunigung bei geradliniger Bewegung. Ein System von Punkten heißt starr,

---

die vorher (wenigstens in Deutschland) als Phoronomie bezeichnete Disziplin her. Man vergleiche im einzelnen de la Hire, Traité des roulettes, Histoire de l'Académie de Paris 1706, p. 340; Euler, Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum, Novi Commentarii Petropolitani, vol. 20 (1776), p. 189; Kant, Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft 1786; Carnot, Essai sur les machines 1797; Wronski, Système archit. absolu 1818; Ampère, Essai sur la Philosophie 1834 (1re partie, p. 50). Lagrange definierte die Mechanik als eine Geometrie mit vier Dimensionen (Théorie des fonctions analytiques 1813, p. 311), ein Gedanke, den Poncelet in seinen Vorlesungen ausführte und der in neuester Zeit durch die letzten Untersuchungen von Minkowski besondere Bedeutung gewonnen hat.

In Lehrbuchform wurde zunächst die technische Kinematik entwickelt: Willis, Principles of mechanisms, London 1841; Olivier, Théorie géométrique des engrenages, Paris 1842; Laboulaye, Traité de cinématique, Paris 1849, 3. Aufl. 1878. Das erste Lehrbuch der geometrischen Kinematik ist das Werk von Résal, Traité de cinématique pure, Paris 1862, diesem folgte Bélanger, Traité de cinématique, Paris 1864.

Unter den neueren Lehrbüchern vgl. man speziell Schoenflies, Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung, Leipzig 1886; Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Leipzig 1888; Mannheim, Principes et développements de géométrie cinématique, Paris 1894; Königs, Leçons de cinématique, Paris 1897, und von der technischen Seite her Reuleaux, Theoretische Kinematik, Braunschweig 1875.

wenn die Entfernungen zwischen den einzelnen Punkten sich mit der Zeit nicht ändern. Ein Punkt sei in bezug auf ein starres Punktsystem, das aus mindestens drei nicht in gerader Linie befindlichen Punkten besteht, in Bewegung begriffen. Wir nehmen allgemein an, daß seine Lage sich mit der Zeit kontinuierlich ändert (Postulat der Kontinuität in der Bewegung). Der Ort der sukzessiven Lagen, die der Punkt einnimmt, heißt die Bahn des Punktes. Wir beginnen mit dem einfachen Falle, wo die Bahn eine gerade Linie ist. Auf dieser legen wir einen Ursprung O fest und einen positiven Richtungssinn für die Messung der Distanzen. Die Lage P des beweglichen Punktes zur Zeit t ist bekannt, wenn die Distanz $OP = s$ als Funktion von t gegeben ist, so daß

$$s = f(t) \tag{1}$$

wird. Diese Gleichung heißt die endliche Gleichung der Bewegung.

Als die Einheiten für die Messung der Entfernungen und der Zeiten denken wir uns das Zentimeter und die Sekunde der mittleren Sonnenzeit gewählt.

Zunächst nehmen wir

$$s = a + bt$$

an, wobei a, b Konstanten bedeuten; a ist die Entfernung, in der sich der Punkt zur Zeit $t = 0$ vom Ursprung befindet (die Anfangsabszisse), b ist die in einer Sekunde durchlaufene Strecke. Als allgemeine Regel ergibt sich, daß bei dieser Bewegung in gleichen Zeiten gleiche Strecken durchlaufen werden. Eine solche Bewegung heißt gleichförmig; b ist die Geschwindigkeit, d. h.: Bei der gleichförmigen Bewegung ist die Geschwindigkeit die in einer Sekunde durchlaufene Strecke.

Wir betrachten nun eine allgemeine ungleichförmige Bewegung, die durch die allgemeine Gleichung (1) definiert wird. Es sei P' die Lage des beweglichen Punktes zur Zeit $t + \tau$. Wir finden dann, indem wir die Funktion $f(t)$ als differenzierbar voraussetzen,

$$PP' = f(t + \tau) - f(t) = \tau f'(t) + \tau^2 \varepsilon;$$

hierbei bedeutet ε eine Funktion von t und τ, die für $\tau = 0$ einen bestimmten endlichen Wert hat. Von P möge zur Zeit t ein zweiter beweglicher Punkt ausgehen, der in gleichmäßiger Bewegung mit der Geschwindigkeit v während der Zeit τ die Strecke

$$PP_1 = v\tau$$

durchläuft. Die Gleichung

$$P_1 P' = \tau [f'(t) - v] + \tau^2 \varepsilon$$

drückt dann die Entfernung der beiden beweglichen Punkte nach Ablauf der Zeit τ aus. Unter den unendlich vielen möglichen Werten von v hat der Wert $v = f'(t)$ die ausgezeichnete Eigenschaft, daß für ein sehr kleines τ die Entfernung $P_1 P'$ kleiner wird als für alle anderen Werte von v. Eine solche gleichförmige Bewegung ist also während einer sehr kurzen auf den Augenblick t folgenden Zeit von der wirklichen, ungleichförmigen Bewegung weniger verschieden als jede andere gleichförmige Bewegung. Ihre Geschwindigkeit v ist die Derivierte der Wegstrecke nach der Zeit und wird die Geschwindigkeit der ungleichförmigen Bewegung zur Zeit t genannt und geschrieben

$$v = \dot{s}, \tag{2}$$

indem der übergesetzte Punkt die Differentiation nach der Zeit bezeichnet.

Einheit der Geschwindigkeit ist die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung, bei welcher der bewegliche Punkt in der Sekunde ein Zentimeter durchläuft. Sie ist eine abgeleitete Einheit, die wie die erste Potenz der Entfernung und die umgekehrte erste Potenz der Zeit variiert, was symbolisch durch die Dimensionenbezeichnung

$$[l, t^{-1}]$$

ausgedrückt wird.

Nimmt in einem bestimmten Zeitintervalle s mit der Zeit zu, so ist v positiv und die Bewegung eine fortschreitende; im entgegengesetzten Falle heißt sie rückläufig. Ist in jedem

Augenblicke v als Funktion von t gegeben, so findet man durch Integration

$$s = a + \int_0^t v dt.$$

Die Wegstrecke ist bis auf eine Konstante a, welche die Anfangslage des Punktes angibt, bestimmt.

Wir betrachten noch eine zweite besondere Bewegungsart. Diese sei durch die Gleichung definiert

$$s = a + bt + \tfrac{1}{2}ct^2, \tag{1b}$$

in der a, b, c Konstanten bedeuten. Dann wird die Gleichung (2)

$$v = b + ct. \tag{2b}$$

Man erkennt also: a ist die Anfangsabszisse, b die Anfangsgeschwindigkeit, c die Größe, um die sich die Geschwindigkeit in einer Sekunde ändert. In gleichen Zeiten ändert sich die Geschwindigkeit um gleiche Beträge.

Die Bewegung ist beschleunigt, wenn $c > 0$, verzögert, wenn $c < 0$. Allgemein nennt man die durch die Gleichung (1b) definierte Bewegung eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung und c die Beschleunigung.

Um die allgemeine Bewegung mit einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung zu vergleichen, bildet man, indem man $f(t)$ zweimal differenzierbar voraussetzt,

$$PP' = f(t + \tau) - f(t) = \tau f'(t) + \tfrac{1}{2}\tau^2 f''(t) + \tau^3 \varepsilon',$$

und läßt von P wieder zur Zeit t einen zweiten beweglichen Punkt mit der Anfangsgeschwindigkeit v ausgehen, der sich mit der gleichbleibenden Beschleunigung c bewegt und zur Zeit $t + \tau$ die Strecke

$$PP_1 = v\tau + \tfrac{1}{2}c\tau^2$$

durchlaufen hat. Dann wird

$$P_1P' = \tau[f'(t) - v] + \tfrac{1}{2}\tau^2[f''(t) - c] + \tau^3 \varepsilon'$$

und man erkennt wie vorhin, daß, wenn man $v = f'(t)$, $c = f''(t)$ macht, die Entfernung P_1P' zwischen den beiden beweglichen Punkten nach einer sehr kurzen Zeit τ kleiner wird als für

jede andere gleichförmig beschleunigte Bewegung. Das so gefundene c heißt die Beschleunigung der allgemeinen Bewegung, wir definieren also: Bei einer allgemeinen geradlinigen Bewegung ist die Beschleunigung die zweite Derivierte der Wegstrecke oder die erste Derivierte der Geschwindigkeit nach der Zeit. Wir bezeichnen sie allgemein mit w, haben also

$$w = \ddot{s} = \dot{v}. \tag{3}$$

Einheit der Beschleunigung ist die Beschleunigung derjenigen gleichförmig beschleunigten Bewegung, bei der die Geschwindigkeit in einer Sekunde um einen Zentimeter pro Sekunde zunimmt. Sie ist eine abgeleitete Einheit, deren Dimensionen

$$[l, t^{-2}]$$

sind. Ist die Beschleunigung w als Funktion der Zeit bekannt, so ergibt sich aus (3)

$$v = b + \int_0^t w\,dt = b + W(t),$$

$$s = a + bt + \int_0^t W(t)\,dt;$$

die Bewegung ist also festgelegt bis auf eine hinzukommende gleichförmige Bewegung, die durch die Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit bestimmt wird.

Ebenso wie wir die erste und zweite Derivierte der Wegstrecke nach der Zeit gebildet haben, läßt sich auch die dritte, vierte, ... Derivierte in Betracht ziehen. Diese werden als die höheren Beschleunigungen bezeichnet, haben aber nur mathematisches und kein praktisches Interesse.

Dagegen haben diskontinuierliche Änderungen der Geschwindigkeiten eine gewisse reale Bedeutung, sie treten in der Lehre vom Stoße auf.[1])

---

1) Der in diesem Paragraphen verfolgte Ideengang beruht wesentlich auf Lagranges Théorie des fonctions analytiques, Paris 1813, p. 312 ff; Œuvres, tome 9, p. 337 ff.

3. Geschwindigkeit und Beschleunigung bei krummliniger Bewegung. Wir setzen nun voraus, daß die Bahn eines beweglichen Punktes gekrümmt sei. Die Lage des Punktes P ist eine kontinuierliche Funktion der Zeit, $P(t)$, die wir als zweimal differenzierbar voraussetzen.

Die erste und zweite, nach der Zeit genommene Derivierte des Punktes P oder des Vektors $P - O$, der von einem festen Punkte O nach P hinläuft, heißen die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des beweglichen Punktes. Geschwindigkeit und Beschleunigung sind also hier Vektoren.

Der Punkt O ist zu dem festen Punktsystem zu rechnen, auf das sich die Bewegung bezieht. Wir legen drei durch O gehende, zueinander senkrechte Achsen fest, die ebenfalls eine unveränderliche Lage gegen das feste Punktsystem beibehalten. Dann können wir setzen

$$P - O = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3, \tag{4}$$

indem x, y, z die Komponenten des Radiusvektors nach den drei Achsen bezeichnen, und finden für den Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor sofort

$$\left.\begin{aligned} \dot{P} &= \dot{x}\boldsymbol{e}_1 + \dot{y}\boldsymbol{e}_2 + \dot{z}\boldsymbol{e}_3, \\ \ddot{P} &= \ddot{x}\boldsymbol{e}_1 + \ddot{y}\boldsymbol{e}_2 + \ddot{z}\boldsymbol{e}_3, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

die Komponenten der Geschwindigkeit und der Beschleunigung sind die ersten und zweiten Derivierten der Koordinaten des beweglichen Punktes nach der Zeit.

Nennen wir v die Größe der Geschwindigkeit, so ergibt sich

$$v = \operatorname{mod} \dot{P} = \dot{s}, \tag{6}$$

wenn s die von einem beliebigen Anfangspunkte gerechnete Bogenlänge der Bahnkurve bezeichnet: die Größe der Geschwindigkeit ist die Derivierte der Weglänge nach der Zeit.

Wir führen jetzt den Tangentenvektor $\boldsymbol{t}$ und Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ im Punkte P der Bahnkurve ein (vgl. Kap. II, § 2) und finden

$$\dot{P} = vt: \tag{7}$$

die Geschwindigkeit hat die Richtung der Bahntangente. Weiter wird, da $n = \varrho dt/ds$,

$$\dot{t} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{v}{\varrho} n$$

und somit, da $\ddot{P} = \dot{v}t + v\dot{t}$ ist,

$$\ddot{P} = \dot{v}t + \frac{v^2}{\varrho} n: \tag{8}$$

die Beschleunigung ist in der Schmiegungsebene der Bahnkurve enthalten, ihre Komponente nach der Bahntangente (Tangentialbeschleunigung) ist die Derivierte der Geschwindigkeitsgröße v nach der Zeit, ihre Komponente nach der Bahnnormale (Normalbeschleunigung) ist gleich v^2/ϱ.

Die Tangentialbeschleunigung hat mit t gleichen oder entgegengesetzten Sinn, jenachdem v zu- oder abnimmt; wenn sie verschwindet, ist die Bewegung gleichförmig, d. h. v konstant. Die Normalbeschleunigung dagegen hat immer denselben Sinn wie n, sie ist also stets auf das Krümmungszentrum zu gerichtet; wenn sie verschwindet, ist $\varrho = \infty$, also die Bewegung geradlinig.

Wir verlegen den Geschwindigkeitsvektor an den Koordinatenursprung, setzen also

$$\dot{P} = V - O, \tag{9}$$

dann ist V eine Funktion der Zeit, und die Bahn dieses Punktes V heißt der Hodograph der Bewegung von P für den Pol O.[1]) Da

$$\ddot{P} = \dot{V}$$

wird, ist die Geschwindigkeit der Bewegung auf dem

1) Die Entdeckung des Hodographen verdankt man Encke, seine allgemeine Darstellung Moebius (Die Elemente der Mechanik des Himmels, 1843, Ges. Werke Bd. 4, S. 47), seine ausführliche Theorie W. R. Hamilton, zuerst Transactions of the R. Irish Academy, Dublin, vol. 3 (1846) und darauf Elements of Quaternions, London 1866, p. 100 und 718.

Hodographen die Beschleunigung der ursprünglichen Bewegung.

Bewegt sich P in einer Ebene oder auf einer Kugel, so liegt auch der Hodograph in einer Ebene oder auf einer Kugel.

Als ein Beispiel wollen wir die Bewegung behandeln, deren hodographische Bewegung geradlinig und gleichförmig ist. Es wird dann, wenn b einen in die gerade Linie fallenden Einheitsvektor bezeichnet,

$$\dot{V} = \beta b.$$

Hieraus folgt durch Integration, wenn a einen beliebigen neuen Einheitsvektor bezeichnet,

$$\dot{P} = V - O = v_0 a + \beta t b,$$

und durch erneute Integration finden wir

$$P = P_0 + v_0 t a + \tfrac{1}{2}\beta t^2 b.$$

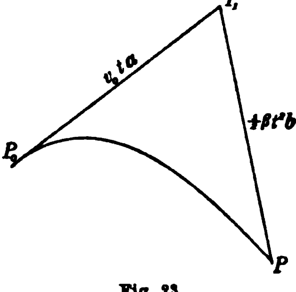


Fig. 23.

Die Bahn ist eine ebene Kurve, die der durch die Vektoren a und b und den Punkt P_0 bestimmten Ebene angehört, und zwar ist sie eine Parabel, deren Durchmesser dem geradlinigen Hodographen parallel sind.

4. Polarkoordinaten für eine ebene Bewegung. Bewegt sich P in einer Ebene, so können wir bei Benutzung eines festen Einheitsvektors a setzen

$$P - O = r e^{i\varphi} a, \tag{10}$$

r, φ sind dann die Polarkoordinaten von P.

Wir setzen nun weiter

$$\boldsymbol{r} = e^{i\varphi} a, \quad m = e^{i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} a = i e^{i\varphi} a = i\boldsymbol{r},$$

dann ist $r\boldsymbol{r}$ der Radiusvektor $P - O$ des Punktes O, m ein dazu senkrechter Einheitsvektor, und durch Differentiation von (10) ergibt sich

$$\dot{P} = \dot{r} e^{i\varphi} a + r\dot{\varphi} i e^{i\varphi} a = \dot{r}\boldsymbol{r} + r\dot{\varphi} m,$$

und, da $\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\varphi} i e^{i\varphi} a = \dot{\varphi} m$, $\dot{m} = -\dot{\varphi} e^{i\varphi} a = -\dot{\varphi}\boldsymbol{r}$ wird, ist weiter

$$\ddot{P} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{r} + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) m.$$

Also sind die Komponenten der Geschwindigkeit und der Beschleunigung nach dem Radiusvektor und einer Normalen dazu die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} v_r &= \dot{r}, \quad v_m = r\dot{\varphi}, \\ w_r &= \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad w_m = \frac{1}{r}\frac{d(r^2\dot{\varphi})}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Setzen wir

$$\Phi = \tfrac{1}{2}v^2 = \tfrac{1}{2}(v_r^2 + v_m^2) = \tfrac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2),$$

so lassen sich die folgenden Gleichungen sofort durch Ausrechnung bestätigen:

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{r}}, \quad r v_m = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}},$$

$$w_r = \frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad r w_m = \frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}.$$

Ist r als Funktion von φ gegeben und derart die Bahnkurve bestimmt, so folgt aus

$$r = F(\varphi)$$

sofort

$$v_r = F'(\varphi)\cdot\dot{\varphi}, \quad v_m = F(\varphi)\cdot\dot{\varphi},$$

und wenn man mit θ den Winkel bezeichnet, den die Tangente mit dem Radiusvektor bildet, so wird

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{v_r}{v_m} = \frac{F'(\varphi)}{F(\varphi)} = \frac{d\log F(\varphi)}{d\varphi}.$$

Daraus folgt insbesondere, wenn θ konstant und $\operatorname{ctg}\theta = m$ ist,

$$r = F(\varphi) = a\cdot e^{m\varphi}$$

wobei a eine Integrationskonstante bezeichnet. Die so dargestellte Kurve ist eine logarithmische Spirale.

Wird die Gleichung der Bahnkurve in bipolaren Koordinaten gegeben, d. h. in der Form

$$f(r, r_1) = 0,$$

wobei r, r_1 die Abstände des beweglichen Punktes P von zwei festen Punkten O, O_1 bezeichnen, so ergibt sich durch Differentiation nach der Zeit

$$\frac{\partial f}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial f}{\partial r_1}\dot{r}_1 = 0$$

und somit

$$v_r : v_{r_1} = \dot{r} : \dot{r}_1 = -\frac{\partial f}{\partial r_1} : \frac{\partial f}{\partial r}.$$

Für jeden Punkt der Kurve ist so das Verhältnis der orthogonalen Projektionen der Geschwindigkeit auf die Radienvektoren bekannt, daraus ist die Richtung der Bewegung und demnach auch die Richtung der Tangente sofort zu finden. Bezeichnen wir die Winkel, welche die Kurvennormale in P mit den Radienvektoren OP und O_1P bildet, mit α und α_1, so wird

$$\sin\alpha : \sin\alpha_1 = \frac{\partial f}{\partial r} : \frac{\partial f}{\partial r_1}.$$

Tragen wir also von P aus auf den beiden Radienvektoren die zwei Strecken ab, die zu $\frac{\partial f}{\partial r}$ und $\frac{\partial f}{\partial r_1}$ proportional sind, und vervollständigen sie zu einem Parallelogramm, so liefert die von P ausgehende Diagonale dieses Parallelogramms die Kurvennormale.[1])

Im Falle eines Mittelpunktskegelschnittes wird

$$f(r, r_1) = r \pm r_1,$$

also

$$\sin\alpha : \sin\alpha_1 = \pm 1 \quad \text{und} \quad v_r : v_{r_1} = \mp 1,$$

jenachdem es sich um eine Ellipse oder Hyperbel handelt; daraus ergibt sich, daß die Tangente bei der Hyperbel den Winkel OPO_1, bei der Ellipse den Nebenwinkel halbiert.

---

1) Die auseinandergesetzte Methode, die auf der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten beruht, ist eine der ersten im 17. Jahrhundert ersonnenen Methoden zur Tangentenkonstruktion, sie stammt von Roberval und wurde dargestellt in der Arbeit von Du Verdus, Observations sur la composition des mouvements, Anciens Mémoires de l'Académie des Sciences, t. 6 (1730). Zu beachten ist der Fehler, den Roberval und andere machten, indem sie im Falle der bipolaren Koordinaten immer über v_r und v_{r_1} ein Parallelogramm konstruierten, was im allgemeinen nur dann richtig ist, wenn die Geschwindigkeiten gleich sind oder einen rechten Winkel bilden. Man vgl. die Arbeit von Duhamel, Sur la méthode des tangentes de Roberval, Mémoires des savants étrangers, t. 5 (1834). Die angegebene einfache Regel für die Normale stammt von Poinsot, Journal de l'École polytechnique, cah. 13 (1806), p. 206.

5. Zentralbewegung. Zentralbewegung heißt eine Bewegung, bei der die Beschleunigung nach einem festen Punkte O hin gerichtet ist. Da dann $\ddot{P}$ zu $P - O$ parallel ist, wird

$$(P - O) \wedge \ddot{P} = 0,$$

und hieraus ergibt sich durch Integration

$$(P - O) \wedge \dot{P} = \boldsymbol{g}, \tag{12}$$

wenn $\boldsymbol{g}$ einen konstanten Vektor bezeichnet. Hieraus folgt erstens, daß P in einer Ebene liegt, die durch O senkrecht zu $\boldsymbol{g}$ gelegt wird, daß also die Bahnkurve eben ist, und zweitens ergibt sich, daß das von den Punkten $O, P, P + \dot{P}$ gebildete Dreieck konstanten Inhalt hat. Das Doppelte dieses Inhaltes wollen wir mit c bezeichnen, dann finden wir für den Inhalt dS des unendlich schmalen Dreiecks, das die unendlich benachbarten Radienvektoren $P - O$ und $P + dP - O$ einschließen, den Wert

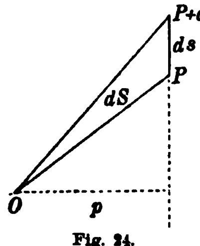


Fig. 24.

$$dS = \tfrac{1}{2} c\, dt$$

und hieraus durch Integration von $t = 0$ bis t

$$S = \tfrac{1}{2} ct: \tag{13}$$

die Fläche, welche der Radiusvektor, von der Anfangslage ausgehend, durchstreicht, wächst proportional mit der Zeit.

Nennen wir noch p den Abstand der Bahntangente in P von dem Zentrum O, ds das Bogenelement, so wird

$$2\,dS = p\,ds = c\,dt,$$

woraus

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{c}{p}:$$

die Größe der Geschwindigkeit ist dem Abstand der Bahntangente vom Zentrum umgekehrt proportional. Ferner schreitet die Bewegung immer in demselben Sinne fort, dieser ist durch die Richtung des Vektors $\boldsymbol{g}$, für die er einen positiven Drehungssinn bedeuten muß, bestimmt.

In Polarkoordinaten wird der Ausdruck für dS

$$dS = \tfrac{1}{2} r^2 d\varphi,$$

somit ergibt sich auch

$$r^2\dot{\varphi} = c, \tag{14}$$

also wird nach (11) $v_m = \frac{c}{r}$. Beachten wir ferner, daß $w_m = 0$ wird, so finden wir aus (11) sofort

$$\ddot{P} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{r}.$$

Sehen wir nun r als Funktion von φ an, so wird

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{c}{r^2} = -c\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}$$

und

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi}\cdot\frac{c}{r^2} = -\frac{c^2}{r^2}\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\varphi^2},$$

also ergibt sich schließlich

$$\ddot{P} = -\frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\varphi^2}\right)\boldsymbol{r}. \tag{15}$$

Nach dieser Gleichung läßt sich, wenn die Bahnkurve, also r als Funktion von φ bekannt ist, die Größe der Beschleunigung durch gewöhnliches Differenzieren finden; umgekehrt stellt sie, wenn die Beschleunigung von r und φ gegeben ist, eine Differentialgleichung zur Bestimmung der Bahnkurve dar.

Sei z. B. die nach O gerichtete Beschleunigung dem Quadrate des Abstandes r von diesem Punkte umgekehrt proportional. Dann ergibt sich

$$\ddot{P} = -\frac{a^2}{r^3}(P - O).$$

Multiplizieren wir diese Vektorgleichung vektoriell mit der Vektorgleichung (12), so ergibt sich

$$\ddot{P} \wedge g = -\frac{a^2}{r^3}(P - O) \wedge [(P - O) \wedge \dot{P}]$$

und dies wird nach Gleichung (20) in Kap. I, da $(P - O)^2 = r^2$, also $(P - O) \times \dot{P} = r\dot{r}$ ist,

$$\ddot{P} \wedge g = \frac{a^2}{r^3}[r^2\dot{P} - r\dot{r}(P - O)] = a^2\frac{d}{dt}\frac{P - O}{r}.$$

Hieraus folgt durch Integration, wenn $\varepsilon \boldsymbol{h}$ einen konstanten Vektor bedeutet

$$\frac{\dot{P} \wedge g}{a^2} = \frac{P - O}{r} + \varepsilon \boldsymbol{h}. \tag{16}$$

Multiplizieren wir diese Gleichung skalar mit $P - O$, so ergibt sich links nach (12)

$$\frac{\dot{P} \wedge g \times (P - O)}{a^2} = \frac{g \times (P - O) \wedge \dot{P}}{a^2} = \frac{g^2}{a^2} = \gamma^2$$

und rechts, da $(P - O) \times (P - O) = r^2$,

$$r + \varepsilon \boldsymbol{h} \times (P - O) = r[1 + \varepsilon \cos \varphi],$$

wenn wir mit φ den Winkel zwischen dem Radiusvektor und dem festen Vektor $\boldsymbol{h}$ bezeichnen. Somit wird

$$r = \frac{\gamma^2}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \tag{17}$$

dies aber ist die Gleichung eines Kegelschnittes, von dem O ein Brennpunkt ist.

Multiplizieren wir die Gleichung (16) vektoriell mit g, so erhalten wir

$$\frac{g \wedge (\dot{P} \wedge g)}{a^2} = \frac{g \wedge (P - O)}{r} + \varepsilon g \wedge \boldsymbol{h};$$

die linke Seite dieser Gleichung wird nach (20) in Kap. I

$$= \frac{g^2}{a^2} \dot{P} - \frac{g \times \dot{P}}{a^2} g = \frac{g^2}{a^2} \dot{P} = \gamma^2 \dot{P},$$

denn es folgt aus (12) $g \times \dot{P} = 0$. Führen wir nun die Hodographenbewegung ein, setzen also $\dot{P} = V - O$, und machen gleichzeitig $\varepsilon g \wedge \boldsymbol{h} = \gamma^2 (V_0 - O)$, so ergibt sich

$$\gamma^2 (V - V_0) = \frac{g \wedge (P - O)}{r}.$$

Es ist aber wegen (12) der Vektor $P - O$ senkrecht zu g, die rechte Seite der vorstehenden Gleichung stellt also einen Vektor dar, der in die Ebene der Bahnkurve fällt und dessen Modul gleich dem Modul von g, also gleich γa wird. Somit wird

$$\operatorname{mod}(V - V_0) = \frac{a}{\gamma},$$

d. h. der Hodograph ist ein Kreis mit dem Radius a/γ.

Hieraus läßt sich aufs neue ableiten, daß die Bahnkurve ein Kegelschnitt ist. Es sei OM das aus O auf die Bahntangente in P gefällte Lot, V der dem Punkte P entsprechende Punkt des Hodographen. Dann ist $OM = p$, $OV = v$ und $OM \perp OV$; da aber $pv =$ konst., ist der Ort von M die inverse Figur des Hodographen, um 90^0 gedreht, also ein Kreis. Dann aber ist die Bahnkurve als die Einhüllende des einen Schenkels eines rechten Winkels, dessen Scheitel M einen Kreis beschreibt und dessen anderer Schenkel durch einen festen Punkt O geht, ein Kegelschnitt, der O zum Brennpunkt hat.

In dem besonderen Falle, wo $V_0 = O$, ist die Größe v der Geschwindigkeit konstant, es wird $\boldsymbol{h} \wedge \boldsymbol{g} = 0$, also mit $\boldsymbol{g} \times (P - O) = 0$ auch $\boldsymbol{h} \times (P - O) = 0$, d. h. die Bahnkurve hat die Gleichung $r = \gamma^2$, ist also ein Kreis. Dann liefert die Gleichung (15)

$$\ddot{P} = -\frac{c^2}{r^3}\boldsymbol{r},$$

es wird somit auch die Größe der Beschleunigung konstant, und führt man wieder

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2} = \omega$$

ein, so wird

$$\ddot{P} = -r\omega^2\boldsymbol{r} = -\frac{v^2}{r}\boldsymbol{r},$$

wie es, da hier $\varrho = r$ ist und $\dot{v} = 0$, auch aus (8) hervorgeht.

Übungsbeispiele.

1. Aufgabe. *Die Zentralbewegung zu untersuchen, bei der die Beschleunigung dem Radiusvektor proportional ist.*

Auflösung. Es wird dann, wenn O das feste Zentrum, P der bewegliche Punkt ist,

$$\ddot{P} = -\alpha^2(P - O),$$

wobei α eine reelle Konstante bedeutet. Die Integration liefert, wie sich durch doppelte Differentiation leicht rückwärts bestätigen läßt,

$$P - O = a\cos\alpha t\,\boldsymbol{p} + b\sin\alpha t\,\boldsymbol{q},$$

wenn wir mit $a\boldsymbol{p}$ und $b\boldsymbol{q}$ zwei konstante Vektoren mit den Moduln a und b bezeichnen. Die Bahnkurve ist eine Ellipse, deren Mittel-

punkt O ist und von der die Vektoren ap und bq zwei konjugierte Halbmesser bilden.

2. Aufgabe. *Unter der Projektion einer krummlinigen Bewegung auf eine Gerade versteht man die geradlinige Bewegung, welche der Fußpunkt P des aus dem beweglichen Punkte P' auf die Gerade gefällten Lotes ausführt. Man soll insbesondere die Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung untersuchen.* (Thomson u. Tait, *A Treatise on Natural Philosophy*, 2. ed. Cambridge 1896[1]), vol. 1, p. 40).

Auflösung. Wir legen die Gerade, auf die wir projizieren, durch den Mittelpunkt O des Kreises und wählen sie zur x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Sind dann x, y die Koordinaten eines Kreispunktes P, a der Radius des Kreises, so wird

$$x = a\cos\varphi,\quad y = a\sin\varphi,\quad \varphi = \omega t - \varepsilon.$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω können wir auch in die Form bringen

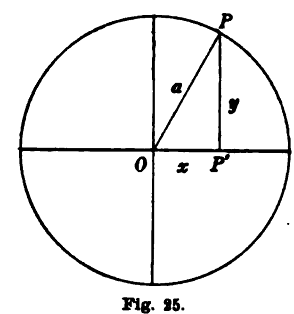


Fig. 25.

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

wenn T die Periode der Bewegung, d. h. die Zeitdauer eines Umlaufes des beweglichen Punktes ist. So erhalten wir sofort die Darstellung der projizierten Bewegung in der Form

$$x = a\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \varepsilon\right).$$

Diese Bewegung heißt eine harmonische, a ihre Amplitude, T ihre Periode, ε ihre Phase. Der Punkt $x = 0$ ist der Schwingungsmittelpunkt.

Die Beschleunigung in der projizierten Bewegung ist die Projektion der Beschleunigung bei der Kreisbewegung. Diese Beschleunigung aber ist konstant gleich $\omega^2 a$ und nach dem Zentrum O gerichtet. Also wird die Beschleunigung in der projizierten Bewegung dem Abstande des bewegten Punktes von dem Schwingungsmittelpunkte proportional und nach diesem hin gerichtet. Ist $k^2 (= \omega^2)$ der Proportionalitätsfaktor, so wird die Periode der Schwingung $T = 2\pi : k$.

3. Aufgabe. *Die Resultierende zweier harmonischen Bewegungen von gleicher Periode auf derselben Geraden zu finden.*

Auflösung. Wenn zwei Teilbewegungen auf derselben Geraden zusammengesetzt werden sollen, so ist ein Punkt O der Geraden als die Ruhelage auszuzeichnen und die Teilbewegungen sind

1) Im folgenden einfach als Thomson und Tait zitiert.

als zwei verschiedene Ausweichungen aus dieser Ruhelage aufzufassen. Die resultierende Ausweichung ist dann einfach die Summe der beiden zusammenzusetzenden Ausweichungen. So finden wir hier für die resultierende Ausweichung einen Ausdruck von der Form

$$a \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \varepsilon\right) + a' \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \varepsilon'\right).$$

Setzen wir darin

$$a \cos \varepsilon + a' \cos \varepsilon' = r \cos \theta, \quad a \sin \varepsilon + a' \sin \varepsilon' = r \sin \theta,$$

also

$$a e^{i\varepsilon} + a' e^{i\varepsilon'} = r e^{i\theta}, \quad r^2 = a^2 + a'^2 + 2aa' \cos(\varepsilon - \varepsilon'),$$

so geht er über in

$$r \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \theta\right).$$

Die resultierende Bewegung ist also wieder eine harmonische. Legt man die Amplituden a, a' so als Strecken hin, daß sie mit der Geraden, auf der die Bewegung stattfindet, die Phasenwinkel ε und ε' einschließen, so schließt die Diagonale des durch sie bestimmten Parallelogramms mit der Geraden den resultierenden Phasenwinkel θ ein und gibt durch ihre Länge die resultierende Amplitude an.

4. Aufgabe. *Zwei harmonische Bewegungen in zwei zueinander senkrechten Geraden, deren Perioden sich wie 2 : 1 verhalten, zu einer resultierenden Bewegung zu vereinigen.*

Auflösung. Die beiden Geraden seien zu Koordinatenachsen gewählt, der Koordinatenursprung bedeute wieder die gemeinsame Ruhelage der beiden Bewegungen. Dann wird die Lage des Punktes P bei der resultierenden Bewegung durch die Koordinaten bestimmt

$$x = a \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \varepsilon\right), \quad y = b \cos\left(\frac{\pi t}{T} - \eta\right),$$

es wird also, wenn

$$\frac{\pi t}{T} - \eta = \varphi, \quad \varepsilon - 2\eta = \alpha$$

gesetzt wird,

$$x = a \cos(2\varphi - \alpha), \quad y = b \cos \varphi.$$

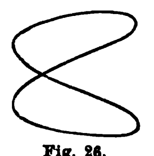


Fig. 26.

Hieraus folgt durch Elimination von φ die Gleichung der Bahnkurve von P (Fig. 26)

$$x = a\left[\left(\frac{2y^2}{b^2} - 1\right) \cos \alpha + \frac{2y}{b}\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \sin \alpha\right].$$

Für $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$ ergibt sich insbesondere

$$y^2 = \frac{b^2}{2a}(a \pm x),$$

also eine Parabel, von der aber nur das Stück in Betracht kommt, das in dem durch die Bedingungen $-a \leqq x \leqq +a$, $-b \leqq y \leqq +b$ bestimmten Rechteck liegt (Fig. 27).

Fig. 27.

Die allgemeine Kurve ist von der vierten Ordnung und symmetrisch bezüglich der x-Achse. Sie wird auch bezüglich der y-Achse symmetrisch für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ (Fig. 28), dann lautet ihre Gleichung

$$b^4 x^2 = 4a^2 y^2 (b^2 - y^2).$$

Fig. 28.

5. Aufgabe. *Ein Punkt durchläuft eine Schraubenlinie in gleichförmiger Bewegung; die Beschleunigung und den Krümmungsradius zu bestimmen.*

Auflösung. Wir legen von den fundamentalen Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 den letzten e_3 in die Achse des Zylinders, auf dem die Schraubenlinie liegt, und setzen $e_2 = ie_1$, dann wird die Gleichung der Schraubenlinie von der Form

$$P = O + ae^{i\varphi} e_1 + am\varphi e_3.$$

Daraus folgt

$$\dot{P} = a(e^{i\varphi} ie_1 + me_3)\dot{\varphi}$$

und somit für die konstante Größe v der Geschwindigkeit

$$v^2 = \dot{P}^2 = a^2(1 + m^2)\dot{\varphi}^2,$$

also ist $\dot{\varphi}$ konstant, φ eine lineare Funktion der Zeit. Die Beschleunigung reduziert sich auf die Normalkomponente und wird, da $\ddot{\varphi} = 0$,

$$\ddot{P} = -ae^{i\varphi}\dot{\varphi}^2 e_1,$$

ist also senkrecht zur Zylinderachse und von der Größe

$$a\dot{\varphi}^2 = \frac{v^2}{a(1 + m^2)}.$$

Da sie andererseits gleich $\frac{v^2}{\varrho}$ sein muß, ergibt sich

$$\varrho = a(1 + m^2).$$

6. Aufgabe. *Ein Punkt Q bewegt sich auf einer Geraden x mit konstanter Geschwindigkeit u, ein anderer Punkt P bewegt sich in einer die Gerade x enthaltenden Ebene mit einer Geschwindigkeit von der konstanten Größe v, die immer nach Q hin gerichtet ist. Gesucht wird die Bahn von P (Verfolgungskurve).*

Auflösung. Wir bezeichnen mit O den Punkt der Geraden x, in welchem die Geschwindigkeit von P senkrechtzu x ist, und mit A die zugehörige Lage von P. Durch O als Ursprung und die Gerade x als x-Achse legen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem fest und haben dann, wenn wir annehmen, daß für die Lage A $t = 0$ ist,

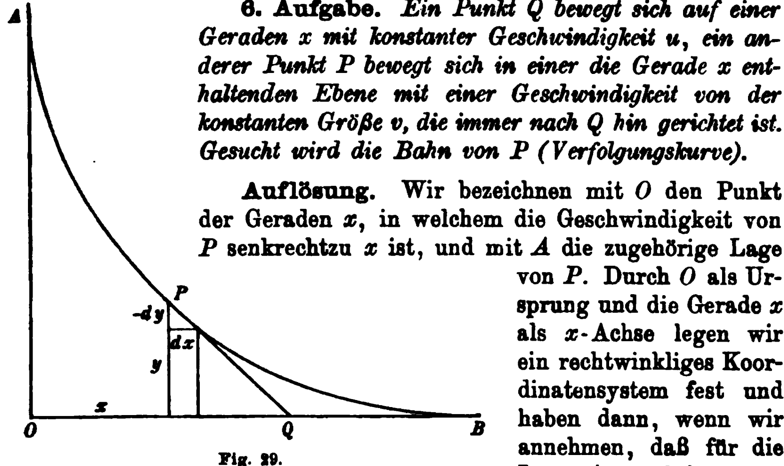


Fig. 29.

$$OQ = ut, \quad AP = s = vt, \quad \text{also} \quad OQ = \frac{u}{v} s.$$

Andererseits wird nach den Bedingungen der Aufgabe

$$OQ = x - y \frac{dx}{dy}.$$

Differenzieren wir die so entstehende Gleichung nach y, so ergibt sich, da $\frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$, wenn wir diesen Wert $= z$ setzen,

$$\frac{u}{v} z = - y \frac{d^2 x}{dy^2}$$

und, da

$$z \frac{dz}{dy} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{d^2 x}{dy^2} = \sqrt{z^2 - 1} \cdot \frac{d^2 x}{dy^2},$$

finden wir

$$- \frac{u}{v} \cdot \frac{dy}{y} = \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}}.$$

Setzen wir dann $z = \mathfrak{Cof}\, w = \frac{1}{2}(e^w + e^{-w})$, so wird die rechte Seite der vorstehenden Gleichung $= dw$ und es folgt durch Integration

$$\frac{u}{v} (\log y_0 - \log y) = \frac{u}{v} \log \frac{y_0}{y} = w,$$

also

$$z = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y_0}{y}\right)^{\frac{u}{v}} + \left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{u}{v}} \right]$$

und

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y_0}{y}\right)^{\frac{u}{v}} - \left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{u}{v}}\right],$$

welche Gleichung sich sofort integrieren läßt. Es ergibt sich, wenn wir $v > u$ voraussetzen,

$$x = \frac{uv}{v^2 - u^2} y_0 - \frac{v}{2}\left[\frac{1}{v-u}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{v-u}{v}} - \frac{1}{v+u}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{v+u}{v}}\right] y_0.$$

Hierbei ist die voranstehende Integrationskonstante durch die Bedingung bestimmt worden, daß für $x = 0$ $y = y_0$ wird. Für den Weg von P ergibt sich

$$s = \frac{v^2}{v^2 - u^2} y_0 - \frac{v}{2}\left[\frac{1}{v-u}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{v-u}{v}} + \frac{1}{v+u}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{v+u}{v}}\right] y_0.$$

Wir sehen nun, daß $y = 0$ wird für $x_1 = \frac{uv}{v^2 - u^2} y_0$; dann wird $s_1 = \frac{v^2}{v^2 - u^2} y_0$, mithin die zugehörige Zeit $t_1 = \frac{v}{v^2 - u^2} y_0$ und demnach $x_1 = ut_1$, der Verfolger hat also den Verfolgten eingeholt, und die Verfolgungskurve trifft an dieser Stelle auf die x-Achse sie berührend auf. Vgl. Loria, Spezielle ebene Kurven, Abschn. VII, Kap. 2.

7. **Aufgabe.** *Die Lage eines Punktes P im Raume sei auf ein System von Polarkoordinaten bezogen, in dem r den Radiusvektor, λ die geographische Länge und φ die geographische Breite bezeichnet. Die Komponenten der Geschwindigkeit nach dem Radiusvektor und nach den Tangenten an den Meridian und den Parallelkreis zu finden.*

Auflösung. Wir bezeichnen mit e_1, e_2, e_3 die drei Grundvektoren, mit O den Ursprung, so wird

$$P - O = r \cos\lambda \cos\varphi e_1 + r \sin\lambda \cos\varphi e_2 + r \sin\varphi e_3.$$

Differenzieren wir dies nach der Zeit, so ergibt sich ein Ausdruck von der Form

$$\dot{P} = \dot{r} \cdot e_1' + r\dot{\varphi} \cdot e_2' + r\dot{\lambda} \cos\varphi \cdot e_3';$$

e_1', e_2', e_3' sind dann drei neue, zueinander senkrechte Einheitsvektoren, die der Reihe nach in den Radiusvektor, die Tangente des Meridians und die Tangente des Breitenparallels fallen, und es wird bei der Differentiation

$$e_1' = \cos\lambda \cos\varphi \cdot e_1 + \sin\lambda \cos\varphi \cdot e_2 + \sin\varphi \cdot e_3,$$
$$e_2' = -\cos\lambda \sin\varphi \cdot e_1 - \sin\lambda \sin\varphi \cdot e_2 + \cos\varphi \cdot e_3,$$
$$e_3' = -\sin\lambda \cdot e_1 + \cos\lambda \cdot e_2.$$

Die Komponenten der Geschwindigkeit nach den Richtungen dieser drei Vektoren sind nach dem Ausdruck für $\dot{P}$

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}, \quad v_\lambda = r\dot{\lambda}\cos\varphi.$$

Um die Komponenten der Beschleunigung zu finden, differenziere man den Ausdruck für $\dot{P}$ und beachte dabei, daß

$$\dot{e}_1' = \dot{\lambda}\cos\varphi\, e_3' + \dot{\varphi} e_2', \qquad \dot{e}_2' = \dot{\lambda}\sin\varphi\, e_3' - \dot{\varphi} e_1',$$

$$\dot{e}_3' = -\dot{\lambda}(\cos\varphi\, e_1' - \sin\varphi\, e_2')$$

wird. Dann erhält man für die gesuchten Komponenten die Ausdrücke

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\dot{\lambda}^2\cos\varphi,$$

$$w_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d(r^2\dot{\varphi})}{dt} - r\cos\varphi\sin\varphi\,\dot{\lambda}^2,$$

$$w_\lambda = \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{d(r^2\cos\varphi^2\dot{\lambda})}{dt}.$$

Setzt man

$$\Phi = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\lambda}^2\cos^2\varphi),$$

so kann man schreiben

$$w_r = \frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{r}} - \frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad rw_\varphi = \frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}, \quad r\cos\varphi\, w_\lambda = \frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{\lambda}} - \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}.$$

8. Aufgabe. *Ein Punkt bewegt sich auf einer Kugel so, daß* $v_\varphi : v_\lambda = c$ *ist. Die Bahnkurve zu bestimmen.*

Auflösung. Es ergibt sich nach den Ausdrücken in der vorigen Aufgabe

$$\frac{d\varphi}{\cos\varphi\, d\lambda} = c$$

oder

$$d\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = c\,d\lambda,$$

mithin

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = ae^{c\lambda}.$$

Dies ist die Gleichung einer Loxodrome, nämlich der Bahn eines Schiffes, das auf der Erdkugel unverändert denselben Kurs steuert. Bildet man die Erdkugel auf einer Ebene ab, indem man für die Koordinaten x, y eines Punktes in dieser Bildebene die Werte nimmt

$$x = \alpha\lambda, \quad y = \alpha\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right),$$

wobei α ein konstanter Faktor ist (Mercatorsche Projektion), so wird das Bild jeder Loxodrome eine gerade Linie.

9. Aufgabe. *Ein Punkt durchläuft eine logarithmische Spirale und seine Beschleunigung ist nach dem Pol dieser Spirale hin gerichtet. Die Größe der Beschleunigung zu finden und die Bewegung zu beschreiben.*

Auflösung. Wir haben hier

$$r = a e^{m\varphi}$$

zu setzen. Dann liefert die Gleichung (15)

$$\ddot{P} = -\frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{m^2}{a} e^{-m\varphi}\right)\mathfrak{r}$$
$$= -\frac{c^2(1+m^2)}{r^3}\mathfrak{r}.$$

Die Größe der Beschleunigung ist also proportional zu der dritten Potenz des Polabstandes r.

Da hier $\dot{r} = m r\dot{\varphi}$ und andererseits nach (14) $r\dot{\varphi} = \frac{c}{r}$ ist, ergibt sich

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = \frac{c^2(1+m^2)}{r^2}$$

und somit

$$\ddot{P} = -\frac{v^2}{r}\mathfrak{r}.$$

Bezeichnet man mit θ den Winkel, den die Tangente mit dem Radiusvektor bildet, so wird die Normalkomponente der Beschleunigung

$$\frac{v^2}{r}\sin\theta$$

und da sie andererseits gleich v^2/ϱ ist, folgt

$$\varrho = r/\sin\theta.$$

Errichtet man also in dem Pol die Normale auf dem Radiusvektor PO, so trifft dieses die Kurvennormale in dem Krümmungsmittelpunkte. Der Radiusvektor dieses Krümmungsmittelpunktes ist sonach

$$r' = r\operatorname{ctg}\theta = r\cdot\frac{dr}{r\,d\varphi} = a m e^{m\varphi};$$

so erhält man die Gleichung der Evolute, die bei einer Drehung des Koordinatensystems um den Pol, indem man

$$\varphi + \frac{\log m}{m} = \varphi'$$

setzt, übergeht in

$$r' = a e^{m\varphi'},$$

woraus ersichtlich wird, daß die Evolute einer der ursprünglichen kongruente logarithmische Spirale ist.

10. Aufgabe. *Die Kurven, deren Polargleichung sich auf die Form bringen läßt*

$$r^k \cos k\theta = a^k,$$

heißen Sinusspiralen. Für $k = 1$ ergibt sich insbesondere eine gerade Linie, für $k = 2$ eine gleichseitige Hyperbel, für $k = -1$ ein Kreis usw. Wir nehmen an, ein Punkt bewege sich auf einer solchen Sinusspirale und seine Beschleunigung falle stets in seine Verbindungslinie mit dem Pol $(r = 0)$. Man soll den Wert der Beschleunigung finden.

Auflösung. Durch Differentiation ergibt sich sofort

$$\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} = -\frac{1}{r}\operatorname{tang} k\theta, \qquad \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} = \frac{1}{r}\left(\operatorname{tang}^2 k\theta - \frac{k}{\cos^2 k\theta}\right),$$

also

$$\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} = \frac{1-k}{r\cos^2 k\theta} = \frac{1-k}{a^{2k}} r^{2k-1}.$$

Multiplizieren wir dies mit $-\frac{c^2}{r^2}$, so ergibt sich für den Wert der Beschleunigung

$$\frac{(k-1)c^2}{a^{2k}} r^{2k-3}.$$

Die Beschleunigung ist also einfach einer Potenz des Radiusvektors proportional und für $k > 1$ von dem Pol weg, für $k < 1$ auf ihn zu gerichtet. Für $k = 1$ wird sie gleich 0: der Punkt bewegt sich gleichförmig auf einer geraden Linie.

11. Aufgabe. *Bei der Bewegung eines Punktes auf einer beliebigen Kurve ist die Beschleunigung der von einer bestimmten Anfangsstelle P_0 gerechneten Bogenlänge s proportional. Die Bewegung zu untersuchen.*

Auflösung. Es ist hier

$$\ddot{s} = ks.$$

Diese Gleichung läßt sich leicht integrieren durch den Ansatz

$$s = Ae^{\alpha t}.$$

Es wird dann $\ddot{s} = A\alpha^2 e^{\alpha t}$, also folgt aus $\ddot{s} = ks$, daß $k = \alpha^2$ wird, und wir erhalten das vollständige Integral

$$s = Ae^{\sqrt{k}t} + Be^{-\sqrt{k}t}.$$

Soll für $t = 0$ der bewegliche Punkt in P_0, also $s = 0$ sein, so ergibt sich, wenn $k > 0$, also $\sqrt{k}$ reell, $A = 0$, und ist die Geschwindigkeit für $t = 0$ gleich v_0, so folgt

$$s = \frac{v_0}{\sqrt{k}} e^{-\sqrt{k}\,t},$$

der Punkt entfernt sich von der Anfangslage mit immer mehr abnehmender Geschwindigkeit. Ist $k < 0$, sagen wir $= -\varkappa^2$, so ist, um ein reelles s zu erhalten, das für $t = 0$ verschwindet,

$$B = -A = -\frac{v_0}{2\varkappa}$$

zu machen und man findet dann

$$s = \frac{v_0}{\varkappa} \sin \varkappa t = \frac{v_0}{\varkappa} \cos \varkappa \left(t + \frac{\pi}{2\varkappa}\right).$$

Die Bewegung ist harmonisch.

12. Aufgabe. *Die Cassinischen Kurven werden in Bipolarkoordinaten durch eine Gleichung $rr_1 = a^2$, die Cartesischen Ovale durch $\alpha r + \beta r_1 = c$ gegeben. Man soll in irgend einem Punkte P dieser Kurven die Tangente konstruieren.*

Auflösung. Für eine Bewegung auf der ersteren Kurve wird

$$v_r : v_{r_1} = -r : r_1.$$

Daraus folgt sofort, daß, wenn man auf den Radienvektoren in ihren Anfangspunkten Lote errichtet, diese auf der Kurventangente, vom Berührungspunkte P aus gerechnet, gleiche Stücke abschneiden. Für die letztere Kurve wird dagegen

$$v_r : v_{r_1} = -\beta : \alpha.$$

Man hat also vom Kurvenpunkte P aus auf dem einen Radiusvektor die Strecke βe und auf der Verlängerung des anderen die Strecke αe (wobei e willkürlich bleibt) abzutragen und die Lote in den Endpunkten der beiden Strecken zu errichten. Diese schneiden sich in einem Punkte der gesuchten Tangente.

13. Aufgabe. *Zu zeigen, daß bei der Zentralbewegung, wenn man das Zentrum zum Pol wählt, die Bahnkurve und der Hodograph polarreziproke Kurven bezüglich eines Kreises werden, dessen Mittelpunkt der Pol ist, wenn man noch um diesen Pol den Hodographen um einen rechten Winkel dreht.*

Auflösung. Sind zwei Kurven in der angegebenen Weise polarreziprok, so müssen die Radienvektoren der einen zu den entsprechenden Tangenten der anderen senkrecht sein und muß, wenn v

die Länge des Radiusvektors, p den Abstand des Poles von der entsprechenden Tangente bezeichnet, eine Relation von der Form

$$pv = \text{konst.}$$

erfüllt sein. Dreht man um 90^0, so geht die Orthogonalität in Parallelität über. Die Radienvektoren des Hodographen sind aber in der Tat den zugehörigen Tangenten der Bahnkurve parallel und zwischen beiden besteht eine Relation von der vorstehenden Form, woraus der zu beweisende Satz sofort folgt.

Es ergibt sich auch, was sich direkt leicht nachweisen läßt, daß bei der Zentralbewegung die Beziehung zwischen Bahnkurve und Hodograph wechselseitig ist, die Bahnkurve kann auch als der Hodograph des Hodographen betrachtet werden.

14. Aufgabe. *Den Krümmungsradius ϱ' des Hodographen zu finden.*

Auflösung. Ist φ' der vom Radiusvektor der Bahnkurve durchlaufene Winkel, so wird $d\varphi'$ der Winkel zwischen zwei unendlich benachbarten Beschleunigungen, also auch zwischen zwei unendlich benachbarten Tangenten des Hodographen. Ferner sei ds' das Bogenelement des Hodographen, dann wird

$$\varrho' = \frac{ds'}{d\varphi'} = \frac{ds'}{dt} : \frac{d\varphi'}{dt} = \frac{ds'}{dt} \cdot \frac{r^2}{c} \quad [\text{s. } (14)],$$

es ist aber $\frac{ds'}{dt} = \operatorname{mod} \ddot{P}$, also wird

$$\varrho' = \frac{r^2}{c} \operatorname{mod} \ddot{P}.$$

Viertes Kapitel.

Endliche Verrückungen eines starren Systems.

1. Translation. Es seien A und A_1 zwei korrespondierende Lagen eines und desselben beweglichen Punktes bei zwei verschiedenen Stellungen S und S_1 eines starren Systems. Der Vektor $A_1 - A$ heißt die Verschiebung von A; wenn alle Punkte von S gleiche Verschiebungen erfahren, so sagt man, daß die Stellung S_1 aus S durch eine einfache Parallelverschiebung oder Translation AA_1 hervorgeht.

Denken wir uns jetzt die verschiedenen Zwischenlagen des Systems zwischen S und S_1 hinzu und nehmen nur an, daß für irgend zwei aufeinander folgende Zwischenlagen, wie nahe benachbart sie auch seien, dieselbe Eigenschaft gilt, daß sie also durch eine Parallelverschiebung auseinander hervorgehen. Die verschiedenen Punkte von S werden dann kongruente Kurven beschreiben, und der Übergang von S zu S_1 geschieht, wie man sagt, durch eine kontinuierliche Translationsbewegung. Die Bögen, welche irgend zwei Punkte von S, von ihren Anfangslagen ausgehend, beschreiben, sind gleich; die Tangenten in ihren Endpunkten sind parallel, und daher sind bei einer kontinuierlichen Translationsbewegung die Geschwindigkeiten der verschiedenen Punkte des Systems in jedem Augenblicke gleich; umgekehrt, gilt diese Eigenschaft, so ist die Bewegung eine Translationsbewegung.

Wenn aber nur in einem gegebenen Augenblicke t die Geschwindigkeiten der verschiedenen Punkte durch gleiche Vektoren dargestellt werden, so fällt in Hinsicht auf die Geschwindigkeiten zur Zeit t die Bewegung des Systems

mit dem eines kongruenten Systems zusammen, das in kontinuierlicher Translationsbewegung begriffen ist und zur Zeit t dieselbe Geschwindigkeit hat wie das erste System. Dann sagt man von dem letzteren, daß es in diesem Augenblicke in einer momentanen Translationsbewegung begriffen ist.

Die Maschinen liefern zahlreiche Beispiele für geradlinige Translationsbewegungen, man denke z. B. an die Bewegung des Kolbens einer Pumpe oder Dampfmaschine, während eine Koppelstange, deren Endpunkte an zwei gleich langen Kurbelarmen befestigt sind und deren Länge gleich dem Abstande der Drehungszentren dieser Kurbeln ist, ein Beispiel für eine kontinuierliche, aber krummlinige Translation liefert.

2. Rotation. Wir betrachten wieder zwei verschiedene Lagen desselben starren Systems und nehmen jetzt an, daß zwei Punkte und damit auch alle Punkte ihrer Verbindungslinie a in beiden Lagen zusammenfallen. Wir sagen dann, das System habe eine einfache Rotation um die Achse a ausgeführt. Der Achse geben wir einen bestimmten Sinn, und zwar einen solchen Sinn, daß ein Beobachter, der sich in diesem Sinne aufrecht in die Rotationsachse stellt, den Übergang aus der Anfangs- in die Endlage in dem Sinne entgegen dem Uhrzeiger erfolgen sieht.

Fällt man von zwei Punkten, von denen der eine, P, in den anderen, P_1, durch die Rotation übergeht, die Lote auf die Achse a, so sind diese Lote gleichlang und ihre Fußpunkte fallen in einen Punkt P_0 zusammen, weiter ist der Winkel PP_0P_1 derselbe, wie auch der Punkt P in der ersten Systemlage angenommen wird, er heißt der Rotationswinkel θ. Wir dürfen und wollen $\theta < \pi$ annehmen, die Rotation also in dem Sinne erfolgen lassen, bei welchem der Rotationswinkel den kleineren Wert hat.

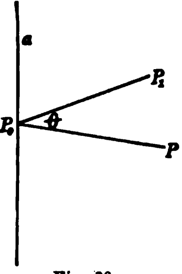


Fig. 30

Berücksichtigen wir nicht bloß die Anfangs- und Endlage des Systems, sondern betrachten wir die ganze kontinuierliche Bewegung, durch die das System aus der Anfangs- in die End-

lage übergeht und die so beschaffen sei, daß auch in allen Zwischenlagen die Punkte der Achse sich von ihrem Orte nicht entfernen, so sprechen wir von einer kontinuierlichen Rotationsbewegung. Die Punkte des Systems beschreiben hierbei Kreisbögen, deren Ebenen zu der Achse senkrecht sind und deren Mittelpunkte auf der Achse liegen, die Geschwindigkeiten sind daher stets zur Achse senkrecht, sie stimmen ferner dem Sinne nach überein, und zwar wird ihr Sinn von vornherein durch die über den Sinn der Rotationsachse getroffene Vereinbarung gegeben. Die Länge der Kreisbögen ist ihren Radien proportional, die Geschwindigkeiten verschiedener Punkte in demselben Augenblicke verhalten sich also der Größe nach wie die Abstände der Punkte von der Rotationsachse. Ist ω zur Zeit t die Größe der Geschwindigkeit für die Punkte, die von der Achse den Abstand 1 haben, so ist sie für die Punkte im Abstand r gleich ωr; ω heißt dann die Winkelgeschwindigkeit der Rotationsbewegung.

Fällen wir aus der Anfangs- und Endlage eines Punktes auf die Achse die Lote und nennen θ den Winkel zwischen diesen Loten, so wird der von einem Punkte während der ganzen Bewegung beschriebene Bogen gleich θr, wenn r wieder der Abstand des Punktes von der Achse ist.

Bezieht sich θ statt auf die Endlage auf irgend eine Zwischenlage, die zur Zeit t eintritt, so wird

$$\dot{\theta} = \omega .$$

Bleibt ω konstant, so heißt die Rotation gleichförmig. Dann wird

$$\theta = \omega t,$$

wenn die Anfangslage zur Zeit $t = 0$ gehört.

Die Dimension von ω ist

$$[t^{-1}].$$

Wir betrachten nun einen Vektor Ω, der den Modul ω hat, und der Richtung und dem Sinne nach mit der Rotationsachse zusammenfällt. Dieser Vektor heißt der Vektor der

Winkelgeschwindigkeit oder kürzer Rotationsvektor. Ist dann P ein beliebiger Punkt des starren Systems, $\dot{P}$ seine Geschwindigkeit, O irgend ein Punkt auf der Rotationsachse, so wird

$$\dot{P} = \Omega \wedge (P - O), \tag{1}$$

d. h. bei der kontinuierlichen Rotationsbewegung um eine Achse ist die Geschwindigkeit eines Punktes P des Systems das Moment des Rotationsvektors, den man sich in der Rotationsachse denkt, für den Punkt P.

Wenn nun eine allgemeinere Bewegung eines starren Systems derart ist, daß zu einer bestimmten Zeit t die Geschwindigkeiten seiner Punkte die für diese Punkte genommenen Vektormomente eines Vektors Ω sind, so fällt die Bewegung, was die Geschwindigkeiten in diesem Augenblicke anlangt, mit der gleichförmigen Rotationsbewegung eines kongruenten Systems um die Linie des Vektors Ω mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \operatorname{mod} \Omega$ zusammen, wobei der Sinn der Rotationsbewegung immer in der angegebenen Weise durch den Sinn des Rotationsvektors Ω bestimmt wird. Deshalb sagt man, die Bewegung des Systems im Augenblicke t sei eine momentane Rotation um Ω.

3. Schraubenbewegung. Ein starres System erfahre eine Translation längs einer Achse a und darauf eine Rotation um dieselbe Achse a.

Die Endlage P_1, die ein Punkt P annimmt, ändert sich nicht, wenn man die Reihenfolge der beiden Bewegungen vertauscht, also erst die Rotation und dann die Translation ausführt. Die beiden Bewegungen heißen deswegen vertauschbar.

Wir können auch die beiden Bewegungen gleichzeitig ausführen. Dann müssen wir uns jeden Punkt P auf einem Kreise denken, dessen Mittelpunkt auf der Achse a liegt und dessen Ebene zu der Achse senkrecht steht, und diesen Kreis, während der Punkt P sich auf ihm mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt, längs der Achse, ebenfalls mit gleichförmiger Geschwindigkeit, verschieben. Der Punkt P beschreibt

hierbei eine Schraubenlinie mit der Achse a, und die Bewegung ist die einer Schraube in ihrer Mutter; die von den einzelnen Punkten beschriebenen Schraubenlinien haben dieselbe Ganghöhe.

Eine solche Bewegung heißt eine kontinuierliche Schraubenbewegung. Sind die Rotation und Translation momentan, so heißt auch die aus ihnen zusammengesetzte Schraubenbewegung momentan.

Ist τ die Geschwindigkeit der Translation, ω die Winkelgeschwindigkeit der Rotation, also $r\omega$ die Geschwindigkeit eines Punktes P im Abstande r von der Achse, so setzt sich die resultierende Geschwindigkeit von P aus zwei Vektoren mit den Moduln τ und $r\omega$ zusammen, von denen der erste der Achse parallel, der zweite zu der Meridianebene, die P mit der Achse verbindet, senkrecht ist. Nennt man daher α den Winkel, den die Tangente der Schraubenlinie in P mit der Achse bildet, und der, wie wir wissen, für alle Punkte einer Schraubenlinie derselbe ist, so finden wir

$$\tau = r\omega \operatorname{cotg} \alpha.$$

Aber $2\pi r \operatorname{cotg} \alpha$ ist die gemeinsame Ganghöhe aller Schraubenlinien. Nennen wir sie $2\pi h$, so ergibt sich

$$\tau = h\omega,$$

und h heißt der Parameter der Schraubenbewegung. Für $h = 0$ ergibt sich eine Rotation, für $h = \infty$ eine Translation, so daß diese Bewegungen derart als die Grenzfälle der Schraubenbewegung erscheinen.

Wohl zu beachten ist, daß τ das Vorzeichen $+$ oder $-$ hat, jenachdem der Sinn der Translation mit dem Sinn, den die Rotationsachse nach der oben getroffenen Festsetzung hat, übereinstimmt oder nicht. Im ersten Fall wird $h > 0$ und im zweiten Falle $h < 0$. Das erste bedeutet die Bewegung einer Rechtsschraube, das zweite die einer Linksschraube.

4. Endliche Verrückungen eines starren Systems. Die bisher behandelten Bewegungen: Translation, Rotation und Schraubenbewegung, sind die drei Grundtypen der Bewegung

eines starren Systems. Ihre Bedeutung erhellt aus dem folgenden Satze, den wir jetzt beweisen wollen:

Der Übergang eines starren Systems aus einer Lage S in eine andere Lage S_1 läßt sich immer durch eine Schraubenbewegung ausführen, wobei man die Grenzfälle der Rotation und Translation einzuschließen hat.

Wir beginnen mit einem Spezialfall. Eine Ebene α des starren Systems (und damit auch jede parallele Ebene) möge sich in sich selbst verschieben. Wir betrachten die Schnitte s, s_1 der Ebene α mit S, S_1. Wenn wir s in s_1 überführen, geht auch S in S_1 über. Denn sind A und A_1 Anfangs- und Endlage eines beliebigen Punktes, so müssen auch die Fußpunkte B und B_1 der aus A und A_1 auf die Ebene gefällten Lote Anfangs- und Endlage eines Punktes in dem starren System sein, wobei $AB = A_1B_1$ wird. Geht umgekehrt B in B_1 über und die ganze Ebene in sich, also ein Lot auf ihr wieder in ein Lot auf ihr, so geht auch A in A_1 über.

In der Ebene α gibt es notwendigerweise Punkte, die nicht mit ihren entsprechenden zusammenfallen, denn sonst würde überhaupt keine Bewegung eintreten. Sei B ein solcher und B_1 der Punkt, in den er übergeht. Dann geht B_1 in einen dritten Punkt B_2 über derart, daß $BB_1 = B_1B_2$ wird, denn von diesen beiden Strecken geht durch die Bewegung die erste in die zweite über. Wir haben nun zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem die drei Punkte B, B_1, B_2 in einer Geraden liegen oder nicht. Im ersten Falle ist die ganze Bewegung eine Translation, wenn B und B_2 verschieden sind, also B_1 in der Mitte zwischen B und B_2 liegt.

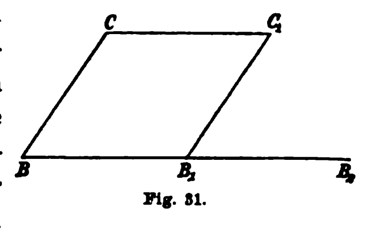


Fig. 31.

Denn ist dann C die Anfangslage und C_1 die Endlage irgend eines weiteren Punktes, so werden die Vektoren $C - B$ und $C_1 - B_1$ einander gleich, woraus auch die Vektorengleichheit $C_1 - C = B_1 - B$ folgt. Liegen B, B_1, B_2 nicht in einer Geraden, so

liegen sie auf einem Kreise und man kann durch eine Drehung der Ebene um den Mittelpunkt M dieses Kreises B in B_1 und B_1 in B_2 überführen. Diese Drehung führt auch jeden weiteren Punkt aus seiner Anfangslage C in seine Endlage C_1 über.

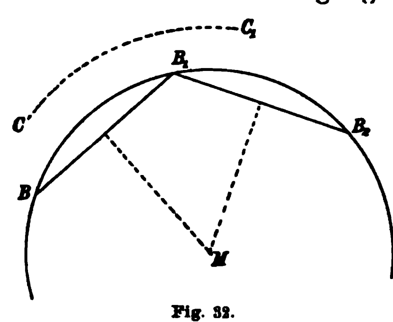


Fig. 32.

Fällt endlich B_2 mit B zusammen, so wird die geforderte Bewegung hergestellt durch eine halbe Umdrehung um die Mitte der Strecke BB_1. Wir schließen also: eine ebene Figur kann aus einer Lage in eine beliebige andere Lage innerhalb derselben Ebene übergeführt werden, entweder durch eine Translation oder durch Rotation um einen Punkt der Ebene.

Dieselbe Betrachtung gilt in analoger Weise auch für die Bewegung einer Kugel in sich, d. h. eine Drehung der Kugel um ihren Mittelpunkt, nur kommt dann der Fall, daß die drei Punkte auf einer Geraden liegen, in Wegfall, da drei Punkte einer Kugel immer auf einem Kreise liegen. Bleibt aber bei einer Drehung der Kugel um ihren Mittelpunkt ein Punkt der Kugel fest, so bleiben auch alle Punkte der Geraden fest, die diesen Punkt mit dem Kugelmittelpunkt verbindet. So ergibt sich: Haben zwei verschiedene Lagen eines starren Systems einen gemeinsamen Punkt, so haben sie auch alle Punkte einer Achse gemeinsam, die durch diesen Punkt hindurchgeht, und die erste Lage geht in die zweite durch eine einfache Rotation um diese Achse über.

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall und bezeichnen mit A und A_1 Anfangs- und Endlage irgend eines Punktes des starren Systems. Dann lassen wir dieses zuerst eine Translation ausführen, die A in A_1 überführt, und suchen darauf eine Bewegung, die das System aus der durch die Translation erreichten Zwischenlage in die Endlage überführt. Eine solche

Bewegung ist nach dem vorigen Satze eine Rotation um eine durch A_1 gehende Achse, denn die Zwischenlage hat mit der Endlage den Punkt A_1 gemein. Wir finden also: Der Übergang eines starren Systems aus einer Lage in eine andere läßt sich immer auf unendlich viele Arten erreichen durch eine Translation und eine darauf folgende Rotation, wenn nicht die Anfangslage in die Endlage durch eine einfache Translation übergeht.

Betrachten wir nun eine Ebene σ_1, die in der Endlage zu der durch A_1 gehenden Rotationsachse senkrecht ist. Diese Ebene geht durch die Rotation in sich über und durch die Translation aus einer parallelen Ebene σ hervor. Jede andere Translation aber, die mit einer Rotation zusammen den geforderten Übergang herstellt, muß σ ebenfalls in die Ebene σ_1 überführen, da durch eine Rotation eine Ebene wohl in sich selbst, aber nicht in eine parallele Ebene übergehen kann. Die zu der neuen Translation hinzukommende Rotation muß daher die Ebene σ_1 in sich überführen, mithin muß ihre Achse senkrecht zu σ_1 sein: von allen Rotationen, zu denen wir auf die angegebene Art gelangen, sind also die Achsen parallel.

Nehmen wir nun eine Ebene π, die zu σ senkrecht ist, und nennen π_1 ihre Endlage, die wieder zu σ_1 und damit auch zu σ senkrecht ist. Die Ebenen π', in die π durch die Translationen übergeht, sind parallel zu π, bilden also mit π_1 denselben Winkel wie π. Daraus folgt sofort, da die Rotation jedesmal π' in π_1 überführen muß, daß von allen Rotationen, die wir erhalten, nicht bloß die Achsen parallel, sondern auch die Winkel gleich sind.

Wir führen jetzt die Ebene σ in die Ebene σ_1 über durch eine Translation, deren Richtung zu den beiden Ebenen senkrecht ist. Dann läßt sich die so gefundene Zwischenlage des starren Systems nach dem, was wir zu Anfang dieses Paragraphen gesehen haben, in die Endlage überführen durch die aus der Drehung der Ebene σ_1 in sich um einen Pol M folgende Drehung des starren Systems um die durch M senkrecht zu

σ_1 gelegte Achse *m*. Die Achse dieser Rotation hat aber dieselbe Richtung wie die ausgeführte Translation und setzt sich mit ihr zu einer Schraubenbewegung zusammen. So finden wir den an die Spitze gestellten allgemeinen Satz.[1])

Die Achse der Schraubenbewegung ist dadurch charakterisiert, daß sie bei der Bewegung in sich selbst übergeht. Daraus ist sofort zu sehen, daß die angegebene Reduktion nur auf eine einzige Art möglich ist. Denn ist sie auf eine Art gefunden, so geht jede Gerade, die nicht mit der Schraubenachse zusammenfällt, in eine andere Lage über, es gibt also keine Gerade außerhalb der gefundenen Schraubenachse, welche die Achse einer äquivalenten Schraubenbewegung bilden könnte. Ferner folgt, da alle Translationen die Ebene σ in die Ebene σ_1 überführen, daß die Größe der Translation bei der Schraubenbewegung am kleinsten ist, und daß die Projektionen der anderen Translationen auf die Schraubenachse alle denselben Wert haben, der durch den senkrechten Abstand der Ebenen σ und σ_1 gegeben wird. Fällt σ_1 mit σ zusammen, so erhält man statt der Schraubenbewegung eine Rotation.

1) Der Satz, daß jede Drehung um einen festen Punkt auch eine Drehung um eine feste Achse ist, stammt von Euler (Formulae generales etc., Novi Commentarii Acad. Petropolitanae, vol. 20 (1775), p. 202). Der Satz, daß jede Ortsveränderung eines starren Systems auf eine Schraubung zurückzuführen ist, gab Chasles [Note sur les propriétés générales de deux corps etc., Bulletin de Férussac, t. 14 (1830)], der schon vorher den besonderen Fall der Ebene und der Kugel behandelt hatte in einer Note, die der Philomathischen Gesellschaft 1829 überreicht, aber erst 1878 im Bulletin de la Soc. mathém. de France, t. 6, p. 208, gedruckt wurde. Des weiteren hat man von Chasles zu vergleichen die Noten in den Comptes Rendus, t. 51 (1860), p. 855, 905; t. 52 (1861), p. 77, 179, 487. Die Chaslesschen Sätze wurden von Giorgini im Jahre 1832 [Memorie della Società italiana delle Scienze, vol. 21 (1834), p. 1] wiedergefunden. Eine ausführliche Darstellung gab Brisse, Journal de math. (2) t. 20 (1874), p. 220; (3) t. 1 (1875), p. 149, die analytische Theorie Battaglini, Rendiconti della R. Accad. di Napoli, vol. 9 (1870), p. 142, eine vektorielle Darstellung Lüroth, Zeitschr. für Math. u. Physik, Bd. 43 (1898), S. 243.

Von Chasles, der den allgemeinen Satz gefunden hat, wurde auch die folgende Konstruktion für die Schraubenachse gegeben:

Es sei ABC die Anfangslage, $A_1B_1C_1$ die Endlage eines Dreiecks. Wir nehmen einen Punkt O willkürlich an und bestimmen drei weitere Punkte A_2, B_2, C_2 durch die Vektorengleichungen

$$A_2 - O = A_1 - A, \quad B_2 - O = B_1 - B, \quad C_2 - O = C_1 - C.$$

Verbinden wir dann $A_2B_2C_2$ durch eine Ebene σ_1 und legen durch O hierzu die Parallelebene σ, so geht durch alle die verschiedenen Translationen σ in σ_1 über. Projizieren wir nun die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ orthogonal auf σ_1, wobei sie in die Dreiecke $A'B'C'$ und $A_1'B_1'C_1'$ übergehen mögen, so gibt es eine Rotation der Ebene σ_1 in sich, bei der das erste dieser Dreiecke in das zweite übergeht. Den Pol M dieser Rotation findet man, indem man die Mittelsenkrechte von $A'A_1'$ mit der Mittelsenkrechten von $B'B_1'$ oder $C'C_1'$ schneidet. Errichtet man in M auf σ_1 die Senkrechte m, so ist dies die gesuchte Schraubenachse.

5. Zusammensetzung der endlichen Verrückungen. Unterscheiden wir eine Reihe von Systemlagen $S_1, S_2, \ldots, S_n$, so gibt es eine Schraubung $\mathfrak{S}_1$, die das starre System aus der Lage S_1 in die Lage S_2 überführt, eine zweite $\mathfrak{S}_2$, die es aus der Lage S_2 in die Lage S_3 bringt usw. Es gibt aber auch eine Schraubenbewegung $\mathfrak{S}$, die das System aus der Anfangslage S_1 in die Endlage S_n überführt. Wir sagen dann, die Schraubungen $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots$ setzen sich zu der Schraubung $\mathfrak{S}$ zusammen. Unter die Schraubungen müssen wir dabei auch die Translationen und Rotationen rechnen. Es bieten sich dabei einige Spezialfälle dar, die von besonderem Interesse sind.

Zunächst ergibt sich: Mehrere Translationen setzen sich immer wieder zu einer Translation zusammen, die durch den Summenvektor der die einzelnen Translationen repräsentierenden Vektoren gegeben wird.

In diesem Falle sind die Verrückungen vertauschbar,

ebenso wie mehrere Rotationen um dieselbe Achse oder eine Rotation und eine Translation vertauschbar sind.

Es gibt zwei Fälle, in denen sich auch zwei Rotationen wieder zu einer Rotation zusammensetzen. Der eine Fall ist der, wo die Achsen der beiden Rotationen sich schneiden, der zweite der, wo sie zueinander parallel sind.

Wir wollen zunächst nachweisen, daß jede Rotation sich auf unendlich viele Arten aus zwei halben Umdrehungen oder Umwendungen zusammensetzen läßt. Den Achsen dieser Umwendungen geben wir einen solchen Sinn, daß sie einen spitzen Winkel miteinander bilden, sie haben dann nur die folgenden drei Bedingungen zu erfüllen: erstens müssen sie auf der Achse der resultierenden Rotation in einem und demselben Punkte senkrecht stehen, zweitens muß der Winkel, den sie einschließen, die Hälfte des Winkels der resultierenden Rotation sein, drittens muß der Sinn, in dem die Achse der zweiten Umwendung auf die Achse der ersten Umwendung folgt, derselbe sein, wie der Sinn der Rotation, die sie ersetzen.

Haben wir nämlich umgekehrt zwei Umwendungen vor uns, deren Achsen a_1, a_2 sich in einem Punkte O schneiden, so geht ein Punkt P des in O auf der Ebene $(a_1 a_2)$ errichteten Lotes a durch die erste Umwendung in das Spiegelbild P_1 von P bezüglich der Ebene $(a_1 a_2)$ über und dieses kehrt durch die zweite Umwendung in den Punkt P, der ja seinerseits auch das Spiegelbild von P_1 ist, zurück. Aus den beiden Umwendungen resultiert also eine Bewegung, bei der alle Punkte des Lotes a fest bleiben, d. h. eine Rotation mit der Achse a.

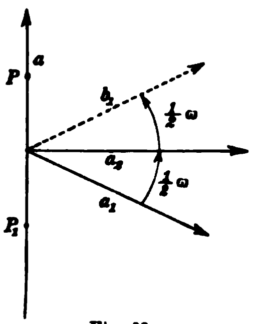


Fig. 33.

Um den Winkel und den Sinn dieser Rotation zu bestimmen, fassen wir die Achse a_1 der ersten Umwendung ins Auge. Diese bleibt bei der ersten Umwendung ungeändert, bei der zweiten Umwendung geht sie über a_2 hinaus in die zu a_1 bezüglich a_2 symmetrische Lage b_1 über, so

daß der Winkel (a_1, b_1) gleich dem doppelten Winkel (a_1, a_2) wird und dem Sinne nach mit ihm übereinstimmt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Das Resultat läßt sich in einfacher und klarer Form aussprechen, wenn wir uns der Vektorsymbolik bedienen. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ zwei Einheitsvektoren, welche der Richtung und dem Sinne nach mit den Achsen a_1, a_2 der beiden Umwendungen zusammenfallen. Bilden wir dann den Vektor $\mathfrak{a}_3' = \mathfrak{a}_1 \wedge \mathfrak{a}_2$, so hat dieser folgende Bedeutung: er fällt der Richtung und dem Sinne nach mit der Achse a der resultierenden Rotation zusammen und es wird

$$\operatorname{mod} \mathfrak{a}_3' = \sin \tfrac{1}{2}\omega,$$

wenn ω den Winkel der resultierenden Rotation bedeutet.

Lassen wir die beschränkende Voraussetzung fallen, daß die Achsen a_1, a_2 und damit die Einheitsvektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ einen spitzen Winkel miteinander bilden, so ändert sich nichts, als daß dann der Winkel ω der resultierenden Rotation $> \pi$ wird. Eine derartige Rotation können wir aber immer durch eine solche mit dem entgegengesetzten Sinne und dem Winkel $2\pi - \omega$ ersetzen.

Wir legen jetzt durch einen Punkt O irgend drei Achsen a_1, a_2, a_3, die keiner Ebene angehören, und nehmen in ihnen die Einheitsvektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ an. Wir bilden dann die Vektoren $\mathfrak{a}_1' = \mathfrak{a}_2 \wedge \mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_2' = \mathfrak{a}_3 \wedge \mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_3' = \mathfrak{a}_1 \wedge \mathfrak{a}_2$ und nennen a_1', a_2', a_3' die Achsen durch O, welche dieselbe Richtung und denselben Sinn haben wie diese Vektoren $\mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{a}_2'$, $\mathfrak{a}_3'$. Nun führen wir erst um a_1 und a_2 zwei Umwendungen aus, die sich zu einer Rotation um die Achse a_3' zusammensetzen. Dann tun wir das gleiche für das Achsenpaar a_2, a_3 und erhalten eine Rotation um eine Achse a_1', die zu a_2 und a_3 senkrecht ist. Endlich führen wir die Umwendungen aus um a_3 und a_1 und erhalten eine Rotation um eine Achse a_2', die zu a_3 und a_1 senkrecht ist. Um jede der Achsen a_2, a_3 sind dann aber hintereinander zwei Umwendungen ausgeführt worden, die zusammen jedesmal das System wieder in die alte Lage

zurückbringen, und das gleiche gilt auch für die übrigbleibenden zwei Umwendungen um a_1. Also müssen auch die drei Rotationen hintereinander ausgeführt das System in die alte Lage zurückführen, d. h. sich gegenseitig aufheben. Nehmen wir nun von allen Achsen nur die positiven Halbachsen, d. h. die von O ausgehenden Stücke, nach denen ihr positiver Sinn zeigt, und schneiden wir die zwei Dreikante, welche diese Halbachsen bilden, durch eine Kugel mit dem Mittelpunkte O und dem Radius 1, so erhalten wir auf dieser Kugel zwei Supplementardreiecke $A_1 A_2 A_3$ und $A_1' A_2' A_3'$. Die Supplemente der Winkel des zweiten sind gleich den Seiten des ersten. Die doppelten Werte dieser Seiten sind aber die Winkel der drei Rotationen und der Sinn dieser Rotationen wird durch den Umlauf $A_1 A_2 A_3$ um das Dreieck gegeben; so ergibt sich die Regel:

Dreht man eine Kugel nacheinander um die Durchmesser, die durch die Ecken $A_1' A_2' A_3'$ eines Dreiecks auf der Kugel gehen, und zwar um das Doppelte des an der betreffenden Ecke liegenden Außenwinkels dieses Dreiecks, im Sinne einer bestimmten Umkreisung des Dreiecks genommen, so gelangt die Kugel in die alte Lage zurück.

Nach dieser Regel ist die Rotation, die sich aus zwei Rotationen eines starren Systems um denselben Punkt O zusammensetzt, leicht zu bestimmen. Wir gehen jetzt zu dem Falle paralleler Rotationsachsen über, und geben zuerst die der vorstehenden analoge Regel:

Dreht man ein starres System nacheinander um drei Lote einer Ebene, und zwar um Winkel, die das Doppelte von den Außenwinkeln des von den Fußpunkten A_1', A_2', A_3' der Lote gebildeten ebenen Dreiecks, im Sinne einer bestimmten Umkreisung genommen, sind, so gelangt das System in die alte Lage zurück.

Diese Regel läßt sich genau ebenso beweisen wie die vorige, indem man beachtet, daß in der Ebene eine Rotation sich immer

durch zwei Spiegelungen ersetzen läßt, deren Achsen a_1, a_2 durch den Rotationspol O gehen, den halben Rotationswinkel ω einschließen und im Sinne der Rotation aufeinander folgen. Wählt man für die Paare von Spiegelungsachsen die Seitenpaare des Dreiecks $A_1'A_2'A_3'$, so findet man die angegebene Regel. Aus dieser folgt sofort die Regel für die Zusammensetzung zweier Drehungen um parallele Achsen.

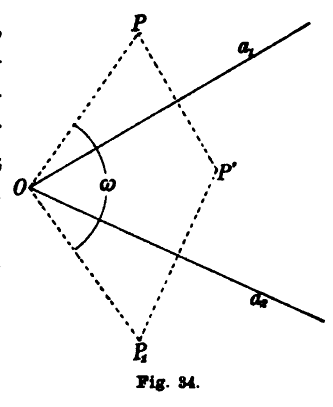


Fig. 34.

Zwei Drehungen um parallele Achsen a_1, a_2 setzen sich zusammen zu einer dritten Drehung mit gleicher Achsenrichtung. Um den Winkel der resultierenden Rotation zu bestimmen, nehmen wir an, daß die beiden gegebenen Rotationen denselben Sinn haben, was immer zu erreichen ist, indem wir nötigenfalls den Winkel der einen durch seine Ergänzung zu 2π ersetzen und den Sinn umkehren. Dann hat die resultierende Rotation denselben Sinn und ihr Winkel ist die Summe der Winkel der beiden gegebenen Rotationen. Die Lage ihrer Achse a ist dadurch bestimmt, daß ihre Abstände von den Achsen a_1, a_2 sich umgekehrt verhalten wie die Sinus der halben zugehörigen Rotationswinkel. Außerdem muß die Achse a so liegen, daß sie bei der zuerst auszuführenden der gegebenen Rotationen nach der Drehung um den halben Rotationswinkel in die Verbindungsebene der Achsen a_1, a_2 fällt.

Läßt man den Sinn der gegebenen Rotationen unter allen Umständen so, wie er vorgelegt ist, so kann man sagen: der Winkel der resultierenden Rotation ist die algebraische Summe von den Winkeln der beiden gegebenen Rotationen, und hat den Sinn derjenigen Rotation, mit deren Vorzeichen sein Vorzeichen übereinstimmt.

Die angegebene Zusammensetzung versagt also, wenn die algebraische Summe von den Winkeln der beiden Teildrehungen

verschwindet, mit anderen Worten, wenn es sich um zwei Drehungen handelt, deren Achsen parallel, deren Sinne entgegengesetzt und deren Winkel gleich sind. In diesem Falle spricht man von einem **Rotationspaar**. Wir wollen zeigen, daß sich dann als resultierende Bewegung eine einfache Translation ergibt.

Wir schneiden zu dem Zwecke die beiden Rotationsachsen in O_1 und O_2 mit einer zu ihnen senkrechten Ebene, die sich auch bei der resultierenden Bewegung in sich verschieben muß. Die letztere ist bestimmt, wenn wir die Verrückung kennen, die irgend eine Strecke erfährt. Wir legen in O_1 und O_2 an $O_1 O_2$ den Winkel ω an, in dem Sinne entgegen der Rotation um den betreffenden Punkt. Auf den freien Schenkeln dieser Winkel tragen wir die Strecken $O_1 Q = O_2 R = O_1 O_2$ ab. Dann geht Q durch die erste Rotation in O_2 über und dieser Punkt bleibt bei der zweiten Rotation fest; O_1 bleibt bei der ersten Rotation fest und geht bei der zweiten in R über.

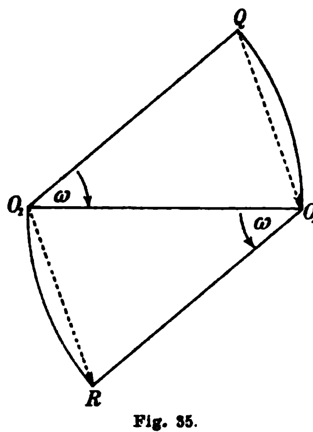


Fig. 35.

Die Strecke $Q O_1$ muß also bei der resultierenden Verrückung in $O_2 R$ übergehen. Aber das Viereck $Q O_1 R O_2$ ist ein Parallelogramm, also erfahren Q, O_1 und damit alle Punkte der Ebene gleiche und gleich gerichtete Verschiebungen, die resultierende Bewegung ist also eine Translation, und wir finden:

Ein Rotationspaar ist einer Translation äquivalent, deren Richtung zu der Achsenrichtung der Rotationen senkrecht ist.

Umgekehrt läßt sich jede Translation auch in die Rotationen eines Paares zerlegen, und zwar kann die eine Rotation, abgesehen davon, daß ihre Achsenrichtung senkrecht zu der Translationsrichtung sein muß, beliebig gewählt werden. Um dies einzusehen, brauchen wir nur zu beachten, daß, wenn in

der Figur des vorigen Satzes O_1 gegeben ist und $O_1 R$ gleich dem Vektor der Translation gemacht wird, wir das gleichschenklige Dreieck $O_1 O_2 R$ durch die Bedingung $\sphericalangle O_1 O_2 R = \omega$, indem wir ω als beliebig gegeben ansehen, bestimmen können.

Drehen wir aber den Sinn der ersten Rotation um, so ergibt sich die zweite Rotation als die aus der Translation und der umgekehrten ersten Rotation resultierende Verrückung, und somit finden wir:

Setzen wir eine Rotation mit einer Translation, deren Richtung zu der Achsenrichtung der Rotation senkrecht ist, zusammen, so ist die resultierende Verrückung eine Rotation von gleichem Sinn und gleichem Rotationswinkel um eine parallele Achse.

Nach dem Gesagten sind wir imstande, eine beliebige Anzahl von Rotationen um parallele Achsen, wie auch ihr Sinn gegeben sei, zusammenzusetzen. Die resultierende Bewegung ist eine Rotation um eine parallele Achse, deren Winkel gleich der algebraischen Summe der Winkel aller gegebenen Rotationen wird, oder eine Translation in einer zu der gemeinsamen Richtung der Achsen senkrechten Richtung.

6. Formeln für die Zusammensetzung endlicher Verrückungen. Wir gehen jetzt zu den analytischen Entwicklungen über, die zu den im vorstehenden auf rein geometrischem Wege abgeleiteten Sätzen gehören, und behandeln zunächst die Verschiebung einer Ebene in sich.

Wir nehmen in der Ebene einen Punkt A und von ihm ausgehend einen Einheitsvektor a an, der Punkt A gehe in einen andern Punkt A_1 über und a in einen von A_1 ausgehenden Einheitsvektor a_1. Geht dann irgend ein anderer Punkt P in P_1 über und ist

$$P - A = re^{i\varphi}a,$$

so wird auch

$$P_1 - A_1 = re^{i\varphi}a_1$$

und nehmen wir an, es sei $a_1 = e^{i\omega}a$, so ergibt sich

$$P_1 - A_1 = (P - A)e^{i\omega}. \tag{2}$$

Für die Darstellung der ebenen Verschiebung erhalten wir aber eine noch einfachere Form. Ist zunächst $\omega = 0$, so wird $e^{i\omega} = 1$, also

$$P_1 = P + c,$$

wenn wir den konstanten Vektor $A_1 - A = c$ setzen. Dies ist die Darstellung einer Translation.

Ist dagegen $e^{i\omega} \neq 1$, so finden wir einen einzigen Punkt O, der der Gleichung genügt

$$O - A_1 = (O - A)e^{i\omega}, \tag{3}$$

also bei der Verschiebung fest bleibt. Subtrahieren wir (3) und (2), so ergibt sich

$$P_1 - O = (P - O)e^{i\omega}, \tag{4}$$

und dies ist die Darstellung einer Rotation um O durch den Winkel ω.

Sind zwei Rotationen zu einer Bewegung zusammenzusetzen, so haben wir auszugehen von zwei Gleichungen

$$P_1 = O_1 + (P - O_1)^{i\omega_1}, \quad P_2 = O_2 + (P_1 - O_2)e^{i\omega_2},$$

aus denen sich für die resultierende Bewegung sofort ergibt

$$P_2 = O_2 + (O_1 - O_2)e^{i\omega_2} + (P - O_1)e^{i(\omega_1 + \omega_2)}.$$

Ist $\omega_1 + \omega_2 = 0$, so ergibt sich wieder

$$P_2 = P + c,$$

für $c = (O_1 - O_2)(e^{i\omega_2} - 1)$, also eine Translation. Ist dagegen $e^{i(\omega_1 + \omega_2)} \neq 1$, so genügt der Gleichung

$$O = O_2 + (O_1 - O_2)e^{i\omega_2} + (O - O_1)e^{i(\omega_1 + \omega_2)}$$

ein einziger Punkt O und durch Subtraktion ergibt sich dann wieder

$$P_2 - O = (P - O)e^{i(\omega_1 + \omega_2)},$$

also die Gleichung einer Rotation um O durch den Winkel $\omega_1 + \omega_2$.

Der Punkt A als Ursprung und der Vektor a als Einheitsstrecke auf der x-Achse bestimmen ein rechtwinkliges Koordinatensystem in der Ebene. Sind in diesem x, y die Koordinaten des Punktes P, so wird

$$w = x + iy = re^{i\varphi} \tag{5}$$

und damit

$$P - A = wa.$$

Sind x_1, y_1 entsprechend die Koordinaten von P_1 und $w_1 = x_1 + iy_1$, so wird

$$P_1 - A = w_1 a.$$

Machen wir noch

$$A_1 - A = \alpha a,$$

wobei α eine konstante komplexe Zahl bedeutet, und setzen $e^{i\omega} = \beta$, so folgt aus der Gleichung (2) zunächst

$$P_1 - A = A_1 - A + (P - A)e^{i\omega}$$

und weiter

$$w_1 = \alpha + \beta w. \tag{6}$$

Bei einer Verschiebung der Ebene in sich erfährt also die komplexe Variable eine lineare Transformation.

Wir wollen nun zu den räumlichen Rotationen um einen Punkt O übergehen und führen dann außer den Fundamentalvektoren e_1, e_2, e_3, die wir uns von O ausgehend denken, die Vektoren, in die sie durch die Rotation übergehen, ein. Seien diese $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$, so gelten die Relationen

$$\left.\begin{array}{c} \mathfrak{e}_1^2 = \mathfrak{e}_2^2 = \mathfrak{e}_3^2 = 1, \\ \mathfrak{e}_2 \times \mathfrak{e}_3 = 0, \quad \mathfrak{e}_3 \times \mathfrak{e}_1 = 0, \quad \mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}_2 = 0. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Gründen wir auf die Vektoren e_1, e_2, e_3 und ebenso auf die Vektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ ein Koordinatensystem, so hat ein Punkt in dem letzteren nach der Rotation dieselben Koordinaten, die er vor der Rotation in dem ersteren Koordinatensystem hatte. Sind x, y, z diese Koordinaten, dagegen x_1, y_1, z_1 die Koordinaten des Punktes (P_1) nach der Rotation in dem anfänglichen Koordinatensystem, so sind x, y, z durch x_1, y_1, z_1 auszudrücken. Zu dem Zwecke beachten wir, daß

$$x = (P_1 - O) \times \mathfrak{e}_1, \quad y = (P_1 - O) \times \mathfrak{e}_2, \quad z = (P_1 - O) \times \mathfrak{e}_3$$

anzunehmen ist, und indem wir nun

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{e}_1 = a_1 e_1 + b_1 e_2 + c_1 e_3, \\ \mathfrak{e}_2 = a_2 e_1 + b_2 e_2 + c_2 e_3, \\ \mathfrak{e}_3 = a_3 e_1 + b_3 e_2 + c_3 e_3 \end{array}\right| \tag{8}$$

setzen, ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1, \\ y &= a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1, \\ z &= a_3 x_1 + b_3 y_1 + c_3 z_1. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Dabei wird infolge der Relationen (7):

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1, \quad a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0 \text{ usw.} \tag{10}$$

Diese sechs Gleichungen bedeuten, daß aus den Gleichungen (9)

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \tag{11}$$

folgt, was auch an sich klar ist, da die beiden Seiten dieser Identität das Quadrat der Entfernung eines Punktes vom Drehungszentrum vor und nach der Drehung bedeuten.

Da zwischen den neun Koeffizienten der Gleichungen (9) sechs Relationen bestehen, bietet sich das Problem dar, diese Koeffizienten als Funktionen dreier unabhängigen Parameter darzustellen. Dieses Problem hat schon Euler gelöst. Wir folgen im nachstehenden einem bequemeren Wege, den Klein und Sommerfeld (*Theorie des Kreisels*) gewiesen haben.

Wir machen die Substitutionen

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x + iy, & \eta &= -x + iy, & \zeta &= -z, \\ \xi_1 &= x_1 + iy_1, & \eta_1 &= -x_1 + iy_1, & \zeta_1 &= -z_1, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

dann gehen die Gleichungen (9) über in drei Gleichungen von der Form

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha_1 \xi_1 + \beta_1 \eta_1 + \gamma_1 \zeta_1, \\ \eta &= \alpha_2 \xi_1 + \beta_2 \eta_1 + \gamma_2 \zeta_1, \\ \zeta &= \alpha_3 \xi_1 + \beta_3 \eta_1 + \gamma_3 \zeta_1, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

und die Identität (11) verwandelt sich in

$$\xi\eta - \zeta^2 \equiv \xi_1 \eta_1 - \zeta_1^2. \tag{14}$$

Infolge dieser Identität ergeben sich zwischen den Koeffizienten von (13) die nachstehenden Relationen:

$$\begin{aligned} &\text{(a)}\ \beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1 = 2\beta_3\gamma_3, & &\text{(d)}\ \alpha_1\alpha_2 = \alpha_3^2, \\ &\text{(b)}\ \gamma_1\alpha_2 + \gamma_2\alpha_1 = 2\gamma_3\alpha_3, & &\text{(e)}\ \beta_1\beta_2 = \beta_3^2, \\ &\text{(c)}\ \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 = 2\alpha_3\beta_3 + 1, & &\text{(f)}\ \gamma_1\gamma_2 = \gamma_3^2 - 1. \end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$\alpha_1 = \alpha^2, \quad \beta_1 = \beta^2, \quad \alpha_2 = \gamma^2, \quad \beta_2 = \delta^2$$

und gemäß (d) und (e)

$$\alpha_3 = \alpha\gamma, \quad \beta_3 = \beta\delta,$$

dann folgt aus (c)

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = 1,$$

also $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, indem wir nötigenfalls die Vorzeichen von α und γ noch umkehren, was an den vorhergehenden Gleichungen nichts ändert. Darauf folgt aus (a) und (b)

$$(\alpha\delta + \beta\gamma)\gamma_1 = 2\alpha\beta\gamma_3, \quad (\alpha\delta + \beta\gamma)\gamma_2 = 2\gamma\delta\gamma_3$$

und bei Einführung eines Proportionalitätsfaktors ε

$$\gamma_1 = 2\alpha\beta\varepsilon, \quad \gamma_2 = 2\gamma\delta\varepsilon, \quad \gamma_3 = (\alpha\delta + \beta\gamma)\varepsilon.$$

Setzen wir diese Werte in (f) ein, so ergibt sich

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^2\varepsilon^2 = 1,$$

also $\varepsilon = \pm 1$. Kehrt man aber die Vorzeichen von $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ um, so ist dies gleichbedeutend damit, daß man ζ_1 durch $-\zeta_1$ also z_1 durch $-z_1$ ersetzt, d. h. eine Spiegelung an der x_1y_1-Ebene ausführt. Es kann also nur einer der beiden Werte von ε in Betracht kommen. Die Bestimmung ist so zu treffen, daß die Determinante der Koeffizienten, die gleich der Determinante der Koeffizienten in den Gleichungen (9) wird, positiv ausfällt. Diese Determinante erhält aber den Wert ε, also haben wir $\varepsilon = +1$ zu nehmen und finden schließlich die Substitutionsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha^2\xi_1 + \beta^2\eta_1 + 2\alpha\beta\zeta_1, \\ \eta &= \gamma^2\xi_1 + \delta^2\eta_1 + 2\gamma\delta\zeta_1, \\ \zeta &= \alpha\gamma\xi_1 + \beta\delta\eta_1 + (\alpha\delta + \beta\gamma)\zeta_1 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

mit

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{16}$$

Da, wenn wir i mit $-i$ vertauschen, sich ξ_1 mit $-\eta_1$ und ξ mit $-\eta$ vertauscht, ergeben die Gleichungen (15), daß von den Paaren komplexer Zahlen α, δ und β, γ das eine aus zwei direkt, das andere aus zwei invers konjugierten Zahlen bestehen muß, und zwar zeigt sich, daß man

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \varkappa + i\nu, & \delta &= \varkappa - i\nu,\\ \beta &= -\mu + i\lambda, & \gamma &= \mu + i\lambda\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

zu setzen hat, denn wären umgekehrt β und γ direkt, α und δ invers konjugiert, so würde die linke Seite von (16) aus der negativen Summe der Quadrate von vier reellen Zahlen bestehen, könnte also nicht $+1$ sein. Nach (17) dagegen wird diese Gleichung:

$$\varkappa^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1. \tag{18}$$

Setzt man andererseits

$$\alpha = \varrho e^{i\theta}, \quad \beta = i\sigma e^{i\chi}, \quad \gamma = i\sigma e^{-i\chi}, \quad \delta = \varrho e^{-i\theta},$$

so folgt aus (16)

$$\varrho^2 + \sigma^2 = 1,$$

wir können deshalb

$$\varrho = \cos\frac{\vartheta}{2}, \quad \sigma = \sin\frac{\vartheta}{2}$$

machen, und führen wir noch statt θ, χ zwei andere Winkel φ, ψ ein durch die Gleichungen

$$\theta = \tfrac{1}{2}(\psi + \varphi), \quad \chi = \tfrac{1}{2}(\psi - \varphi),$$

so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \cos\frac{\vartheta}{2}\, e^{\frac{i}{2}(\psi+\varphi)}, & \beta &= i\sin\frac{\vartheta}{2}\, e^{\frac{i}{2}(\psi-\varphi)},\\ \gamma &= i\sin\frac{\vartheta}{2}\, e^{-\frac{i}{2}(\psi-\varphi)}, & \delta &= \cos\frac{\vartheta}{2}\, e^{-\frac{i}{2}(\psi+\varphi)}.\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Zwischen den Koeffizienten von (15) und (9) bestehen, wie sich durch Einsetzen der Werte von ξ, η, ζ und ξ_1, η_1, ζ_1 aus (12) sofort ergibt, die Beziehungen

$$\tfrac{1}{2}[(a_1 + ia_2) - i(b_1 + ib_2)] = \alpha^2, \quad \tfrac{1}{2}[(a_1 + ia_2) + i(b_1 + ib_2)] = -\beta^2$$

oder

$$a_1 + ia_2 = \alpha^2 - \beta^2, \quad b_1 + ib_2 = i(\alpha^2 + \beta^2)$$

und

$$c_1 + ic_2 = -2\alpha\beta,$$

außerdem

$$a_3 = -(\alpha\gamma - \beta\delta), \quad b_3 = -i(\alpha\gamma + \beta\delta), \quad c_3 = \alpha\delta + \beta\gamma.$$

Setzt man nun die Werte (17) ein und sondert das Reelle

von dem Imaginären, so ergeben sich die folgenden Werte der Koeffizienten

$$\left.\begin{array}{lll} a_1 = \varkappa^2+\lambda^2-\mu^2-\nu^2, & a_2 = 2(\lambda\mu+\varkappa\nu), & a_3 = 2(\lambda\nu-\varkappa\mu), \\ b_1 = 2(\lambda\mu-\varkappa\nu), & b_2 = \varkappa^2-\lambda^2+\mu^2-\nu^2, & b_3 = 2(\mu\nu+\varkappa\lambda), \\ c_1 = 2(\lambda\nu+\varkappa\mu), & c_2 = 2(\mu\nu-\varkappa\lambda), & c_3 = \varkappa^2-\lambda^2-\mu^2+\nu^2. \end{array}\right\} \quad (20)$$

Wir beschreiben jetzt um den Ursprung O eine Kugel mit dem Radius 1 und deuten die Drehungen um O als Verschiebungen der Kugel in sich. Die Gleichung der Kugel in den Koordinaten ξ, η, ζ [vgl. (12)] lautet

$$\xi\eta = (\zeta+1)(\zeta-1). \quad (21)$$

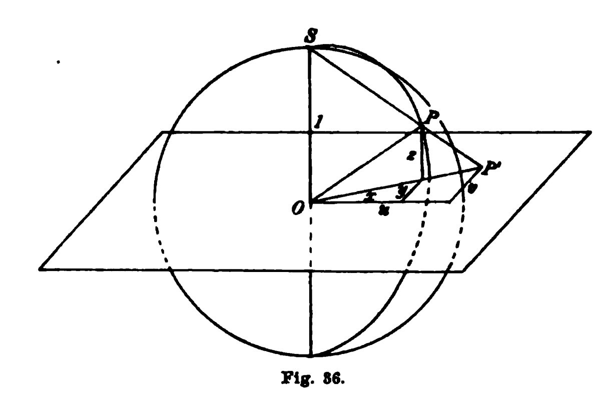


Fig. 86.

Projizieren wir die Punkte der Kugel aus ihrem einen Pole S auf ihre Äquatorebene ($x = 0$, $y = 0$), und nennen u, v die rechtwinkligen Koordinaten des Projektionspunktes, so wird

$$w = u + iv = \frac{x+iy}{1-z} = \frac{\xi}{\zeta+1} = \frac{\zeta-1}{\eta}. \quad (22)$$

Analog haben wir für die Projektion des Kugelpunktes nach der Drehung

$$w_1 = \frac{\xi_1}{\zeta_1+1} = \frac{\zeta_1-1}{\eta_1}.$$

Um nun w durch w_1 auszudrücken, bilden wir nach (15) und (16)

$$\frac{\xi}{\zeta+1} = \frac{\alpha^2\xi_1+\beta^2\eta_1+2\alpha\beta\zeta_1}{\alpha\gamma\xi_1+\beta\delta\eta_1+\alpha\delta(\zeta_1+1)+\beta\gamma(\zeta_1-1)}.$$

Zähler und Nenner multiplizieren wir mit η_1 und eliminieren η_1 durch die Gleichung $\xi_1\eta_1 = (\zeta_1 + 1)(\zeta_1 - 1)$. Dann läßt der Bruch sich kürzen durch

$$\alpha\xi_1 + \beta(\zeta_1 - 1),$$

und, indem wir darauf in Zähler und Nenner durch $\zeta_1 + 1$ dividieren, ergibt sich

$$w = \frac{\alpha w_1 + \beta}{\gamma w_1 + \delta}. \tag{23}$$

Projiziert man die Kugel stereographisch auf ihre Äquatorebene, so stellt sich eine Drehung um ihren Mittelpunkt in der Projektion dar durch eine gebrochene lineare Transformation der komplexen Veränderlichen, und die Koeffizienten dieser Transformation sind die oben eingeführten komplexen Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.[1])

Wird in (23) $w = w_1$, so erhalten wir die Projektionen der Endpunkte des Durchmessers, um den die Kugel gedreht wird. Die komplexen Zahlwerte w_0 und w_0' sind aber die Projektionen der Endpunkte eines Durchmessers, wenn

$$w_0' = -\frac{1}{\bar{w}_0}$$

wird, indem $\bar{w}_0$ die zu w_0 konjugiert komplexe Zahl bezeichnet. Für w_0 ergibt sich nun aus (23) die quadratische Gleichung

$$\gamma w_0^2 + (\delta - \alpha) w_0 - \beta = 0. \tag{24}$$

Vertauscht man i mit $-i$, so geht diese über in

$$-\beta \bar{w}_0^2 + (\alpha - \delta)\bar{w}_0 + \gamma = 0$$

oder nach Division durch $\bar{w}_0^2$ in

$$\gamma w_0'^2 + (\delta - \alpha) w_0' - \beta = 0,$$

womit in der Tat bewiesen ist, daß die beiden Projektionspunkte, die zu den Wurzeln der Gleichung (24) gehören, aus den Endpunkten eines Durchmessers hervorgehen.

1) Die angegebenen Formeln stammen von Helmholtz (Physiologische Optik, Leipzig 1866, S. 513, in dem Abschnitt: Stereographische Projektion der Drehungen). Sie wurden dann von Cayley wiedergefunden (Math. Annalen, Bd. 15, 1879, S. 238).

Um die Koordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 des Kugelpunktes zu finden, der zu dem komplexen Zahlwert w_0 für den Projektionspunkt gehört, hat man auszugehen von den Gleichungen

$$w_0 = \frac{\xi_0}{\zeta_0 + 1} = \frac{\zeta_0 - 1}{\eta_0}, \quad \overline{w}_0 = -\frac{\eta_0}{\zeta_0 + 1} = -\frac{\zeta_0 - 1}{\xi_0},$$

aus denen leicht abzuleiten ist:

$$\xi_0 : \eta_0 : \zeta_0 = w_0 : -\overline{w}_0 : \tfrac{1}{2}(1 - w_0 \overline{w}_0). \tag{25}$$

Nun folgt aber aus (24)

$$\frac{\beta}{\gamma} = -w_0 w_0' = \frac{w_0}{\overline{w}_0}, \quad \frac{\alpha - \delta}{\gamma} = -(w_0 + w_0') = \frac{1 - w_0 \overline{w}_0}{\overline{w}_0},$$

also wird

$$\xi_0 : \eta_0 : \zeta_0 = \beta : -\gamma : \tfrac{1}{2}(\alpha - \delta)$$

und daraus ergibt sich für die rechtwinkligen Koordinaten x_0, y_0, z_0 dieses Punktes

$$x_0 : y_0 : z_0 = \frac{1}{2}(\gamma + \beta) : \frac{i}{2}(\gamma - \beta) : \frac{1}{2}(\alpha - \delta)$$

oder nach (17)

$$x_0 : y_0 : z_0 = \lambda : \mu : \nu. \tag{26}$$

Wir können der Gleichung (24) noch eine andere bemerkenswerte Gestalt geben, indem wir

$$W_0 = \gamma w_0 + \delta$$

einführen. Sie wird dann mit Rücksicht auf (16)

$$W_0^2 - (\alpha + \delta) W_0 + 1 = 0.$$

Die Wurzeln W_0 und $\overline{W}_0$ dieser Gleichung sind konjugiert komplex, und da

$$W_0 + \overline{W}_0 = \alpha + \delta = 2\varkappa$$

ist, folgt, daß

$$\text{der reelle Teil von } W_0 = \varkappa$$

wird.

Wir bringen nun die Transformationsgleichungen (23) in die Form

$$w - w_0 = \frac{w_1 - w_0}{(\gamma w_1 + \delta)(\gamma w_0 + \delta)}$$

und nehmen insbesondere an, w_1 und damit auch w sei von w_0 unendlich wenig verschieden. Wir wollen dann

$$w - w_0 = \delta w, \quad w_1 - w_0 = \delta w_1$$

setzen und finden einfach

$$\delta w = \frac{\delta w_1}{W_0^2}.$$

Diese Gleichung hat die Form einer einfachen Drehung um den Pol w_0 und nennen wir ω den Drehungswinkel, so wird

$$\delta w = e^{-i\omega} \delta w_1,$$

mithin

$$W_0 = e^{\frac{i\omega}{2}}.$$

Nehmen wir links und rechts den reellen Teil, so folgt

$$\varkappa = \cos\frac{\omega}{2}. \tag{27}$$

Die Bedeutung dieses Resultates ergibt sich daraus, daß die Abbildung der Kugel durch stereographische Projektion auf ihre Äquatorebene die Eigenschaft der Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen besitzt. Deshalb muß auch die Drehung der Kugel um einen Durchmesser sich in der Projektion innerhalb der nächsten Umgebung der Punkte, in die sich die Endpunkte des Durchmessers projizieren, ebenfalls als eine Drehung darstellen, und der Drehungswinkel ist in dem ebenen Bilde derselbe wie auf der Kugel; ω ist also der Winkel der im Raume um den Punkt O ausgeführten Rotation.

Aus (27) folgt aber mit Rücksicht auf (18)

$$\sin\frac{\omega}{2} = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2},$$

und nennt man die Richtungskosinus der Rotationsachse l, m, n, so werden diese den in (26) bestimmten Koordinaten x_0, y_0, z_0 direkt oder entgegengesetzt gleich, und wir können setzen

$$\lambda = l\sin\frac{\omega}{2}, \quad \mu = m\sin\frac{\omega}{2}, \quad \nu = n\sin\frac{\omega}{2}. \tag{28}$$

Die Gleichungen (27) und (28) zeigen den direkten Zusammenhang der Parameter $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ mit den Elementen der Drehung.

Unter Berücksichtigung der Werte (27) und (28) folgt aus (20) unmittelbar

$$4 \cdot \cos^2\frac{\omega}{2} = 1 + a_1 + b_2 + c_3,$$
$$4l^2 \sin^2\frac{\omega}{2} = 1 + a_1 - b_2 - c_3,$$
$$4m^2 \sin^2\frac{\omega}{2} = 1 - a_1 + b_2 - c_3,$$
$$4n^2 \sin^2\frac{\omega}{2} = 1 - a_1 - b_2 + c_3.$$

Die Darstellung (23) erlaubt sofort, die **Werte der Parameter für die aus zwei gegebenen Drehungen um O zusammengesetzte Drehung zu finden.** Wir haben dann zwei Gleichungen von der Form

$$w = \frac{\alpha_1 w_1 + \beta_1}{\gamma_1 w_1 + \delta_1}, \quad w_1 = \frac{\alpha_2 w_2 + \beta_2}{\gamma_2 w_2 + \delta_2}$$

und finden durch Einsetzen des Wertes von w_1 in die erste Gleichung

$$w = \frac{(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\gamma_2) w_2 + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\delta_2)}{(\gamma_1\alpha_2 + \delta_1\gamma_2) w_2 + (\gamma_1\beta_2 + \delta_1\delta_2)}.$$

Identifizieren wir dies mit

$$w = \frac{\alpha w_2 + \beta}{\gamma w_2 + \delta},$$

so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\gamma_2, & \beta &= \alpha_1\beta_2 + \beta_1\delta_2,\\ \gamma &= \gamma_1\alpha_2 + \delta_1\gamma_2, & \delta &= \gamma_1\beta_2 + \delta_1\delta_2. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Führt man nach (17) die reellen Parameter $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ ein, so findet man ohne Mühe die Werte für die Parameter der resultierenden Drehung, wenn die Parameter $\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1$ und $\varkappa_2, \lambda_2, \mu_2, \nu_2$ der Teildrehungen gegeben sind:

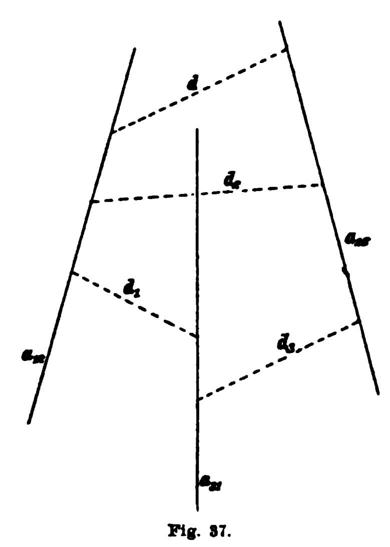
$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= \varkappa_1\varkappa_2 - \lambda_1\lambda_2 - \mu_1\mu_2 - \nu_1\nu_2,\\ \lambda &= \varkappa_1\lambda_2 + \lambda_1\varkappa_2 + \mu_1\nu_2 - \nu_1\mu_2,\\ \mu &= \varkappa_1\mu_2 + \mu_1\varkappa_2 + \nu_1\lambda_2 - \lambda_1\nu_2,\\ \nu &= \varkappa_1\nu_2 + \nu_1\varkappa_2 + \lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Damit sind die Fragen, welche die Darstellung und Zusammensetzung der Drehungen um einen festen Punkt betreffen, in der Hauptsache erledigt.[1])

1) Die Formeln (20) bilden einen Spezialfall der Formeln von Cayley, welche bei n Variablen die n^2 Koeffizienten einer orthogonalen Substitution in Funktion von $\frac{1}{2}n(n-1)$ Parametern ausdrücken [Journal

Übungsbeispiele.

1. Aufgabe. *Gegeben sind drei Gerade a_{12}, a_{23}, a_{31}, es sei d_1 die kürzeste Entfernung zwischen a_{12} und a_{31}, d_2 die zwischen a_{23} und a_{12}, d_3 die zwischen a_{31} und a_{23}. Um die erste Gerade führe man eine Schraubung aus, deren Translationsstrecke das Doppelte von dem Abstande zwischen d_1 und d_2 und deren Rotationswinkel das Doppelte von dem Winkel zwischen d_1 und d_2 ist, darauf eine analoge Schraubung um die zweite und um die dritte Gerade. Dann bringen diese drei Schraubungen zusammengenommen das System in die Anfangslage zurück (Halphensches Theorem).*[1]


Fig. 37.

Auflösung. Durch die Schraubung um a_{12} gehe das starre System aus der Lage S_1 in die Lage S_2 über, die Gerade d_1 nehme die Lage d an. Wir lassen S_1 um d_1 eine halbe Umdrehung ausführen, so erhalten wir eine symmetrische Lage S, in der a_{12}

für Math. Bd. 32 (1846), S. 119; Collected Papers I, p. 332]. Sie sind in etwas anderer Bezeichnung von Euler gegeben worden [Problema algebraicum etc., Novi Commentarii Acad. Petropolitanae vol. 15 (1770), p. 75 und 101]; lange Zeit schrieb man sie aber Monge zu. Dieselben Formeln wurden wiedergefunden von Rodrigues in der Arbeit Journal de math. t. 5 (1840), p. 380. Man vgl. noch die Darstellung von Caspary im Bulletin des Sciences math. et astron. (2) t. 13 (1889), eine andere von Darboux im 4. Teile seiner Théorie générale des surfaces und endlich zwei Aufsätze von Marcolongo im Jornal de Sciencias mathem. e astron. vol. 14 (1901), p. 161 und Annali di Matematica (2) vol. 26 (1897), p. 101. In der zitierten Arbeit hat Caspary zuerst die Parameter α, β, γ, δ, die sich auf Gauß und Weierstraß zurückverfolgen lassen, systematisch verwendet, die dann von Klein und Sommerfeld (Theorie des Kreisels, Leipzig, 1. Heft 1897) in ihrer ganzen Bedeutung für die Theorie der Rotationen erkannt wurden. Vgl. auch die große Arbeit von Study, Math. Annalen, Bd. 39 (1891), S. 441 und zwei neu erschienene Aufsätze von A. Schoenflies, Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 18 (1909), S. 456 und Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, vol. 29 (1910); außerdem Math. Encyklopädie IV 1, S. 208 ff.

1) Nouvelles Annales (3) t. 1 (1882) p. 296.

nur seinen Sinn vertauscht hat. Wir lassen auch noch S um d_2 eine halbe Umdrehung ausführen, so vertauscht a_{12} aufs neue nur seinen Sinn und d_1 geht in d über, also erhalten wir S_2. Die beiden halben Umdrehungen sind der Schraubung äquivalent. Das gleiche führen wir für a_{23} und a_{31} aus, dann sind aber um die gemeinsamen Normalen d_2 und d_3 zwei halbe Umdrehungen hintereinander ausgeführt, die sich beide Male aufheben und dann heben sich auch die übrig bleibenden halben Umdrehungen um d_1 auf.

Aus der Lage S gehen die drei Lagen S_1, S_2, S_3, welche das starre System bei den drei Schraubungen in zyklischer Reihenfolge annimmt, durch halbe Umdrehungen um d_1, d_2, d_3 hervor und diese drei Lagen sind also symmetrisch zu S bezüglich der Geraden d_1, d_2, d_3. S_1, S_2, S_3 sind aber drei allgemeine Lagen des starren Systems, es gilt also von drei solchen Lagen der Satz, daß sie zu derselben vierten Lage symmetrisch bezüglich dreier Geraden sind.

2. Aufgabe. *Drei Rotationen mit den Winkeln $2\varepsilon_1$, $2\varepsilon_2$, $2\varepsilon_3$ um drei durch einen Punkt O gehende und zueinander senkrechte Achsen zu einer Rotation zu vereinigen.*

Auflösung. Wir wählen die drei Achsen zu Koordinatenachsen, dann haben wir hier zu setzen:

$$\begin{aligned}
\varkappa_1 &= \cos\varepsilon_1, & \lambda_1 &= \sin\varepsilon_1, & \mu_1 &= 0, & \nu_1 &= 0,\\
\varkappa_2 &= \cos\varepsilon_2, & \lambda_2 &= 0, & \mu_2 &= \sin\varepsilon_2, & \nu_2 &= 0,\\
\varkappa_3 &= \cos\varepsilon_3, & \lambda_3 &= 0, & \mu_3 &= 0, & \nu_3 &= \sin\varepsilon_3.
\end{aligned}$$

Wenden wir nun zweimal hintereinander die Formeln (30) an, so finden wir für die Parameter der resultierenden Rotation

$$\begin{aligned}
\varkappa &= \cos\varepsilon_1 \cos\varepsilon_2 \cos\varepsilon_3 - \sin\varepsilon_1 \sin\varepsilon_2 \sin\varepsilon_3,\\
\lambda &= \sin\varepsilon_1 \cos\varepsilon_2 \cos\varepsilon_3 - \cos\varepsilon_1 \sin\varepsilon_2 \sin\varepsilon_3,\\
\mu &= \cos\varepsilon_1 \sin\varepsilon_2 \cos\varepsilon_3 - \sin\varepsilon_1 \cos\varepsilon_2 \sin\varepsilon_3,\\
\nu &= \cos\varepsilon_1 \cos\varepsilon_2 \sin\varepsilon_3 - \sin\varepsilon_1 \sin\varepsilon_2 \cos\varepsilon_3.
\end{aligned}$$

3. Aufgabe. *Eine Rotation mit gegebenen Parametern $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ in drei Rotationen um drei zueinander senkrechte Achsen zu zerlegen*

Auflösung. Aus den Formeln der vorigen Aufgabe ergibt sich

$$\begin{aligned}
2(\varkappa\lambda + \mu\nu) &= \sin 2\varepsilon_1 \cos 2\varepsilon_2,\\
2(\varkappa\mu - \nu\lambda) &= \sin 2\varepsilon_2,\\
2(\varkappa\nu + \lambda\mu) &= \sin 2\varepsilon_3 \cos 2\varepsilon_2.
\end{aligned}$$

Außerdem wird

$$\varkappa^2+\lambda^2-\mu^2-\nu^2=\cos 2\varepsilon_1 \cos 2\varepsilon_2,\ \varkappa^2-\lambda^2-\mu^2+\nu^2=\cos 2\varepsilon_3 \cos 2\varepsilon_2,$$

und somit ergibt sich

$$\operatorname{tang} 2\varepsilon_1 = 2\,\frac{\varkappa\lambda+\mu\nu}{\varkappa^2+\lambda^2-\mu^2-\nu^2},$$

$$\sin 2\varepsilon_2 = 2(\varkappa\mu-\lambda\nu),$$

$$\operatorname{tang} 2\varepsilon_3 = 2\,\frac{\varkappa\nu+\lambda\mu}{\varkappa^2-\lambda^2-\mu^2+\nu^2}.$$

Damit sind die Rotationswinkel $2\varepsilon_1$, $2\varepsilon_2$, $2\varepsilon_3$ der Drehungskomponenten bestimmt.

4. Aufgabe. *Zu beweisen, daß in der Determinante der Koeffizienten in den Gleichungen* (9) *jedes Element gleich der adjungierten Unterdeterminante wird.*

Auflösung. Zunächst ist klar, daß auch die Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ ein Rechtssystem bilden müssen, es wird also

$$\mathfrak{e}_1 \wedge \mathfrak{e}_2 \times \mathfrak{e}_3 = +1.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber gleich der Determinante der Koeffizienten, also hat diese Determinante den Wert $+1$.

Multiplizieren wir jetzt die Gleichungen der Reihe nach zuerst mit a_1, b_1, c_1, darauf mit a_2, b_2, c_2, schließlich mit a_3, b_3, c_3 und addieren sie jedesmal, so ergibt sich mit Rücksicht auf die zwischen den Koeffizienten bestehenden Beziehungen

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = x_1,$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = y_1,$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = z_1.$$

Diese Gleichungen bilden aber die Auflösung der Gleichungen (9) nach x_1, y_1, z_1 und beachtet man die für diese Auflösung geltende allgemeine Regel, so folgt die Richtigkeit der Behauptung; z. B. ist $a_1 = b_2 c_3 - b_3 c_2$ usw.

5. Aufgabe. *Die Achse einer Rotation um O unmittelbar aus den Gleichungen* (9) *herzuleiten.*

Auflösung. Für einen Punkt der Achse muß

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad z = z_1$$

werden. Wir erhalten also die drei Gleichungen

$$(a_1-1)x + a_2 y + a_3 z = 0,$$

$$b_1 x + (b_2-1) y + b_3 z = 0,$$

$$c_1 x + c_2 y + (c_3-1) z = 0.$$

Da infolge der Relationen zwischen den Koeffizienten aber

$$b_2c_3 - b_3c_2 = a_1, \quad b_3c_1 - b_1c_3 = a_2, \quad b_1c_2 - b_2c_1 = a_3$$

wird, ergibt sich aus der zweiten und dritten Gleichung

$$x : y : z = (1 + a_1 - b_2 - c_3) : (a_2 + b_1) : (a_3 + c_1)$$

und wenn wir hierin die Werte (20) einsetzen und (18) berücksichtigen,

$$x : y : z = 4\lambda^2 : 4\lambda\mu : 4\lambda\nu = \lambda : \mu : \nu.$$

Statt der vorstehenden Proportion für x, y, z hätte man auch eine der folgenden beiden analogen wählen können:

$$x : y : z = (b_1 + a_2) : (1 - a_1 + b_2 - c_3) : (b_3 + c_2),$$
$$x : y : z = (c_1 + a_3) : (c_2 + b_3) : (1 - a_1 - b_2 + c_3).$$

Aus den ersten beiden dieser drei Proportionen kann man aber unmittelbar ableiten

$$x^2 : y^2 = (1 + a_1 - b_2 - c_3) : (1 - a_1 + b_2 - c_3)$$

oder vervollständigt

$$x^2 : y^2 : z^2 = (1 + a_1 - b_2 - c_3) : (1 - a_1 + b_2 - c_3) : (1 - a_1 - b_2 + c_3).$$

6. Aufgabe. *Die Formeln hinzuschreiben, die aus* (20) *durch Einführung der aus* (19) *hervorgehenden Winkel* φ, ψ, ϑ *entstehen, mit anderen Worten die Koeffizienten in der orthogonalen Substitution* (9) *auszudrücken durch die Eulerschen Winkel* φ, ψ, ϑ.

Auflösung. Man findet aus (19) und (17)

$$\varkappa = \frac{1}{2}(\alpha + \delta) = \cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\psi + \varphi}{2},$$
$$\lambda = \frac{1}{2i}(\gamma + \beta) = \sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\psi - \varphi}{2},$$
$$\mu = \frac{1}{2}(\gamma - \beta) = \sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi - \varphi}{2},$$
$$\nu = \frac{1}{2i}(\alpha - \delta) = \cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi + \varphi}{2}.$$

Führt man diese Werte in (20) ein, so ergibt sich

$$a_1 = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta,$$
$$a_2 = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta,$$
$$a_3 = \sin\varphi\sin\vartheta,$$
$$b_1 = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta,$$
$$b_2 = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta,$$
$$b_3 = \cos\varphi\sin\vartheta,$$
$$c_1 = \sin\psi\sin\vartheta, \quad c_2 = -\cos\psi\sin\vartheta, \quad c_3 = \cos\vartheta.$$

7. Aufgabe. *Die selbständige Bedeutung der Winkel φ, ψ, ϑ zu entwickeln.*

Auflösung. Nach den zuletzt gefundenen Formeln wird zunächst, da c_3 der Cosinus des Winkels zwischen der ursprünglichen und der gedrehten z-Achse ist, ϑ der Winkel selbst zwischen diesen beiden Achsen. Wir führen jetzt die gemeinsame Normale der beiden Achsen ein, die wir als die Knotenlinie bezeichnen. Dann ergibt sich aus zwei sphärischen Dreiecken, deren Ecken aus der Kugel um O durch die Knotenlinie und die x- und z-Achse, das eine Mal in der ursprünglichen, das andere Mal in der gedrehten Lage, ausgeschnitten werden, da c_1 der Cos. des Winkels zwischen der ursprünglichen z- und der gedrehten x-Achse, a_3 der Cos. des Winkels zwischen der ursprünglichen x- und der gedrehten z-Achse ist, daß der Winkel gegen die gedrehte x-Achse gleich ψ und der Winkel gegen die ursprüngliche x-Achse gleich φ wird.

Führt man hintereinander die Substitutionen aus

$$x_2 = \cos\psi\, x_1 - \sin\psi\, y_1, \quad y_2 = \sin\psi\, x_1 + \cos\psi\, y_1, \quad z_2 = z_1,$$

$$x_3 = x_2, \quad y_3 = \cos\vartheta\, y_2 + \sin\vartheta\, z_2, \quad z_3 = -\sin\vartheta\, y_2 + \cos\vartheta\, z_2,$$

$$x = \cos\varphi\, x_3 + \sin\varphi\, y_3, \quad y = -\sin\varphi\, x_3 + \cos\varphi\, y_3, \quad z = z_3,$$

so ergibt sich durch ihre Zusammenfassung eine lineare Transformation, deren Koeffizienten die in der vorigen Aufgabe bestimmten Werte sind; φ, ψ, ϑ erscheinen so als die Winkel dreier Drehungen um fest bestimmte Achsen, welche die vorliegende Drehung ersetzen. Vgl. Klein und Sommerfeld, Theorie des Kreisels I, S. 19.

8. Aufgabe. *Die geometrische Festlegung der aus zwei gegebenen Rotationen resultierenden Rotation auf Grund der Formeln* (30) *zusammen mit den Gleichungen* (27) *und* (28) *abzuleiten.*

Auflösung. Aus der ersten der Formeln (30) ergibt sich zunächst die Gleichung

$$\cos\frac{\omega}{2} = \cos\frac{\omega_1}{2}\cos\frac{\omega_2}{2} - \sin\frac{\omega_1}{2}\sin\frac{\omega_2}{2}\cos\Phi,$$

wenn Φ den Winkel zwischen den Achsen der beiden gegebenen Drehungen bedeutet. Multiplizieren wir die drei übrigen Gleichungen (30) der Reihe nach mit λ_1, μ_1, ν_1 und addieren sie, so erhalten wir

$$\sin\frac{\omega}{2}\cos\Phi_1 = \cos\frac{\omega_1}{2}\sin\frac{\omega_2}{2}\cos\Phi + \sin\frac{\omega_1}{2}\cos\frac{\omega_2}{2},$$

und analog

$$\sin\frac{\omega}{2}\cos\Phi_2 = \cos\frac{\omega_1}{2}\sin\frac{\omega_2}{2} + \sin\frac{\omega_1}{2}\cos\frac{\omega_2}{2}\cos\Phi,$$

wenn Φ_1, Φ_2 die Winkel bedeuten, welche die Achse der resultierenden Rotation mit den Achsen der gegebenen Rotationen einschließt. Die drei gefundenen Gleichungen zeigen aber, daß man $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$ als die Seiten und Φ, Φ_1, Φ_2 als die Nebenwinkel eines sphärischen Dreiecks, oder umgekehrt $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$ als die Nebenwinkel, Φ, Φ_1, Φ_2 als die Seiten eines supplementären Dreiecks, auffassen kann.

9. Aufgabe. *Die benutzten Eigenschaften der stereographischen Projektion abzuleiten.*

Auflösung. Wir führen auf der Kugel, deren Radius gleich 1 ist, die Länge λ und die Breite φ ein und haben dann für die Koordinaten eines Kugelpunktes

$$x = \cos\varphi \cos\lambda, \quad y = \cos\varphi \sin\lambda, \quad z = \sin\varphi,$$

oder

$$\xi = \cos\varphi e^{i\lambda}, \quad \zeta = -\sin\varphi.$$

In der Äquatorebene führen wir Polarkoordinaten r, θ ein und haben dann, wenn u, v die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes bedeuten,

$$w = u + iv = re^{i\theta}.$$

Bei der Projektion aus dem Pol S der Kugel, für den $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ergibt sich nun die Beziehung

$$\theta = \lambda, \quad r = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \tag{a}$$

oder

$$r = \frac{\cos\varphi}{1 - \sin\varphi}. \tag{b}$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $e^{i\theta} = e^{i\lambda}$, so wird sie

$$w = \frac{\xi}{\zeta + 1}.$$

Die Abbildung ist ähnlich in den kleinsten Teilen, wenn einer Zerlegung der Kugeloberfläche in unendlich kleine Quadrate wieder eine quadratische Felderung der Bildebene entspricht. Die Quadrate auf der Kugel seien hier durch Meridiane und Breitenparallele, die Quadrate in der Bildebene entsprechend von Strahlen durch O und konzentrischen Kreisen um O begrenzt. Die Seiten eines Quadrates auf der Kugel sind dann $d\varphi$ und $\cos\varphi\, d\lambda$, so daß

$$d\varphi = \cos\varphi\, d\lambda$$

wird. In der Bildebene ergibt sich entsprechend

$$dr = r d\theta,$$

es muß also, da $d\theta = d\lambda$ ist, $\frac{dr}{r} = \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$ sein, was in der Tat aus (b) sofort folgt.

10. Aufgabe. *Die Gleichungen für eine Schraubung um eine Achse mit gegebenen Koordinaten A, B, C, L, M, N aufzustellen.*

Auflösung. Da sich jede Schraubung aus einer Rotation um den Koordinatenursprung und einer Translation zusammensetzen läßt, sind die gesuchten Gleichungen von der Form

$$x_1 = a_0 + a_1 x + b_1 y + c_1 z,$$
$$y_1 = b_0 + a_2 x + b_2 y + c_2 z,$$
$$z_1 = c_0 + a_3 x + b_3 y + c_3 z,$$

wobei die Koeffizienten a_1, a_2, a_3, b_1 usw. durch Gleichungen von der Form (20) gegeben sind.

Dabei haben wir

$$\lambda = RA, \quad \mu = RB, \quad \nu = RC$$

anzunehmen, und da $A^2 + B^2 + C^2 = 1$ sein soll, finden wir mit Rücksicht auf (18)

$$R = \sqrt{1 - \varkappa^2} = \sin\frac{\omega}{2}\cdot$$

Durch Hinzunahme des Rotationswinkels ω sind also $\varkappa$, λ, μ, ν und damit 9 der 12 Koeffizienten bestimmt.

Um auch die letzten drei Koeffizienten zu berechnen, hat man zu beachten, daß bei der Rotation um die Schraubenachse der Punkt P mit den Koordinaten $-\varrho L$, $-\varrho M$, $-\varrho N$ in den Punkt P' mit den Koordinaten $+\varrho L$, $+\varrho M$, $+\varrho N$ übergeht, wenn $\varrho = \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}$ gesetzt wird, denn die durch den Ursprung O halbierte Strecke PP' ist senkrecht zu der Rotationsachse und zu dem aus O auf die Rotationsache gefällten Lote OP_0, so daß $PP_0 = P'P_0$ und $\sphericalangle PP_0O = \sphericalangle OP_0P' = \frac{1}{2}\omega$ wird. Damit ergibt sich

$$a_0 = [kA + (a_1 + 1)L + b_1 M + c_1 N]\varrho,$$
$$b_0 = [kB + a_2 L + (b_2 + 1)M + c_2 N]\varrho,$$
$$c_0 = [kC + a_3 L + b_3 M + (c_3 + 1)N]\varrho,$$

wenn $k = \tau : \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}$ gesetzt wird und τ die Größe der Translation bedeutet, so daß $k\varrho A$, $k\varrho B$, $k\varrho C$ die Komponenten der in der Schraubung enthaltenen Translation sind. Die vorstehenden Ausdrücke reduzieren sich bedeutend mit Hilfe der identischen Relation

$$AL + BM + CN = 0,$$

aus der auch

$$\lambda L + \mu M + \nu N = 0$$

folgt. Es ergibt sich dann

$$a_0 = k\varrho A + 2R(\varkappa L - \nu M + \mu N),$$
$$b_0 = k\varrho B + 2R(\varkappa M - \lambda N + \nu L),$$
$$c_0 = k\varrho C + 2R(\varkappa N - \mu L + \lambda M).$$

11. Aufgabe. *Die aus einem Rotationspaar resultierende Translation zu bestimmen.*

Auflösung. Man lasse zunächst die Achse von einer Rotation des Paares durch den Koordinatenursprung hindurchgehen und gebe der anderen Achse die Koordinaten A, B, C, L, M, N, dann lassen sich sofort die Resultate der vorigen Aufgabe verwenden, indem man τ und damit k gleich 0 annimmt. Die Komponenten a_0, b_0, c_0 der Verschiebung des Koordinatenursprungs geben dann sofort die Komponenten der gesuchten Translation, und beachten wir, daß

$$\varkappa = \cos\frac{\omega}{2}, \quad R = \sin\frac{\omega}{2}$$

ist, so finden wir sofort

$$a_0 = 2\sin\frac{\omega}{2}\left[\cos\frac{\omega}{2}L - \sin\frac{\omega}{2}(CM - BN)\right],$$
$$b_0 = 2\sin\frac{\omega}{2}\left[\cos\frac{\omega}{2}M - \sin\frac{\omega}{2}(AN - CL)\right],$$
$$c_0 = 2\sin\frac{\omega}{2}\left[\cos\frac{\omega}{2}N - \sin\frac{\omega}{2}(BL - AM)\right].$$

Sind nun die Koordinaten der beiden Rotationsachsen allgemeiner A, B, C, L_1, M_1, N_1 und A, B, C, L_2, M_2, N_2, so geht man zu dem zuerst behandelten Spezialfalle über, indem man das Koordinatensystem so parallel verschiebt, daß der Ursprung auf die erste Rotationsachse fällt. Dabei bleiben A, B, C ungeändert, L_1, M_1, N_1 werden 0 und L_2, M_2, N_2 mögen in L, M, N übergehen. Dann ergibt sich einfach

$$L = L_2 - L_1, \quad M = M_2 - M_1, \quad N = N_2 - N_1.$$

Führt man diese Werte in den vorstehenden Gleichungen ein, so erhält man die allgemeinen Ausdrücke für die Komponenten der Verschiebung.

Für die Größe der Verschiebung ergibt sich mit Rücksicht auf die Beziehung $AL + BM + CN = 0$

$$\tau = \sqrt{a_0^2 + b_0^2 + c_0^2} = 2\sin\frac{\omega}{2}\sqrt{L^2 + M^2 + N^2},$$

oder, da $\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$ gleich dem Abstande d der beiden Rotationsachsen ist,

$$\tau = 2d \sin\frac{\omega}{2}.$$

12. Aufgabe. *Den folgenden Satz von Rodrigues*[1]) *zu beweisen: Eine gegebene Schraubenbewegung läßt sich auf unendlich viele Arten durch die Aufeinanderfolge zweier Drehungen ersetzen. Dabei hat das sechsfache Volumen, das die auf den Rotationsachsen als Strecken abgetragenen Sinus der halben zugehörigen Rotationswinkel als zwei Gegenkanten bestimmen, einen konstanten Wert.*

Auflösung. Wir beweisen den Satz so, daß wir von den beiden Rotationen ausgehen und die Schraubung suchen, die sich aus ihnen zusammensetzt. Dabei wollen wir für die Achse der einen Rotation die z-Achse wählen, und ersetzen die andere Rotation durch eine Rotation um den Koordinatenursprung zusammen mit einer Translation. Die Achse der letzteren Drehung habe die Koordinaten A_1, B_1, C_1, L_1, M_1, N_1, ω_1 sei der Rotationswinkel, dagegen ω_2 der Winkel der Rotation um die z-Achse. Dann haben von den Parametern der resultierenden Rotation, deren Winkel ω sei, die drei letzten auf Grund der Formeln (30), da hier $\varkappa_2 = \cos\frac{\omega_1}{2}$, $\lambda_2 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\nu_2 = \sin\frac{\omega_1}{2}$ wird, folgende Werte:

$$\lambda = \sin\frac{\omega_1}{2}\left(A_1 \cos\frac{\omega_2}{2} + B_1 \sin\frac{\omega_2}{2}\right),$$

$$\mu = \sin\frac{\omega_1}{2}\left(- A_1 \sin\frac{\omega_2}{2} + B_1 \cos\frac{\omega_2}{2}\right),$$

$$\nu = \cos\frac{\omega_1}{2} \sin\frac{\omega_2}{2} + C_1 \sin\frac{\omega_1}{2} \cos\frac{\omega_2}{2}.$$

Die Richtungskosinus der Achse dieser resultierenden Drehung und damit auch der gesuchten Schraubung verhalten sich wie $\lambda : \mu : \nu$; ferner wird $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2} = \sin\frac{1}{2}\omega$. Projizieren wir die aus der ersten Rotation herausgeholte Translation, deren Komponenten a_0, b_0, c_0 die aus der vorigen Aufgabe hervorgehenden Werte haben, auf die Achse der resultierenden Drehung, so erhalten wir die Größe τ der in der Schraubung steckenden Translation längs der Schraubenachse.

So wird $\tau = (a_0\lambda + b_0\mu + c_0\nu) : \sin\frac{\omega}{2}$ und nach dem Resultat der vorigen Aufgabe erhalten wir dann

1) Journal de Mathém., t. 5 (1840), p. 380.

$$\tau \sin\frac{\omega}{2} = 2\sin\frac{\omega_1}{2}\Big\{\Big[\cos\frac{\omega_1}{2} L_1 - \sin\frac{\omega_1}{2}(C_1 M_1 - B_1 N_1)\Big]\lambda$$
$$+ \Big[\cos\frac{\omega_1}{2} M_1 - \sin\frac{\omega_1}{2}(A_1 N_1 - C_1 L_1)\Big]\mu$$
$$+ \Big[\cos\frac{\omega_1}{2} N_1 - \sin\frac{\omega_1}{2}(B_1 L_1 - A_1 M_1)\Big]\nu\Big\}.$$

Bei der Ausrechnung auf Grund der vorhergehenden Formeln für λ, μ, ν vereinfacht sich die rechte Seite zu

$$2\sin\frac{\omega_1}{2}\sin\frac{\omega_2}{2} N_1,$$

oder wenn wir auf die Bedeutung von N_1 Rücksicht nehmen, wird

$$\tau \sin\frac{\omega}{2} = 2\sin\frac{\omega_1}{2}\sin\frac{\omega_2}{2}\, d\sin\varphi$$

indem d den kürzesten Abstand der beiden Rotationsachsen, φ den Winkel, unter dem sie sich kreuzen, bezeichnet. Die rechte Seite der vorstehenden Gleichung ist aber das Doppelte des in der Aufgabe genannten Wertes, und dieser hängt sonach in der Tat nur von der Größe τ der Translation und dem Winkel ω der Rotation in der resultierenden Schraubung ab, w. z. b. w.

Fünftes Kapitel.

Die momentane Bewegung eines starren Systems.

1. Geschwindigkeit und Beschleunigung bei der Bewegung eines starren Körpers. Es seien O, P, Q, R irgend vier Punkte des starren Systems oder Körpers, wenn wir uns das System so erweitert denken, daß es einen Teil des Raumes kontinuierlich erfüllt. Wir führen die Vektoren ein

$$P - O = p, \quad Q - O = q, \quad R - O = r, \tag{1}$$

dann liefert die Starrheit des Systems die folgenden Bedingungen

$$p^2 = \text{konst.}, \; q^2 = \text{konst.}, \; p \times q = \text{konst.}, \; p \times q \wedge r = \text{konst.} \tag{2}$$

Differenzieren wir die ersten drei nach der Zeit, so ergibt sich

$$p \times \dot{p} = 0, \quad q \times \dot{q} = 0, \quad \dot{p} \times q + p \times \dot{q} = 0. \tag{3}$$

Im allgemeinen sind die beiden Glieder in der letzten Gleichung nicht einzeln gleich Null. Wir können dann setzen

$$\Omega = -\frac{\dot{p} \wedge \dot{q}}{p \times \dot{q}} = \frac{\dot{p} \wedge \dot{q}}{\dot{p} \times q}. \tag{4}$$

Es ist sofort zu sehen, daß mod Ω die Dimension $[t^{-1}]$ hat. Aus der letzten Gleichung ergibt sich auf Grund der Formel für das doppelte Vektorprodukt [Gleichung (20) in Kap. I] und der Gleichungen (3)

$$\Omega \wedge p = -\frac{1}{p \times \dot{q}} \{(p \times \dot{p})\,\dot{q} - (p \times \dot{q})\,\dot{p}\} = \dot{p},$$

$$\Omega \wedge q = \frac{1}{\dot{p} \times q} \{(q \times \dot{p})\,\dot{q} - (q \times \dot{q})\,\dot{p}\} = \dot{q}.$$

Auch für einen beliebigen anderen Punkt R wird aber

$$\dot{r} = \Omega \wedge r. \tag{5}$$

Zum Beweis differenzieren wir die letzte der Gleichungen (2) nach der Zeit. Das erste Glied, das wir erhalten, wird dann nach Gleichung (23) in Kap. I

$$\begin{aligned} \dot{p} \times q \wedge r &= (\Omega \wedge p) \times (q \wedge r) \\ &= (\Omega \times q)\,(p \times r) - (\Omega \times r)\,(p \times q). \end{aligned}$$

Das zweite Glied wird auf dieselbe Weise

$$p \times \dot{q} \wedge r = \dot{q} \times r \wedge p = (\Omega \times r)(p \times q) - (\Omega \times p)(q \times r)$$

und das dritte Glied analog, wenn Ω_1 aus Ω durch Vertauschung von p und r entsteht,

$$p \times r \wedge \dot{r} = (\Omega_1 \times p)(q \times r) - (\Omega_1 \times q)(p \times r),$$

wir finden demnach durch Addition der drei vorstehenden Gleichungen, da die Summe ihrer linken Seiten gemäß (2) verschwindet

$$(\Omega_1 - \Omega) \times \{(q \times r)p - (p \times r)q\} = 0.$$

Vertauschen wir p und r, so vertauschen sich Ω_1 und Ω, wir erhalten also auch

$$(\Omega_1 - \Omega) \times \{(q \times p)r - (r \times p)q\} = 0.$$

Wir können nun die drei Vektoren p, q, r so annehmen, daß sie nicht alle drei einer Ebene angehören und daß keine zwei von ihnen aufeinander senkrecht stehen, also $p \times q$, $p \times r$, $q \times r \neq 0$ sind, dann würden die beiden vorstehenden Gleichungen, solange $\Omega_1 - \Omega \neq 0$, fordern, daß dieser Vektor $\Omega_1 - \Omega$ auf den drei Vektoren p, q, r senkrecht steht, was unmöglich ist. Also muß $\Omega_1 = \Omega$ sein und mithin Ω ungeändert bleiben, wenn man p durch r und damit $\dot{p}$ durch $\dot{r}$ ersetzt. So ist die Gleichung (5) bewiesen.

Es ergibt sich demnach allgemein, wenn Ω einen von der momentanen Bewegung des ganzen Körpers abhängenden Vektor und O einen festen Punkt des Körpers bezeichnet, für jeden beliebigen Punkt P des Körpers die Gleichung

$$\dot{P} = \dot{O} + \Omega \wedge (P - O). \tag{6}$$

Diese Formel ist von grundlegender Bedeutung für die Kinematik der starren Systeme.

Führen wir drei fundamentale Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 ein, die ein orthogonales Rechtssystem bilden, und nennen wir x, y, z die Koordinaten von P, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ die Komponenten von $\dot{P}$, u, v, w die Komponenten von $\dot{O}$, p, q, r die Komponenten von Ω, so ergeben sich aus der vorstehenden Formel die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= u + qz - ry,\\ \dot{y} &= v + rx - pz,\\ \dot{z} &= w + py - qx.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Nehmen wir in (5) für r der Reihe nach die Vektoren e_1, e_2, e_3, so erhalten wir die Gleichungen

$$\dot{e}_1 = \Omega \wedge e_1, \quad \dot{e}_2 = \Omega \wedge e_2, \quad \dot{e}_3 = \Omega \wedge e_3, \tag{8}$$

die häufige Anwendung finden. Aus der zweiten von ihnen erhalten wir

$$e_3 \times \dot{e}_2 = e_3 \times \Omega \wedge e_2 = \Omega \times e_2 \wedge e_3 = \Omega \times e_1 = p,$$

also wird

$$p = e_3 \times \dot{e}_2, \quad q = e_1 \times \dot{e}_3, \quad r = e_2 \times \dot{e}_1. \tag{9}$$

Führen wir nun durch die Gleichungen (8) des vorigen Kapitels drei im Raume feste Fundamentalvektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ ein, so ergibt sich aus (8) sofort

$$\left.\begin{aligned}\dot{a}_1 &= q_1 a_3 - r_1 a_2, & \dot{a}_2 &= r_1 a_1 - p_1 a_3, & \dot{a}_3 &= p_1 a_2 - q_1 a_1,\\ \dot{b}_1 &= q_1 b_3 - r_1 b_2, & \dot{b}_2 &= r_1 b_1 - p_1 b_3, & \dot{b}_3 &= p_1 b_2 - q_1 b_1,\\ \dot{c}_1 &= q_1 c_3 - r_1 c_2, & \dot{c}_2 &= r_1 c_1 - p_1 c_3, & \dot{c}_3 &= p_1 c_2 - q_1 c_1,\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

wenn p_1, q_1, r_1 die Komponenten von Ω nach den festen Achsen sind; a_1, a_2, a_3 sind ja die Komponenten von e_1 nach diesen Achsen usw.

Andererseits wird aber

$$\dot{e}_1 = \Omega \wedge e_1 = \Omega \wedge (e_2 \wedge e_3) = (\Omega \times e_3)e_2 - (\Omega \times e_2)e_3 = re_2 - qe_3$$

usw., wir haben also auch

$$\left.\begin{aligned}\dot{a}_1 &= rb_1 - qc_1, & \dot{a}_2 &= rb_2 - qc_2, & \dot{a}_3 &= rb_3 - qc_3,\\ \dot{b}_1 &= pc_1 - ra_1, & \dot{b}_2 &= pc_2 - ra_2, & \dot{b}_3 &= pc_3 - ra_3,\\ \dot{c}_1 &= qa_1 - pb_1, & \dot{c}_2 &= qa_2 - pb_2, & \dot{c}_3 &= qa_3 - pb_3.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$ [1]

1) Die Formeln (7) sind für den Fall, daß O fest ist, von Euler gegeben worden (Mémoires de l'Académie de Berlin 1750, p. 185, siehe dort p. 205). Auch die Formeln (10) und (11), die häufig nach Poisson benannt werden, stammen von Euler (Mém. de Berlin 1758, p. 153, s. dort p. 171). Sie drücken die Derivierten der neun Richtungskosinus des im Körper festen Achsenkreuzes durch diese Richtungskosinus selbst und die Richtungskosinus der momentanen Drehachse in dem festen und in dem mit dem Körper beweglichen Koordinatensysteme aus.

Differenzieren wir die Grundgleichung (6) noch einmal nach der Zeit, so ergibt sich

$$\ddot{P} = \ddot{O} + \dot{\Omega} \wedge (P - O) + \Omega(\dot{P} - \dot{O}).$$

Das letzte Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung wird aber wiederum nach (6) und Kap. I (20)

$$\Omega \wedge \{\Omega \wedge (P - O)\} = [\Omega \times (P - O)] \cdot \Omega - \Omega^2 \cdot (P - O).$$

Wir setzen nun, indem wir diese Gleichung skalar mit $P - O$ multiplizieren,

$$2\varphi = -[\Omega \wedge (P - O)]^2 = [\Omega \times (P - O)]^2 - \Omega^2 (P - O)^2,$$

und bilden, indem wir φ als Funktion des Punktes P allein ansehen,

$$\delta\varphi = \operatorname{grad}\varphi \times \delta P = \{[\Omega \times (P - O)] \cdot \Omega - \Omega^2 \cdot (P - O)\} \times \delta P.$$

Es wird also

$$\operatorname{grad}\varphi = [\Omega \times (P - O)] \cdot \Omega - \Omega^2 \cdot (P - O)$$

und damit

$$\ddot{P} = \ddot{O} + \dot{\Omega} \wedge (P - O) + \operatorname{grad}\varphi. \tag{12}$$

In dem gegen den Körper festen Koordinatensystem wird nach der oben gegebenen Definition von φ, da $\Omega^2 = \omega^2$

$$2\varphi = (px + qy + rz)^2 - \omega^2(x^2 + y^2 + z^2),$$

und nennen wir demnach $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ die Komponenten des Beschleunigungsvektors $\ddot{P}$, $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ die von $\dot{O}$, so wird

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= \dot{u} + \dot{q}z - \dot{r}y + \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \\ \ddot{y} &= \dot{v} + \dot{r}x - \dot{p}z + \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= \dot{w} + \dot{p}y - \dot{q}x + \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Den Vektor Ω können wir schließlich mit der Rotation von $\dot{P}$ nach der in Kapitel II gegebenen Definition in einfache Beziehung setzen. Indem wir Ω als konstant ansehen, ergibt sich aus (5)

$$d\dot{P} = \Omega \wedge dP, \quad \delta\dot{P} = \Omega \wedge \delta P,$$

also

$$d\dot{P} \times \delta P - \delta \dot{P} \times dP = \Omega \wedge dP \times \delta P - \Omega \wedge \delta P \times dP$$
$$= 2\Omega \times dP \wedge \delta P,$$

woraus

$$\Omega = \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} \dot{P}, \tag{14}$$

wir nennen deshalb Ω den Rotationsvektor.

Wir setzen weiter

$$\Phi = \operatorname{rot} \dot{P} \wedge (P - O) \tag{15}$$

und bezeichnen diesen Vektor als den Zentrifugalvektor des Punktes P. Dann ergibt sich einfach

$$\varphi = -2\Phi^2. \tag{16}$$

2. Absolute und relative Bewegung. Wir fassen wieder zwei Fundamentalsysteme $O(e_1, e_2, e_3)$ und $O'(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3)$ ins Auge, von denen das erste, S, als beweglich, das zweite, S', als fest angesehen wird. Die Bewegung eines Punktes bezüglich S' heißt absolut, seine Bewegung bezüglich S relativ. Die Bewegung eines Punktes, der mit S starr verbunden ist, bezüglich S' bezeichnen wir als eine Drillung.

Wir wollen hier insbesondere das Verhältnis zwischen absoluter und relativer Bewegung näher erörtern. Indem wir mit x, y, z die Koordinaten des Punktes P im System S bezeichnen, setzen wir

$$P = O + xe_1 + ye_2 + ze_3,$$

und leiten daraus durch zweimalige Differentiation nach der Zeit ab:

$$\dot{P} = \dot{O} + x\dot{e}_1 + y\dot{e}_2 + z\dot{e}_3 + \dot{x}e_1 + \dot{y}e_2 + \dot{z}e_3,$$
$$\ddot{P} = \ddot{O} + x\ddot{e}_1 + y\ddot{e}_2 + z\ddot{e}_3 + 2(\dot{x}\dot{e}_1 + \dot{y}\dot{e}_2 + \dot{z}\dot{e}_3)$$
$$+ \ddot{x}e_1 + \ddot{y}e_2 + \ddot{z}e_3.$$

Wir deuten zunächst den Ausdruck für $\dot{P}$. Er besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil ergibt sich, wenn wir P als fest in dem beweglichen Systeme ansehen, er bedeutet also die Drillungsgeschwindigkeit von P, die wir mit $\dot{P}_s$ bezeichnen wollen. Der zweite Teil rührt her von der Bewegung

des Punktes gegen das System S, wir wollen ihn mit $\dot{P}_r$ bezeichnen. Er bedeutet die **Relativgeschwindigkeit**. Bezeichnen wir noch der größeren Deutlichkeit wegen die **absolute** Geschwindigkeit $\dot{P}$ mit $\dot{P}_a$, so ergibt sich demnach

$$\dot{P}_a = \dot{P}_s + \dot{P}_r, \tag{17}$$

d. h. **die absolute Geschwindigkeit ist die Resultante der Drillungs- und der Relativgeschwindigkeit.**

In genau analoger Weise drückt der erste Teil des Ausdruckes für $\ddot{P}$ die **Drillungsbeschleunigung** $\ddot{P}_s$ aus. Den zweiten Teil bezeichnen wir mit $\ddot{P}_c$ und nennen ihn die **Zentrifugalbeschleunigung**, wir setzen also

$$\ddot{P}_c = 2(\dot{x}\dot{e}_1 + \dot{y}\dot{e}_2 + \dot{z}\dot{e}_3);$$

der letzte Teil $\ddot{P}_r$ ist die **Relativbeschleunigung**, und schreiben wir wieder $\ddot{P}_a$ statt $\ddot{P}$, so erhalten wir

$$\ddot{P}_a = \ddot{P}_s + \ddot{P}_r + \ddot{P}_c, \tag{18}$$

d. h. **die absolute Beschleunigung ist die Resultante der Drillungs-, der Relativ- und der Zentrifugalbeschleunigung.**[1])

Auf Grund der Gleichungen (8) können wir $\ddot{P}_c$ schreiben wie folgt:

$$\ddot{P}_c = 2\Omega \wedge (\dot{x}e_1 + \dot{y}e_2 + \dot{z}e_3) = 2\Omega \wedge \dot{P}_r = \text{rot}\, \dot{P}_s \wedge \dot{P}_r. \tag{19}$$

Die Zentrifugalbeschleunigung ist das doppelte äußere Produkt des Rotationsvektors mit der Relativgeschwindigkeit.

Statt des Ausdruckes (18) läßt sich noch ein anderer für $\ddot{P}_a$ finden. Wir nehmen zu dem Zwecke den **Hodographen** der absoluten Bewegung von P, setzen also

$$Q = O' + \dot{P}_a.$$

Die absolute Beschleunigung von P wird die absolute Geschwindigkeit von Q; so zeigt sich, daß

$$\ddot{P}_a = \text{Relativgeschw. } Q + \text{Drillungsgeschw. } Q$$

1) Coriolis, Mémoire sur les équations du mouvement relatif, Journal de l'école polytechnique, cah. 24 (1835), p. 142.

ist, d. h. in Rücksicht auf die für die Drillungsgeschwindigkeit geltende Gleichung (6)

$$\ddot{P}_a = \text{Relativgeschw.}\, Q + \dot{O} + \Omega \wedge (Q - O).$$

Nehmen wir für Q den Punkt O', so wird seine absolute Geschwindigkeit gleich Null, also

$$0 = \text{Relativgeschw.}\, O' + \dot{O} + \Omega \wedge (O' - O).$$

Subtrahieren wir diese Gleichung von der vorhergehenden und setzen $Q - O' = \dot{P}_a$, so wird

$$\ddot{P}_a = \text{Relativgeschw.}\, \dot{P}_a + \Omega \wedge \dot{P}_a, \tag{20}$$

wobei $\dot{P}_a$ als Vektor des Hodographen zu deuten ist. Es wird also

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} + q\dot{z} - r\dot{y}, \\ \ddot{y} &= \frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}t} + r\dot{x} - p\dot{z}, \\ \ddot{z} &= \frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t} + p\dot{y} - q\dot{x}, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

wenn die geraden d eine Differentiation nach der Zeit in dem mit dem Körper beweglichen System bedeuten. Diese Formeln stammen von Bour.[1])

3. Zusammensetzung momentaner Bewegungen. Die Gleichung (17) läßt sich insbesondere auf den Fall anwenden, wo ein neues starres System S_1 sich gegen das selbst bewegliche System S bewegt und P ein Punkt dieses neuen Systems S_1 ist. Die wirkliche Geschwindigkeit $\dot{P}_a$ von P setzt sich dann aus den Geschwindigkeiten $\dot{P}_s$ und $\dot{P}_r$ zusammen, die P bei seinen zwei Teilbewegungen hat, und es ergibt sich so: die Geschwindigkeit eines Punktes des Systems ist die Resultante der Geschwindigkeiten des Punktes bei den Bewegungen, aus denen sich die resultierende Bewegung zusammensetzt. Daraus ergibt sich aber, daß es auf die Reihenfolge, in der die Bewegungen zusammengesetzt werden, nicht ankommt: momentane Bewegungen

1) Mémoire sur les mouvements relatifs, Journal de mathém. (2) vol. 8 (1863), p. 1.

sind stets vertauschbar. Diese Eigenschaft bildet einen wesentlichen Unterschied zwischen den endlichen und momentanen Bewegungen und liefert ein einfaches Mittel, gleichzeitige momentane Bewegungen zu einer einzigen zu vereinen.

Was zunächst die momentanen Translationen angeht, so bleibt für sie die oben (S. 83) für endliche Translationen gegebene Regel bestehen. Die momentanen Rotationen um einen festen Punkt O lassen sich sofort vereinigen auf Grund der Formel (6), in der jetzt $\dot{O} = 0$ anzunehmen ist. Es werden dann, wenn $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$ die einzelnen Rotationsvektoren sind, die zugehörigen Geschwindigkeiten eines und desselben Punktes

$$\Omega_1 \wedge (P - O), \quad \Omega_2 \wedge (P - O), \cdots.$$

Daraus folgt für die resultierende Geschwindigkeit der Wert

$$\Omega \wedge (P - O),$$

wenn

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \cdots$$

gesetzt wird: mehrere momentane Rotationen um denselben Punkt vereinigen sich zu einer Rotation um denselben Punkt, und der Rotationsvektor dieser letzteren ist die Resultante von den Rotationsvektoren der Teildrehungen.

Insbesondere läßt sich eine vorgelegte Rotation immer als die Resultante dreier Teildrehungen, deren Rotationsvektoren zueinander senkrecht sind, auffassen. Der Rotationsvektor einer Rotation fällt in die Rotationsachse und ist an Länge gleich der Winkelgeschwindigkeit der Rotation. Daraus folgt, daß die Winkelgeschwindigkeiten der Rotationskomponenten der Reihe nach

$$\omega\alpha, \quad \omega\beta, \quad \omega\gamma$$

sind, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit der vorgelegten Rotation und α, β, γ die Richtungskosinus ihrer Achse, bezogen auf die Achsen der Teildrehungen, sind.

Wir müssen auch noch den Fall von Rotationen mit parallelen Achsen behandeln und beginnen mit dem besonders einfachen Falle eines Rotationspaares, bei dem die Rotations-

vektoren entgegengesetzt gleich, also etwa gleich Ω und $-\Omega$ werden. Die resultierende Geschwindigkeit eines Punktes P wird dann, wenn O_1 und O_2 zwei Punkte der beiden Rotationsachsen sind,

$$\Omega \wedge (P - O_1) - \Omega \wedge (P - O_2) = \Omega \wedge (O_2 - O_1),$$

also unabhängig von P, und die resultierende Bewegung ist sonach eine Translation. Ihre Richtung ist senkrecht zu der Ebene, welche die beiden Rotationsachsen verbindet, und ihre Größe wird angegeben durch den Inhalt des Parallelogramms, das die beiden parallelen Rotationsvektoren als zwei Gegenseiten bestimmen.

Umgekehrt läßt sich eine vorgelegte Translation auf unendlich viele Arten durch die Rotationen eines Rotationspaares ersetzen.

Um nun zwei Rotationen zu vereinigen, deren Rotationsvektoren Ω_1, Ω_2 parallel, aber nicht entgegengesetzt gleich sind, bezeichnen wir wieder mit O_1, O_2 zwei Punkte auf den beiden Rotationsachsen und mit O einen Punkt auf der Verbindungslinie von O_1 und O_2, der so gewählt sei, daß wenn ω_1, ω_2 die mit bestimmtem Vorzeichen genommenen Winkelgeschwindigkeiten der gegebenen Drehungen bedeuten und sonach

$$\omega_2 \Omega_1 = \omega_1 \Omega_2$$

wird, die Gleichung besteht:

$$\omega_1 (O - O_1) = - \omega_2 (O - O_2).$$

Dann finden wir für die Geschwindigkeiten eines Punktes P bei der resultierenden Bewegung

$$\Omega_1 \wedge (P - O_1) + \Omega_2 \wedge (P - O_2)$$
$$= (\Omega_1 + \Omega_2) \wedge (P - O) + \Omega_1 \wedge (O - O_1) + \Omega_2 \wedge (O - O_2),$$

und da

$$\Omega_1 \wedge (O - O_1) = - \Omega_2 \wedge (O - O_2)$$

ist, wird die Geschwindigkeit

$$= \Omega \wedge (P - O),$$

wenn

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$$

gesetzt wird. Machen wir noch $\omega = \omega_1 + \omega_2$, so können wir die Relation, die O definiert, schreiben wie folgt:

$$\frac{O - O_1}{\omega_2} = \frac{O_2 - O}{\omega_1} = \frac{O_1 - O_2}{\omega},$$

und haben die Regel: Zwei momentane Drehungen um parallele Achsen setzen sich zu einer Drehung um eine parallele Achse zusammen, welche mit den ersten beiden in einer Ebene liegt und ihren Abstand im umgekehrten Verhältnisse zu den zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten teilt, während die Winkelgeschwindigkeit der resultierenden Drehung die algebraische Summe von den Winkelgeschwindigkeiten der beiden gegebenen Drehungen ist.

Wir wollen nun die Bewegung untersuchen, die aus zwei gleichzeitigen momentanen Rotationen um windschiefe Achsen resultiert; Ω_1 und Ω_2 seien deren Rotationsvektoren, O_1 und O_2 seien zwei beliebige Punkte auf ihren Achsen, dann erhalten wir wieder für die resultierende Geschwindigkeit eines Punktes P den Wert

$$\begin{aligned}\dot{P} &= \Omega_1 \wedge (P - O_1) + \Omega_2 \wedge (P - O_2)\\ &= (\Omega_1 + \Omega_2) \wedge (P - O) + \Omega_1 \wedge (O - O_1) + \Omega_2 \wedge (O - O_2)\end{aligned}$$

oder

$$\dot{P} = \Omega \wedge (P - O) + \dot{O},$$

wenn wir

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2, \quad \dot{O} = \Omega_1 \wedge (O - O_1) + \Omega_2 \wedge (O - O_2)$$

machen: die beiden Rotationen sind einer einzigen Rotation zusammen mit einer Translation äquivalent; diese Rotation ist dieselbe, die aus den beiden Rotationen resultiert, wenn man sie um denselben Punkt O ausführt, der Translationsvektor $\dot{O}$ dagegen ist abhängig von der Wahl des Punktes O und wird zufolge der zweiten der vorstehenden Gleichungen gefunden, indem man die Vektormomente der Rotationsvektoren beider Rotationen für den Punkt O addiert.

Die Richtungskosinus der Rotationsvektoren Ω_1 und Ω_2 seien $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, die Komponenten ihrer Vektormomente für den Punkt O $\omega_1\lambda_1, \omega_1\mu_1, \omega_1\nu_1$ und $\omega_2\lambda_2, \omega_2\mu_2, \omega_2\nu_2$, d. h. es seien $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \lambda_2, \mu_2, \nu_2$ die Koordinaten der beiden Rotationsachsen, dann werden die Komponenten des Translationsvektors, der durch Addition aus den Vektormomenten der Rotationsvektoren Ω_1 und Ω_2 folgen soll,

$$\omega\lambda = \omega_1\lambda_1 + \omega_2\lambda_2,$$
$$\omega\mu = \omega_1\mu_1 + \omega_2\mu_2,$$
$$\omega\nu = \omega_1\nu_1 + \omega_2\nu_2,$$

dagegen die Komponenten der resultierenden Rotation, die gleich $\Omega_1 + \Omega_2$ war,

$$\omega\alpha = \omega_1\alpha_1 + \omega_2\alpha_2,$$
$$\omega\beta = \omega_1\beta_1 + \omega_2\beta_2,$$
$$\omega\gamma = \omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2,$$

α, β, γ sind dabei die Richtungskosinus ihrer Achse, ω ist ihre Winkelgeschwindigkeit.

Die vorstehenden Formeln kann man auch so deuten, daß die resultierende Bewegung ersetzt ist durch drei Translationen mit den Geschwindigkeiten $\omega\lambda, \omega\mu, \omega\nu$ längs den Koordinatenachsen und drei Rotationen mit den Winkelgeschwindigkeiten $\omega\alpha, \omega\beta, \omega\gamma$ um die Koordinatenachsen.

Um die Winkelgeschwindigkeit ω direkt zu bestimmen, hat man die letzten drei Gleichungen zu quadrieren und zu addieren, dann ergibt sich mit Rücksicht darauf, daß

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1,$$

sofort

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos\varphi_{12},$$

wenn φ_{12} den Winkel bezeichnet, unter dem die beiden Rotationsachsen sich kreuzen.

Wir wollen nun nachweisen, daß die gefundene Bewegung eine momentane Schraubung ist. Gehen wir aus von der Gleichung

$$\dot{P} = \dot{O} + \Omega \wedge (P - O)$$

und bilden diese Gleichung noch einmal für einen Punkt R:

$$\dot{R} = \dot{O} + \Omega \wedge (R - O),$$

so ergibt sich durch Subtraktion der vorstehenden beiden Gleichungen sofort

$$P = R + \Omega \wedge (P - R).$$

Läßt sich nun R insbesondere so bestimmen, daß

$$\dot{R} = k\Omega$$

wird, dann setzt sich die Bewegung des beliebigen Raumpunktes P zusammen aus einer Translation in der Richtung des Rotationsvektors Ω und einer Rotation um die durch R in der Richtung des Rotationsvektors Ω gezogene Achse, d. h. die ganze Bewegung wird eine Schraubung um diese Achse. Führen wir aber in die Gleichung $\dot{R} = k\Omega$ den davorstehenden Wert $\dot{R}$ ein, so ergibt sich

$$k\Omega = \dot{O} + \Omega \wedge (R - O).$$

Multiplizieren wir diese Gleichung vektoriell mit Ω, so finden wir

$$0 = \dot{O} \wedge \Omega + \{\Omega \wedge (R - O)\} \wedge \Omega.$$

Nun wird aber

$$\{\Omega \wedge (R - O)\} \wedge \Omega = \Omega^2 \cdot (R - O) - \{(R - O) \times \Omega\} \cdot \Omega.$$

Wenn wir diesen Wert in die vorhergehende Gleichung einführen, so erhalten wir, da $\Omega^2 = \omega^2$ ist,

$$R - O = -\frac{\dot{O} \wedge \Omega}{\omega^2} + \rho\Omega,$$

indem wir

$$\rho = \frac{(R - O) \times \Omega}{\omega^2}$$

setzen. Diese Gleichung für ρ ist aber identisch mit der vorhergehenden Gleichung, denn aus dieser folgt sofort durch skalare Multiplikation mit Ω, da $O \wedge \dot{\Omega} \times \Omega = 0$ ist,

$$(R - O) \times \Omega = \rho\omega^2,$$

d. h. der vorstehende Wert von ρ. Es sind also die Punkte R der Schraubenachse definiert durch die Gleichung

$$R = O - \frac{\dot{O} \wedge \Omega}{\omega^2} + \rho\Omega,$$

wobei ρ willkürlich bleibt.

Multiplizieren wir die Gleichung für $k\Omega$ skalar mit Ω, so folgt, da $\Omega^2 = \omega^2$ ist,

$$k\omega^2 = \dot{O} \times \Omega.$$

So bestimmt sich k. Die Größe der Translation längs der Schraubenachse wird

$$\tau = k\omega.$$

Setzen wir diesen Wert in die vorige Gleichung ein und rechnen die rechte Seite aus, so ergibt sich zunächst

$$\tau\omega = (\omega_1\alpha_1 + \omega_2\alpha_2)(\omega_1\lambda_1 + \omega_2\lambda_2) + (\omega_1\beta_1 + \omega_2\beta_2)(\omega_1\mu_1 + \omega_2\mu_2) + (\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2)(\omega_1\nu_1 + \omega_2\nu_2).$$

Beim Ausmultiplizieren der Klammern auf der rechten Seite hat man zu beachten, daß $(\alpha_1\beta_1\gamma_1\lambda_1\mu_1\nu_1)$ und $(\alpha_2\beta_2\gamma_2\lambda_2\mu_2\nu_2)$ nichts anderes sind als die Koordinaten der beiden Rotationsachsen. Es bestehen deshalb die Relationen

$$\alpha_1\lambda_1 + \beta_1\mu_1 + \gamma_1\nu_1 = 0, \quad \alpha_2\lambda_2 + \beta_2\mu_2 + \gamma_2\nu_2 = 0,$$
$$\alpha_1\lambda_2 + \beta_1\mu_2 + \gamma_1\nu_2 + \lambda_1\alpha_2 + \mu_1\beta_2 + \nu_1\gamma_2 = d_{12}\sin\varphi_{12},$$

wenn d_{12} den kürzesten Abstand der beiden Rotationsachsen bedeutet, und somit ergibt sich

$$\tau\omega = \omega_1\omega_2 d_{12}\sin\varphi_{12}. \tag{22}$$

Für die aus zwei momentanen Rotationen zusammengesetzte Schraubenbewegung haben wir aber einen Wert $\dot{P}$ der Geschwindigkeit gefunden, der genau der für die allgemeine Bewegung eines starren Systems ermittelte ist. Daraus ergibt sich:

Die allgemeinste momentane Bewegung eines starren Systems ist eine Schraubenbewegung.[1])

1) Dieser Satz ist von Giulio Mozzi, einem Florentiner Mathematiker (1730—1813), im Jahre 1763 mitgeteilt worden: Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi (Napoli). Neu gefunden hat ihn Cauchy in der Arbeit Sur les mouvements que peut prendre un système invariable, Exercices de math. 2 (1827), Œuvres (2) 7, p. 120. Der Satz über die Zusammensetzung der Drehungen um denselben Punkt. stammt von Paolo Frisi, Dissertationum variarum tom. I, p. 1 (Lucca 1759). Über Frisi und Mozzi siehe Marcolongo im Bolletino di bibliografia e storia delle scienze matematiche, vol. 8 (1905), p. 1 und vol. 9 (1906).

Reduziert die Schraubung sich auf eine Drehung, so muß

$$\dot{O} \times \Omega = 0, \quad \Omega \neq 0$$

sein. Eine Translation erhalten wir dagegen dann und nur dann, wenn

$$\Omega = 0.$$

Führen wir wieder die Bezeichnungen der Gleichungen (7) ein, so erkennen wir jetzt die Bedeutungen der dort benutzten Größen: u, v, w sind die Komponenten einer Translation, die zusammen mit drei Drehungen von den Winkelgeschwindigkeiten p, q, r um die Koordinatenachsen die vorliegende momentane Bewegung ersetzt.

Da u, v, w die Komponenten des Vektors $\dot{O}$ sind, können wir setzen

$$u = \dot{O} \times e_1, \quad v = \dot{O} \times e_2, \quad w = \dot{O} \times e_3$$

und analog für p, q, r als die Komponenten des Vektors Ω

$$p = \Omega \times e_1, \quad q = \Omega \times e_2, \quad r = \Omega \times e_3.$$

Nach den Werten, die wir auf S. 120 für die Komponenten des Translationsvektors gefunden haben, ergibt sich aber andererseits

$$u = \omega\lambda, \quad v = \omega\mu, \quad w = \omega\nu$$

und für die Komponenten des Rotationsvektors

$$p = \omega\alpha, \quad q = \omega\beta, \quad r = \omega\gamma.$$

Da nun die betrachtete Bewegung ursprünglich als die Resultierende zweier Rotationen gewonnen wurde und sich nachher als eine Schraubenbewegung herausstellte, können wir den Satz aussprechen:

Jede Schraubenbewegung läßt sich auf unendlich viele Arten durch zwei momentane Rotationen ersetzen, und zwar können wir die Achse der einen Rotation beliebig annehmen, nur darf sie nicht einem bestimmten linearen Strahlenkomplex angehören. Das letztere folgt aus den Ausführungen am Ende des ersten Kapitels, wenn wir p, q, r, u, v, w als die Koordinaten eines Vektorsystems ansehen, das sich für den Fall einer bloßen Rotation auf einen einzigen gebundenen Vektor reduziert.

Übungsbeispiele.

1. Aufgabe. *Die geometrischen Beziehungen zweier Rotationen zu der aus ihnen resultierenden Schraubenbewegung zu untersuchen.*

Auflösung. Wir wählen ein Koordinatensystem so, daß die x-Achse mit der gemeinsamen Normalen der beiden Rotationsachsen a_1 und a_2 zusammenfällt, wir nennen dann r_1 und r_2 die Abszissen der Punkte, in denen die Rotationsachsen die x-Achse treffen, φ_1 und φ_2 die Winkel, die sie mit der z-Achse bilden, ω_1 und ω_2 die zugehörigen Rotationswinkel, so finden wir für die Koordinaten der resultierenden Schraubung

$$\omega\alpha = 0, \qquad \omega\lambda = 0,$$

$$\omega\beta = \omega_1 \sin\varphi_1 + \omega_2 \sin\varphi_2, \qquad \omega\mu = -(\omega_1 r_1 \cos\varphi_1 + \omega_2 r_2 \cos\varphi_2),$$

$$\omega\gamma = \omega_1 \cos\varphi_1 + \omega_2 \cos\varphi_2, \qquad \omega\nu = \omega_1 r_1 \sin\varphi_1 + \omega_2 r_2 \sin\varphi_2.$$

Soll die z-Achse die Achse dieser Schraubung werden, so muß $\omega\beta$ und $\omega\mu$ verschwinden, also

$$\omega_1 \sin\varphi_1 + \omega_2 \sin\varphi_2 = 0, \qquad \omega_1 r_1 \cos\varphi_1 + \omega_2 r_2 \cos\varphi_2 = 0$$

sein. Ferner ist dann $\gamma = 1$, $\omega\nu = \tau$, also $\nu = k$ zu setzen und es ergibt sich

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1}, \qquad r_1 \operatorname{tang}\varphi_2 = r_1 \operatorname{tang}\varphi_2 = k.$$

Wie man sieht, trifft die Achse der resultierenden Schraubung die gemeinsame Normale der beiden Rotationsachsen unter rechtem Winkel.

2. Aufgabe. *Die folgenden Eigenschaften der momentanen Bewegung eines starren Systems zu beweisen:*

a) Die Komponente der Geschwindigkeiten aller Punkte einer Geraden nach dieser Geraden hat denselben Wert;

b) die Geraden, die zu den Bewegungsrichtungen ihrer Punkte normal sind, erfüllen einen linearen Komplex, dessen Achse mit der Achse der Schraubung zusammenfällt;

c) die Ebenen, die durch die Punkte einer beliebigen Geraden normal zu den Bewegungsrichtungen dieser Punkte gelegt werden, gehen durch eine andere (die konjugierte) Gerade;

d) in jeder Ebene liegt ein Punkt (ihr Brennpunkt), der sich senkrecht zu der Ebene bewegt, und eine Gerade (die Brennlinie), deren Punkte sich in der Ebene verschieben;

e) die Punkte, die sich nach einem bestimmten Punkte hin bewegen, erfüllen eine Raumkurve dritter Ordnung und die Geraden, in denen sie sich bewegen, einen Kegel zweiter Ordnung.

Auflösung. Wir legen die z-Achse des Koordinatensystems in die Schraubenachse, dann wird in den Gleichungen (7)

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = \omega, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = k\omega,$$

und wir erhalten die Geschwindigkeitskomponenten

$$\text{(a)} \qquad \dot{x} = -\omega y, \quad \dot{y} = \omega x, \quad \dot{z} = \omega k.$$

Nehmen wir für x, y, z die Koordinaten der Punkte einer Geraden so haben wir zu setzen

$$\text{(b)} \qquad x = x_0 + \varrho\alpha, \quad y = y_0 + \varrho\beta, \quad z = z_0 + \varrho\gamma,$$

indem ϱ beliebig bleibt. Die Komponente der Geschwindigkeit nach der Geraden wird dann

$$\dot{x}\alpha + \dot{y}\beta + \dot{z}\gamma = \omega[(\beta x_0 - \alpha y_0) + \gamma k] = \omega(\nu + \gamma k)$$

wenn $\nu = \beta x_0 - \alpha y_0$ die letzte Koordinate der Geraden bezeichnet. Da der gefundene Ausdruck von ϱ unabhängig ist, haben wir a) bewiesen.

Ist die Geschwindigkeit senkrecht zu der Geraden gerichtet, so wird

$$\text{(c)} \qquad \nu + \gamma k = 0,$$

und dies ist die Gleichung eines linearen Strahlenkomplexes, dessen Zentralachse in die z-Achse fällt. Damit ist b) bewiesen.

Die Ebene durch einen Punkt (x, y, z), die zu dessen Bewegungsrichtung normal ist, hat die Gleichung

$$\dot{x}(X - x) + \dot{y}(Y - y) + \dot{z}(Z - z) = 0,$$

wenn X, Y, Z laufende Koordinaten bedeuten. Berücksichtigt man die Werte (a), so ergibt sich

$$\text{(d)} \qquad -yX + xY + k(Z - z) = 0.$$

Setzt man hierin für x, y, z die Werte (b) ein, so wird die Gleichung

$$[-y_0 X + x_0 Y + k(Z - z_0)] - \varrho[\beta X - \alpha Y + \gamma k] = 0.$$

Die so dargestellten Ebenen gehen, was auch der Wert von ϱ sei, durch eine bestimmte Gerade hindurch, und damit ist c) bewiesen.

Bringt man (d) in die Gestalt

$$-\frac{y}{kz}X + \frac{x}{kz}Y + \frac{1}{z}Z = 1$$

und schreibt dies

$$UX + VY + WZ = 1,$$

so ergibt sich

$$\text{(e)} \qquad U = -\frac{y}{kz}, \quad V = \frac{x}{kz}, \quad W = \frac{1}{z}.$$

Ist die Ebene und damit U, V, W gegeben, so ergeben sich aus diesen Gleichungen (e) x, y, z in eindeutiger Weise; dies ist der Beweis für den ersten Teil von d). Um auch den zweiten Teil zu beweisen, beachte man, daß, wenn ein Punkt (x, y, z) sich in der Ebene bewegen soll,

$$U\dot{x} + V\dot{y} + W\dot{z} = 0$$

sein muß oder

$$\text{(f)} \qquad -Uy + Vx + Wk = 0;$$

diese Ebene schneidet aus der ersten Ebene eine Gerade aus, deren Punkte die geforderte Eigenschaft haben.

Soll endlich ein Punkt $P(x, y, z)$ sich nach einem Punkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$ hin bewegen, so muß gemäß (a)

$$\text{(g)} \qquad -\lambda y = x_1 - x, \quad \lambda x = y_1 - y, \quad \lambda k = z_1 - z$$

werden. Daraus folgt durch Elimination von λ

$$\text{(h)} \qquad -\frac{x_1 - x}{y} = \frac{y_1 - y}{x} = \frac{z_1 - z}{k}.$$

Dies ist die Darstellung der unter e) genannten Raumkurve dritter Ordnung. Setzt man ferner

$$x_1 - x = x', \quad y_1 - y = y', \quad z_1 - z = z',$$

so läßt sich aus (g) auch ableiten

$$\text{(i)} \qquad k(x'^2 + y'^2) = (x_0 y' - y_0 x') z';$$

Dies ist die Gleichung des von P_1 ausgehenden Kegels zweiter Ordnung, in dessen Seitenlinien sich die Punkte P bewegen.

3. Aufgabe. *Fünf Punkte eines starren Körpers bewegen sich auf gegebenen Flächen. Die Achse der Schraubenbewegung zu finden, die der Körper in einem gegebenen Augenblicke ausführt.*

Auflösung. Man errichte in den fünf Punkten auf den Flächen, denen sie angehören, die Normalen. Dann stehen diese Normalen auf den Bewegungsrichtungen ihrer Punkte senkrecht, gehören also zu dem mit der Schraubenbewegung verknüpften linearen Strahlenkomplex. Die Zentralachse dieses linearen Komplexes ist die gesuchte Achse der Schraubung.

Um sie zu finden, kann man folgendermaßen verfahren: Man verbinde eine der fünf Normalen mit je zwei der vier übrigen durch eine Regelfläche zweiter Ordnung. Je eine Regelschar dieser beiden Flächen besteht dann aus Strahlen des linearen Komplexes. Man greife aus dieser Regelschar auf der einen Fläche einen beliebigen Strahl heraus, welcher die andere Fläche in zwei reellen Punkten

schneidet, und ziehe durch die beiden Schnittpunkte die Strahlen der zweiten Regelschar auf der zuletzt genannten Fläche. Die so gefundenen beiden Strahlen sind zwei konjugierte Rotationsachsen der betrachteten momentanen Bewegung. Dies folgt daraus, daß sie vier Strahlen des linearen Komplexes treffen, die nicht auf einer Regelfläche 2. Ordnung liegen. Wiederholen wir dasselbe noch einmal, indem wir die beiden Regelflächen ihre Rolle vertauschen lassen, so erhalten wir ein zweites Paar konjugierter Rotationsachsen. Von jedem Paare konstruieren wir die gemeinsame Normale, diese beiden Normalen müssen die gesuchte Zentralachse unter rechtem Winkel treffen, die Zentralachse ist also nichts anderes als die gemeinsame Normale der gefundenen Normalen.

4. Aufgabe. *Man soll die Schraubenbewegung bestimmen, die aus drei momentanen Drehungen um drei zueinander senkrechte und sich nicht schneidende Achsen resultiert.*

Auflösung. Man kann durch geeignete Wahl des Koordinatensystems die Koordinaten der drei Achsen in die Form bringen

$$\begin{array}{lllllll} 1, & 0, & 0, & \quad & 0, & d_{12}, & d_{13}, \\ 0, & 1, & 0, & & 0, & 0, & d_{23}, \\ 0, & 0, & 1, & & 0, & 0, & 0; \end{array}$$

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ mögen der Reihe nach die zugehörigen Rotationsgeschwindigkeiten sein. Damit ergeben sich für die Koordinaten der resultierenden Schraubung

$$\omega\alpha = \omega_1, \quad \omega\beta = \omega_2, \quad \omega\gamma = \omega_3,$$
$$\omega\lambda = 0, \quad \omega\mu = \omega_1 d_{12}, \quad \omega\nu = \omega_1 d_{13} + \omega_2 d_{23}.$$

Hieraus folgt insbesondere

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2,$$
$$\omega\tau = \omega^2(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu) = \omega_1\omega_2 d_{12} + \omega_1\omega_3 d_{13} + \omega_2\omega_3 d_{23},$$

dabei bezeichnen d_{12}, d_{13}, d_{23} die kürzesten Abstände der drei Rotationsachsen.

5. Aufgabe. *Ein System ist mit dem Vektorentripel* $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{n}$ *eines Punktes O auf einer Raumkurve* γ *starr verbunden. Die Achse der Schraubenbewegung zu bestimmen, die das starre System in einem gegebenen Augenblicke ausführt, wenn das Vektorentripel mit dem Punkte O an der Raumkurve* γ *entlang gleitet.*

Auflösung. Man findet

$$\dot{P} = v\boldsymbol{t} + \Omega \wedge (P - O),$$

und für die Komponenten des Rotationsvektors Ω nach den drei Vektoren $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{n}$

$$\Omega \times \boldsymbol{t} = \boldsymbol{b} \times \dot{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{b} \times \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} v = -\frac{v}{\tau}, \quad \Omega \times \boldsymbol{n} = 0,$$

$$\Omega \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{n} \times \dot{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{n} \times \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} v = \frac{v}{\varrho},$$

so daß Ω zu $\boldsymbol{n}$ senkrecht und $\Omega = v\left(\frac{\boldsymbol{b}}{\varrho} - \frac{\boldsymbol{t}}{\tau}\right)$ wird. Für die Achse der Schraubung findet man die Gleichung

$$v\boldsymbol{t} + \Omega \wedge (P - O) = k\Omega,$$

deren Lösung, wenn $k = -\frac{\varrho}{\tau}\sigma$ gesetzt wird, lautet

$$P = O + \sigma\boldsymbol{n} + \lambda\Omega,$$

wobei λ unbestimmt bleibt und

$$\sigma = \frac{1}{\varrho} : \left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\tau^2}\right), \; k = -\frac{1}{\tau} : \left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\tau^2}\right)$$

wird, woraus auch

$$\sigma = \frac{\varrho}{1 + \frac{\varrho^2}{\tau^2}},$$

also $\sigma < \varrho$ folgt. Die Schraubenachse trifft die Normale $\boldsymbol{n}$ unter rechtem Winkel in dem Punkte $P_0 = O + \sigma\boldsymbol{n}$, also in der Entfernung σ von O.

6. Aufgabe. *Von dem Beschleunigungsvektor $\dot{\Omega}$, dessen Projektionen auf die beweglichen Achsen $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$ sind, die Projektionen auf die festen Achsen zu finden.*

Auflösung. Es wird z. B. $p = p_1 a_1 + q_1 a_2 + r_1 a_3$, also

$$\dot{p} = p_1 \dot{a}_1 + q_1 \dot{a}_2 + r_1 \dot{a}_3 + \dot{p}_1 a_1 + \dot{q}_1 a_2 + \dot{r}_1 a_3.$$

Nach (10) ist aber $p_1 \dot{a}_1 + q_1 \dot{a}_2 + r_1 \dot{a}_3 = 0$, demnach ist

$$\dot{p} = \dot{p}_1 a_1 + \dot{q}_1 a_2 + \dot{r}_1 a_3,$$

und es wird

$$\begin{aligned}\dot{\Omega} = \dot{p} e_1 + \dot{q} e_2 + \dot{r} e_3 &= (a_1 e_1 + b_1 e_2 + c_1 e_3)\dot{p}_1 \\ &+ (a_2 e_1 + b_2 e_2 + c_2 e_3)\dot{q}_1 \\ &+ (a_3 e_1 + b_3 e_2 + c_3 e_3)\dot{r}_1 \\ &= \dot{p}_1 \mathfrak{e}_1 + \dot{q}_1 \mathfrak{e}_2 + \dot{r}_1 \mathfrak{e}_3.\end{aligned}$$

7. Aufgabe. *Den Ort der Achsen aller Schraubungen zu finden, die sich aus momentanen Rotationen um zwei gegebene windschiefe Achsen zusammensetzen.*

Auflösung. Wir wählen ein Koordinatensystem so, daß die z-Achse in die gemeinsame Normale der beiden Rotationsachsen fällt, der Ursprung den kürzesten Abstand $2a$ dieser Achsen halbiert und die x- und y-Achse mit ihnen beiden gleiche Winkel bildet. Zunächst ist nach dem Resultat der ersten Aufgabe klar, daß die gesuchten Schraubenachsen alle ebenfalls die z-Achse unter rechten Winkeln treffen, also der xy-Ebene parallel sind. Nennen wir z den Abstand einer unter ihnen von der xy-Ebene, φ den Winkel, den sie mit der positiven x-Achse bildet, α den Winkel, den die eine, also $-\alpha$ den Winkel, den die andere Rotationsachse mit der x-Achse einschließt, dann wird nach der oben gefundenen Relation

$$(z - a) \operatorname{tang}(\varphi + \alpha) = (z + a) \operatorname{tang}(\varphi - \alpha) = k.$$

Hieraus folgt sofort

$$\frac{z}{a} = \frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\alpha},$$

ferner

$$k = a \frac{\cos 2\alpha - \cos 2\varphi}{\sin 2\alpha}.$$

Setzen wir also

$$b = a \operatorname{cotg} 2\alpha, \quad c = a : \sin 2\alpha,$$

so wird

$$k = b - c \cos 2\varphi,$$

und als die Darstellung der Schraubenachse ergibt sich

$$x : y = \cos\varphi : \sin\varphi, \quad z = c \sin 2\varphi.$$

Durch Elimination von φ aus diesen beiden Gleichungen folgt sofort für die gesuchte Fläche die Gleichung:

$$(x^2 + y^2)\, z = 2cxy.$$

Die Fläche ist eine Regelfläche dritter Ordnung und heißt Zylindroid. Sie ist von Hamilton entdeckt worden, Transactions of the Irish Acad. vol. 16 (1830), p. 4. Ihre Gleichung rührt von Plücker her (Neue Geometrie des Raumes, 1868, S. 97), der Name stammt von Cayley, siehe Ball, Trans. of the Irish Acad. vol. 25 (1871), p. 161. Vgl. die zusammenfassenden Darstellungen in Sir Robert Stawell Ball, Theory of Screws, Cambridge 1900, und Timerding, Geometrie der Kräfte, Leipzig 1908.

8. Aufgabe. *Zu beweisen, daß, wenn eine Ebene sich um eine feste Achse dreht, während gleichzeitig in ihr ein Punkt S mit doppelt so großer Winkelgeschwindigkeit einen Kreis mit dem Radius c, dessen Mittelpunkt M von der Achse den Abstand b hat, durchläuft, das aus S auf die Achse gefällte Lot die in der vorigen Aufgabe gefundene*

Regelfläche beschreibt und gleichzeitig die Länge des Lotes den Wert des Parameters k angibt.

Auflösung. Der Satz folgt sofort aus den oben stehenden Formeln, indem man k und z als rechtwinklige Koordinaten in der beweglichen Ebene auffaßt. Die Gleichungen

$$k = b - c \cos 2\varphi, \quad z = c \sin 2\varphi$$

liefern dann die Parameterdarstellung des in Rede stehenden Kreises, wobei φ den Winkel bedeutet, den die bewegliche Ebene des Kreises mit ihrer Anfangslage (d. h. der xz-Ebene) einschließt.

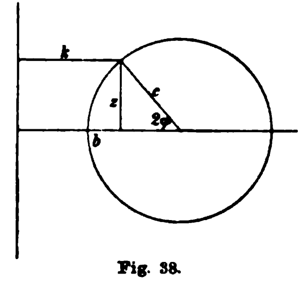


Fig. 38.

Aus dieser Erzeugung des Zylindroids ist seine Form leicht abzuleiten. Es ist ganz zwischen den Ebenen $z = +a$ und $z = -a$ enthalten, die es in je einem Strahle berührt. Diese beiden Strahlen kreuzen einander rechtwinklig und die x- und y-Achse unter Winkeln von 45^0. Die z-Achse ist eine Doppellinie des Zylindroids, durch jeden Punkt dieser Linie gehen zwei seiner Regelstrahlen, die mit der x- und y-Achse gleiche Winkel einschließen und gegen die Ebenen $x = y$ und $x = -y$ symmetrisch liegen. Durch die x- und y-Achse selbst geht das Zylindroid hindurch.

9. Aufgabe. *Zu beweisen, daß man ein Zylindroid erhält, wenn man einen geraden Kreiszylinder durch eine beliebige Ebene η schneidet und aus den Punkten der Schnittellipse die Lote auf eine beliebige Seitenlinie s des Zylinders fällt. Diese Lote erfüllen das Zylindroid.*

Auflösung. Nehmen wir das Koordinatensystem so an, daß die z-Achse in die Seitenlinie s des Zylinders fällt und die x- und y-Achse durch die Endpunkte des in der Schnittebene η enthaltenen Zylinderdurchmessers hindurchgehen, so ist die Gleichung des Zylinders von der Form

$$x^2 + y^2 = \alpha x + \beta y,$$

die Gleichung der Ebene

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1.$$

Setzt man $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ und

$$\gamma = -\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot c,$$

so ergibt sich für die Schnittellipse die Parameterdarstellung

$$x = (\alpha \cos\varphi + \beta \sin\varphi) \cos\varphi,$$
$$y = (\alpha \cos\varphi + \beta \sin\varphi) \sin\varphi,$$
$$z = 2c \cos\varphi \sin\varphi.$$

In der Tat findet man aus diesen Gleichungen sofort wieder

$$x^2 + y^2 = (\alpha \cos\varphi + \beta \sin\varphi)^2 = \alpha x + \beta y,$$

d. h. die Zylindergleichung, und ebenso die Ebenengleichung

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1 + \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}\right) \cos\varphi \sin\varphi = 1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha\beta c} z = 1 - \frac{z}{\gamma}.$$

Aus der gefundenen Parameterdarstellung der Ellipse folgt aber auch

$$(x^2 + y^2) z = 2cxy,$$

d. h. die Gleichung eines Zylindroids, auf dem die Ellipse liegt. Die Doppellinie des Zylindroids fällt aber mit der Seitenlinie s zusammen, und auf dieser Seitenlinie s stehen sonach die Regelstrahlen des Zylindroids senkrecht. Die Regelstrahlen sind also die aus den Ellipsenpunkten auf s gefällten Lote.

Sechstes Kapitel.

Kontinuierliche Bewegung eines ebenen starren Systems.

1. Momentanpole. Die Polbahnen. Wir gehen von einer solchen Bewegung eines starren Körpers aus, die einer Ebene α parallel ist. Dabei beschreiben alle Punkte des Körpers Kurven, die der Ebene α parallel sind, und die Punkte eines Lotes auf der Ebene durchlaufen kongruente Kurven. Es genügt deshalb zur Beschreibung einer solchen Bewegung, die Bewegung einer beweglichen Ebene über einer festen Ebene (man denke an das Herumschieben eines Blattes Papier auf der Tischplatte) in Betracht zu ziehen.

Wir nehmen die Grundgleichung (6) des vorigen Kapitels

$$\dot{P} = \dot{O} + \Omega \wedge (P - O)$$

und wenden sie auf den Fall an, wo die Geschwindigkeit $\dot{O}$ einer Ebene α beständig parallel und der Vektor Ω zu dieser Ebene senkrecht ist. Bezeichnen wir eine positive Drehung um 90^0 in der Ebene α durch den vorgesetzten Faktor i und mit ω den Modul von Ω, so wird hier

$$\Omega \wedge (P - O) = \omega i (P - O)$$

und wir erhalten

$$\dot{P} = \dot{O} + \omega i (P - O). \tag{1}$$

Dieser Gleichung läßt sich die Form geben:

$$P + \frac{i}{\omega} \dot{P} = O + \frac{i}{\omega} \dot{O} = C,$$

wo der Punkt C eine Funktion der Zeit, aber für jeden Augenblick eindeutig bestimmt ist. Er heißt der Momentanpol[1])

1) Joh. Bernoulli, Propositiones variae, XIV: De centro spontaneo rotationis, Opera omnia IV (1742), p. 265.

oder das Momentanzentrum. Aus der vorstehenden Gleichung folgt dann

$$\dot{P} = \omega i (P - C), \tag{2}$$

d. h. die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes P der beweglichen Ebene steht senkrecht auf der Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Pol C, und ihr Modul ist das Produkt aus der Entfernung CP und der Winkelgeschwindigkeit ω. Also ist in jedem Augenblicke die Bewegung äquivalent einer momentanen Rotation um den Momentanpol.

Die Linie CP, die zu dem Geschwindigkeitsvektor senkrecht ist, steht auch senkrecht auf der Bahnkurve von P. Also ergibt sich:

Die Normalen der Bahnkurven aller Punkte der beweglichen Ebene in einem gegebenen Augenblicke laufen in dem Momentanpol zusammen.

Es sei σ eine mit der beweglichen Ebene fest verbundene Kurve; bei der Bewegung umhüllt dann σ eine andere Kurve σ_1, die wir uns in der festen Unterlage der beweglichen Ebene denken können. T sei der Berührungspunkt von σ mit σ_1 zur Zeit t. Die Geschwindigkeit von T hat dann die Richtung der gemeinsamen Tangente σ und σ_1 in T. Also ist der momentane Berührungspunkt von σ und σ_1 der Fußpunkt des aus dem Momentanpol auf die beiden Kurven gefällten Lotes.[1])

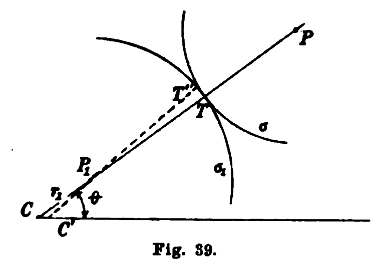


Fig. 39.

Der Berührungspunkt T der Kurve σ gleitet auf σ_1 zur Zeit t mit der Geschwindigkeit v, und v wird deshalb als die Gleit-

1) Diese Normalensätze sind von Chasles 1829 gefunden worden. Die Arbeit ist veröffentlicht im Bulletin de la Soc. math. de France, t. 6 (1878), p. 208.

geschwindigkeit bezeichnet. Wenn sie in jedem Augenblicke verschwindet, so rollt die Kurve σ, ohne zu gleiten, auf σ_1. Nennen wir dann T_1 einen von T auf σ um die unendlich kleine Strecke ds entfernten Punkt, so kommt dieser bei der Rollbewegung mit einem Punkte T_1' auf σ_1 zur Deckung, der von T um dieselbe Strecke $ds_1 = ds$ entfernt ist. Rechnen wir also die Bogenlängen s und s_1 auf beiden Kurven von einem momentanen Berührungspunkt zur Zeit t bis zu dem Berührungspunkt zur Zeit t_1, so wird $s = s_1$.

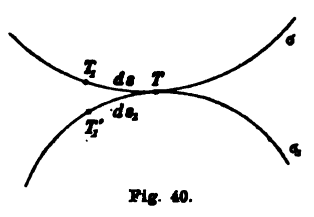


Fig. 40.

Wenn aber die Gleitgeschwindigkeit in einem momentanen Berührungspunkte T verschwindet, so ist T als der Punkt, dessen Geschwindigkeit 0 ist, der Momentanpol. Betrachten wir nun in der festen Unterlage der beweglichen Ebene die Kurve Γ, die beim Ablauf der Bewegung von den Momentanpolen erfüllt wird, und andererseits in der beweglichen Ebene die Kurve Γ', in deren Punkte nach und nach der Momentanpol hineinfällt, so dreht sich die Kurve Γ' in jedem Augenblick um einen Punkt C, den sie mit der Kurve Γ gemein hat. Nach einer sehr kurzen Zeit dt aber kommt ein sehr nahe benachbarter Punkt C' von Γ mit einem Punkte D' von Γ' zur Deckung, in den er durch die Drehung um C übergeht, und die bewegliche Ebene dreht sich dann um D' weiter. Da aber so der Winkel $C'CD'$ unendlich klein wird, berühren die beiden Kurven sich in C, die Bewegung ist demnach ein wirkliches Rollen der beiden Kurven aufeinander, denn Γ' wird von den verschiedenen Lagen der Kurve Γ umhüllt und diese Kurve dreht sich in jedem Augenblick um ihren Berührungspunkt mit Γ'. Γ und Γ' heißen die beiden Polbahnen der Bewegung, und es ergibt sich:

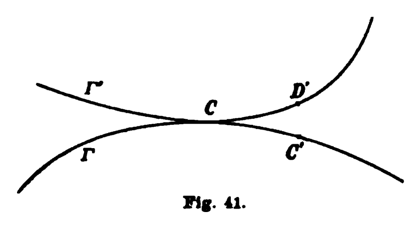


Fig. 41.

Bei der kontinuierlichen ebenen Bewegung rollen die beiden Polbahnen aufeinander ab.[1])

Gehen wir andererseits von den beiden Polbahnen aus und denken uns mit der einen eine Ebene starr verbunden, die sich mit ihr bewegt, so nennen wir die so durch das Abrollen dieser Kurve auf der andern entstehende ebene Bewegung zykloidal, und wir können demnach sagen: Jede kontinuierliche Bewegung einer unveränderlichen ebenen Figur in ihrer Ebene ist eine zykloidale Bewegung.

2. Beschleunigungspol. Wendekreis. Wir ziehen nun auch die Beschleunigung eines beliebigen Punktes P in Betracht; differenzieren wir (2), so ergibt sich zunächst

$$\ddot{P} = \dot{\omega} i (P - C) + \omega i (\dot{P} - \dot{C})$$

und daraus weiter

$$\ddot{P} = (\dot{\omega} i - \omega^2)(P - C) - \omega i \dot{C}. \tag{3}$$

Setzen wir

$$\dot{\omega} i - \omega^2 = \varrho e^{i\varphi}, \tag{4}$$

so erhalten wir

$$\ddot{P} = \varrho e^{i\varphi}(P - C) - \omega i \dot{C}.$$

Ist $\varrho \neq 0$, so ergibt sich ein einziger Punkt O, für den

$$\varrho e^{i\varphi}(O - C) - \omega i \dot{C} = 0 \tag{5}$$

wird, d. h. die Beschleunigung verschwindet; subtrahieren wir dann die beiden vorstehenden Gleichungen, so ergibt sich

$$\ddot{P} = \varrho e^{i\varphi}(P - O). \tag{6}$$

Hierin hängen O, ϱ und φ nur von der Zeit ab, und man sieht, daß man den Beschleunigungsvektor $\ddot{P}$ erhält, indem man den Vektor $P - O$ um O durch den Winkel φ dreht und im Verhältnis $\varrho : 1$ vergrößert. Dieser Punkt O heißt der Beschleunigungspol.

Nach (5) fällt der Vektor $O - C$, wenn man ihn um den Winkel φ dreht, der Richtung nach mit dem Vektor $i\dot{C}$, d. h.

---

1) Dieser Satz findet sich bei Cauchy, Exercices de math. 2 (1827), Œuvres compl. (2) 7, p. 120.

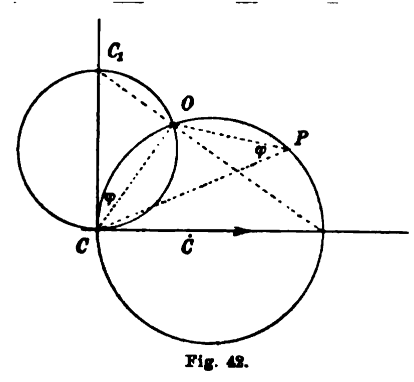


Fig. 42.

einem zu $\dot{C}$ senkrechten Vektor zusammen; es ist also φ das Komplement des Winkels zwischen $O - C$ und $\dot{C}$.

Geben wir in (6) der Beschleunigung $\ddot{P}$ eine bestimmte Größe, so erhält auch die Länge OP einen bestimmten Wert, also liegen alle Punkte, die zur Zeit t eine Beschleunigung von gegebener Größe haben, auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt in den Beschleunigungspol fällt.

Ist die Beschleunigung eines Punktes P normal zu seiner Bahn gerichtet, verschwindet also die Tangentialbeschleunigung, so muß, da diese Normale durch C geht, der Vektor $P - O$ um den Winkel φ gedreht mit dem Vektor $P - C$ zusammenfallen, d. h. es wird $\sphericalangle\, OPC = \varphi$; der Ort aller Punkte, deren Tangentialbeschleunigung verschwindet, ist ein Kreis, der durch O und C geht und dessen Mittelpunkt auf der Linie des Vektors $\dot{C}$, also auf der Bahntangente von C liegt. (In der Tat muß die Kreistangente in C mit CO den Winkel φ einschließen, also die Richtung von $i\dot{C}$ haben.)

Auf dieselbe Weise erkennt man, daß die Punkte, deren Normalbeschleunigung verschwindet, auf einem anderen Kreise durch O und C liegen, dessen Tangente in C die Richtung von $\dot{C}$ hat. Der Durchmesser dieses Kreises hat die Länge $\frac{\operatorname{mod}(O - C)}{\cos\varphi}$ oder nach (5), wenn man

$$\operatorname{mod}\dot{C} = V$$

setzt, $\frac{\omega V}{\varrho\cos\varphi}$. Aber nach (4) ist $\varrho\cos\varphi = -\omega^2$, der Durchmesser hat also die Länge $V : \omega$ und für seinen Endpunkt C_1 wird

$$C_1 - C = -\frac{1}{\omega}\, i\dot{C}.$$

Dieser Punkt heißt der geometrische Beschleunigungspol. Da die Normalbeschleunigung nach Kap. III, § 3 dem Krümmungsradius umgekehrt proportional ist, bekommt die Bahnkurve einen Wendepunkt, wo diese Beschleunigung verschwindet; deshalb heißt der hier gefundene Kreis der Wendekreis.[1]) Nur der Punkt C bildet eine Ausnahme. Da für ihn nach (3) die Beschleunigung, die sich auf die Normalbeschleunigung reduzieren soll, einen endlichen Wert annimmt, aber andererseits ihr Wert gleich dem Quadrat der Geschwindigkeit geteilt durch den Krümmungsradius der Bahn ist und die Geschwindigkeit für C gleich Null ist, muß auch der Krümmungsradius verschwinden, also C ein Rückkehrpunkt seiner Bahnkurve sein.

Hat die Bewegung in dem gerade betrachteten Augenblick die besondere Eigenschaft, daß $\dot{\omega} = 0$ wird, so ergibt sich aus (4) $\varphi = \pi$, $\varrho = \omega^2$, also geht (5) über in

$$\omega(O - C) + i\dot{C} = 0,$$

d. h. O fällt mit C_1 zusammen und der erste Kreis wird zur Geraden CC_1, d. h. für die Punkte dieser Geraden verschwindet die Tangentialbeschleunigung.

3. Die Euler-Savarysche Formel. Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte. Eine Kurve σ der beweglichen Ebene umhülle bei ihrer Bewegung eine feste Kurve σ_1. Die gemeinsame Normale der beiden Kurven in ihrem augenblicklichen Berührungspunkte T geht durch den Momentanpol C; auf der Linie CT seien P und P_1 die Krümmungsmittelpunkte der beiden Kurven (siehe Fig. 39), r und r_1 ihre Abstände von C. Dann läßt die Winkelgeschwindigkeit ω der Drehung um C sich in zwei Komponenten um P und P_1 zerlegen und es ergibt sich, wenn ω_1 die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um P_1 ist,

---

1) De la Hire, Traité des Roulettes, Mémoires de l'Académie de Paris 1706, p. 348. Die beiden Kreise wurden wiederentdeckt von Bresse, Journ. de l'école polyt., cah. 35 (1853), p. 89.

$$\omega_1 : r = \omega : (r - r_1),$$

also

$$\omega = \omega_1 r_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right).$$

Lassen wir aber die beiden Kurven in der unmittelbaren Umgebung des Punktes T mit ihren Krümmungskreisen zusammenfallen, so ist klar, daß durch die Drehung um P die Kurve σ während einer sehr kurzen Zeit dt, was die unmittelbare Umgebung des Punktes T angeht, in sich übergeht und durch die Drehung um P_1 in eine neue Lage kommt, in der sie σ_1 in einem anderen Punkte T' berührt. Auf der Normalen der Kurve σ_1 in diesem Punkte muß der neue Momentanpol C' liegen, der C unendlich benachbart ist. Setzen wir $CC' = Vdt$ und nennen θ den Winkel, den die Richtung CC' mit CT bildet, so haben wir, da $\sphericalangle TP_1T' = \sphericalangle CP_1C' = \omega_1 dt$ wird, $\omega_1 r_1 dt = Vdt \sin\theta$, also wird die vorige Gleichung

$$\frac{\omega}{V} = \sin\theta \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right). \tag{7}$$

Um den Wert der linken Seite, der nicht mehr von der besonderen Annahme der Kurve σ abhängt, noch anders auszudrücken, lassen wir σ mit Γ' und entsprechend σ_1 mit Γ zusammenfallen, dann rückt C in den momentanen Berührungspunkt T, die Linie CC' wird mit der gemeinsamen Tangente identisch, also $\theta = 90^0$. Bezeichnen wir ferner mit R und R' die Krümmungsradien, die an die Stelle von r_1 und r treten, beide mit dem gehörigen Vorzeichen genommen (mit gleichem oder entgegengesetztem Vorzeichen, jenachdem die Krümmungsmittelpunkte auf der gleichen oder auf entgegengesetzten Seiten liegen), dann ergibt sich

$$\frac{\omega}{V} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R'}, \tag{8}$$

und indem wir die beiden gefundenen Formeln vereinigen, erhalten wir die Euler-Savarysche Gleichung

$$\sin\theta \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{R} - \frac{1}{R'}.\text{[1]} \tag{9}$$

[1] Die Formel stammt von Euler, Novi Commentarii Academiae Petrop., t. 11 (1765), p. 219, § 17. Sie wurde von Savary neu gefunden

Dem Punkte P wird der Punkt P_1 durch diese Relation fest zugeordnet, und die Kurve σ ist an keine andere Bedingung gebunden, als daß P ihren Krümmungsmittelpunkt bilden soll. Man kann sie insbesondere sich auf den Punkt P selbst reduzieren lassen, dann wird P_1 der Krümmungsmittelpunkt der Bahnkurve des Punktes P. Man erkennt so aber weiter: Wenn man den Krümmungsmittelpunkt P_1 der von einer Kurve σ bei der Bewegung umhüllten Kurve σ_1 sucht, so genügt es, von der Bahnkurve des Krümmungsmittelpunktes P von σ das Krümmungszentrum zu ermitteln, dies ist gleichzeitig der gesuchte Krümmungsmittelpunkt P_1 von σ_1.

Auf der gemeinsamen Normalen der beiden Kurven Γ und Γ' in ihrem augenblicklichen Berührungspunkte können wir jedem Punkte P' einen Punkt P_1' zuordnen, derart, daß P_1' der Krümmungsmittelpunkt der von P' beschriebenen Bahnkurve wird. Dann ergibt sich aus (9), da hier $\theta = 90^0$ ist,

$$\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r'} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R'} = c,$$

wenn $r' = CP'$, $r_1' = CP_1'$ und c eine Konstante bedeutet. Daraus folgt

$$r_1' = \frac{r'}{cr' + 1}, \tag{10}$$

d. h. die Reihe der Punkte P_1' ist projektiv zu der Reihe der Punkte P'. Die Krümmungsmittelpunkte der Kurven Γ' und Γ bilden in dieser Projektivität zwei entsprechende Punkte. Rückt der Punkt P_1' ins Unendliche, so wird

$$r' = -\frac{1}{c} = -\frac{V}{\omega},$$

und da dies der Wert von mod $(C_1 - C)$ war, erhalten wir als Fluchtpunkt in der Reihe der Punkte P' den Punkt C_1. Für $r' = 0$ wird auch $r_1' = 0$: der Punkt C (der momentane Rotationspol) entspricht sich selbst.

und bei seinen Vorlesungen über Verzahnungen an der Pariser Polytechnischen Schule benutzt, wie aus einer Mitteilung von Chasles, Journ. de Mathém., vol. 10 (1845), p. 204, hervorgeht.

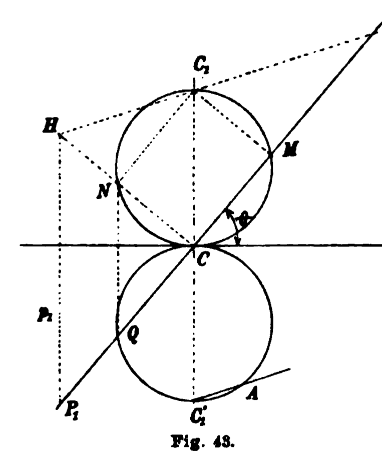


Fig. 43.

Fällen wir aus C_1 das Lot C_1M auf die Verbindungslinie von C mit einem beliebigen Punkte P der beweglichen Ebene, so wird, wenn $\sphericalangle C_1CP = 90^0 - \theta$ ist,

$$CM = r_0 = -\frac{V}{\omega}\sin\theta,$$

da $CC_1 = V:\omega$, und aus (9) und (8) folgt

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = -\frac{1}{r_0}.$$

Verbinden wir C_1 mit P und ziehen durch C die Parallele zu MC_1, d. h. die Senkrechte zu CM, durch den Schnittpunkt H dieser Linie mit PC_1 die Parallele p_1 zu CC_1, so haben wir

$$\frac{CP}{MC} = \frac{HP}{C_1H} = \frac{P_1P}{CP_1},$$

also

$$-\frac{r}{r_0} = \frac{r + P_1C}{CP_1} \quad \text{oder} \quad -\frac{1}{r_0} = \frac{1}{CP_1} - \frac{1}{r},$$

mithin wird $CP_1 = r_1$, P_1 ist der dem Punkte P entsprechende Krümmungsmittelpunkt.

Durch diese Konstruktion kann man, wenn die Punkte C und C_1, oder der über CC_1 als Durchmesser beschriebene Wendekreis, bekannt sind, zu jedem Punkte P das zugehörige Krümmungszentrum P_1 finden. Eine andere Konstruktion beruht auf den Krümmungsmittelpunkten K und K' der Kurven Γ und Γ'. Wir projizieren aus P die Reihe der Punkte P' auf der Normalen CC_1, und aus P_1 die Reihe der Punkte P_1' auf derselben Normalen. Die so entstehenden projektiven Strahlenbüschel sind, da

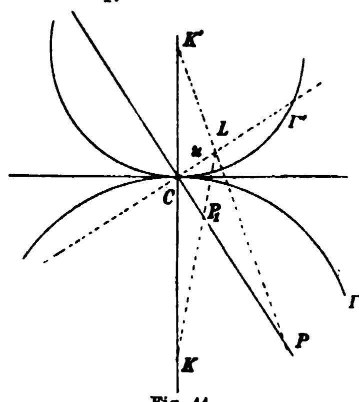


Fig. 44.

sie ihren gemeinsamen Strahl CP_1P entsprechend gemein haben, gleichzeitig perspektiv; ihre Paare entsprechender Strahlen schneiden sich also auf einer Geraden u, die durch C geht und durch den Schnittpunkt der beiden entsprechenden Strahlen PC_1 und p_1, also ist diese Gerade die Linie CH, d. h. senkrecht auf CP. Auf ihr müssen sich auch die beiden Strahlen PK' und P_1K in einem Punkte L schneiden. Wir können also P_1 folgendermaßen konstruieren: wir ziehen PK' und bestimmen den Schnittpunkt L dieser Geraden mit dem Lot von CP in C, die Linie KL schneidet dann CP in dem Krümmungsmittelpunkt P_1. Diese Konstruktion stammt von Savary.

Auf die Punkte der Normalen CC_1 selbst ist sie nicht anwendbar. Hat man aber zu irgend einem Punkte P den zugehörigen Punkt P_1 gefunden und errichtet in P und P_1 die Lote auf PP_1, so schneiden diese aus der Normalen zwei zusammengehörige Punkte P', P_1' aus. In der Tat wird dann

$$\frac{\omega}{V} = \left(\frac{1}{CP_1} - \frac{1}{CP}\right) \sin\theta = \frac{1}{CP_1'} - \frac{1}{CP'}\,.$$

Fig. 45.

Außerdem haben wir bis jetzt den Fall $\theta = 0$ ausgeschlossen. Dann muß $\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}$ unendlich groß werden, und nehmen wir r außerhalb C, also $r \neq 0$ an, so muß $r_1 = 0$ sein, mithin zeigt sich: die Punkte der gemeinsamen Tangente von Γ und Γ' beschreiben Bahnkurven, von denen C der gemeinsame Krümmungsmittelpunkt ist.

Für einen Punkt M des Wendekreises rückt der zugehörige Krümmungsmittelpunkt in unendliche Entfernung. Geht auf der Geraden CM ein Punkt P von C bis M, so wandert der zugehörige Krümmungsmittelpunkt P_1 von C aus nach der Seite von M hin in unendliche Entfernung und wird von C durch P getrennt; rückt der Punkt P über M hinaus, so kommt der zugehörige Punkt P_1 auf die andere Seite der

gemeinsamen Tangente von Γ und Γ' zu liegen. Die Bahn eines Punktes P kehrt dem Punkte C ihre konvexe oder konkave Seite zu, je nachdem P innerhalb oder außerhalb des Wendekreises liegt.

Wir betrachten schließlich eine Gerade g der beweglichen Ebene und die von ihr umhüllte Kurve. Um das Krümmungszentrum der letzteren zu finden, genügt es, eine der beiden angegebenen Konstruktionen zu benutzen, indem man hier den Punkt P nach der zu der Geraden senkrechten Richtung in unendliche Entfernung rücken läßt. Nehmen wir an, die betrachtete Gerade g sei senkrecht zu CP, so haben wir wie vorher CH parallel zu C_1M, d. h. parallel zu g zu ziehen und C_1 mit dem im Unendlichen liegenden Punkt P zu verbinden, d. h. durch C_1 die Linie senkrecht zu g zu ziehen; der Schnittpunkt dieser beiden Linien ist ein Punkt N des Wendekreises. Durch N ziehen wir die Parallele zu CC_1, die CP in Q trifft, Q ist dann der gesuchte Krümmungsmittelpunkt.

Offenbar wird aber $CQ = C_1N = CM$, d. h. Q liegt symmetrisch zu M bezüglich C: alle Geraden der beweglichen Ebene umhüllen Kurven, deren Krümmungsmittelpunkte auf dem zu dem Wendekreise bezüglich des Punktes C symmetrischen Kreise liegen. Dieser neue Kreis heißt der Rückkehrkreis.

Der Grund zu dieser Bezeichnung ist leicht einzusehen. Wir betrachten eine Gerade, die durch den zu C_1 symmetrischen Punkt C_1' geht und den Rückkehrkreis in A schneidet. Da A der Fußpunkt des aus C auf die Gerade gefällten Lotes ist, berührt in ihm die Gerade ihre Enveloppe. Aber A muß auch der Krümmungsmittelpunkt der Enveloppe werden, also hat diese in A einen Rückkehrpunkt, und der Rückkehrkreis ist der Ort der Rückkehrpunkte, die bei den Enveloppen der Geraden durch C_1' vorkommen, und dies sind die Geraden, die in dem betrachteten Augenblicke gerade eine Rückkehrtangente ihrer Enveloppe bilden.

4. Besondere Fälle. Nehmen wir für die Polbahn Γ eine Gerade und für Γ' einen Kreis, so erhalten wir die ge-

wöhnliche Zykloidenbewegung, d. h. die Bewegung eines Rades auf gerader Bahn. Die Punkte der beweglichen Figur beschreiben dann eine **gestreckte**, **gespitzte** oder **verschlungene Zykloide**, je nachdem sie dem Inneren, der Peripherie oder dem Äußeren des rollenden Kreises angehören. Der Auflagepunkt C dieses Kreises ist der Momentanpol, die Verbindungslinie eines Punktes P mit C ist daher die Normale der Bahnkurve von P. Liegt P auf dem Kreise Γ', so liefert die Verbindungslinie von P mit dem C diametral gegenüberliegenden Punkte des Kreises die Bahntangente in P. Um nun den zugehörigen Krümmungsmittelpunkt zu konstruieren, haben wir nach der **Savaryschen** Konstruktion P mit K' d. h. mit dem Mittelpunkte M des Kreises Γ' zu verbinden und in L zu schneiden mit der in C auf CP errichteten Senkrechten. Der Punkt L liegt P auf Γ' diametral gegenüber. Dann haben wir die Gerade PC mit der Verbindungslinie von L und K, d. h. mit dem aus L auf die Bahnlinie Γ gefällten Lote zu schneiden. Der gefundene Punkt Q ist der gesuchte Krümmungsmittelpunkt. Es ist aber $QL \parallel CM$ und $PM = ML$, also wird auch $PC = CQ$. Spiegeln wir also den Kreis Γ' an der Geraden Γ, so erhalten wir einen Kreis,

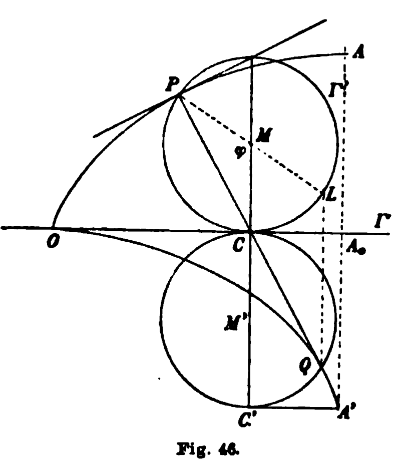


Fig. 46.

auf dem Q liegt. Ist aber M' der Mittelpunkt, C' der tiefste Punkt dieses Kreises, nennen wir ferner A den höchsten Punkt der Zykloide, A' sein Spiegelbild an Γ, A_0 den Punkt von Γ zwischen A und A', O den Anfangspunkt der Zykloide auf Γ, so ergibt sich $\sphericalangle C'M'Q = \sphericalangle CML = \pi - \varphi$, wenn φ der Wälzungswinkel PMC ist. Es wird aber $OC = MC \cdot \varphi$, $CA_0 = MC \cdot (\pi - \varphi)$, also auch $A'C' = M'C'(\pi - \varphi)$. Der Punkt Q muß daher auf einer Zykloide liegen, die entsteht,

indem der Kreis um M' auf der Geraden $A'C'$ nach links hin abrollt, d. h. die Evolute einer gespitzten Zykloide ist eine kongruente Zykloide.

Der Punkt M bewegt sich auf einer Geraden und muß daher in jedem Augenblicke dem Wendekreis angehören. Da er aber stets auf der Normalen der festen Polbahn im Momentanpol liegt, so fällt er mit dem geometrischen Beschleunigungszentrum zusammen, und der über CM als Durchmesser beschriebene Kreis ist der Wendekreis.

Lassen wir umgekehrt den Kreis Γ' fest und die Gerade Γ an ihm herumlaufen, so beschreibt jeder Punkt von Γ eine gewöhnliche Kreisevolvente.

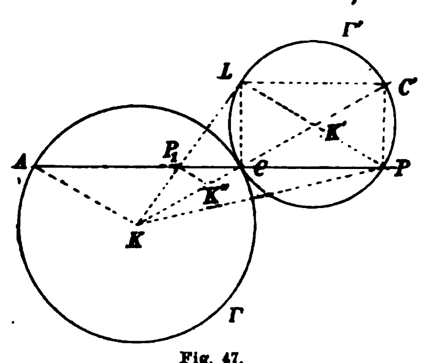


Fig. 47.

Auf dieselbe Art läßt sich der Fall behandeln, wo ein Kreis Γ' auf oder in einem Kreis Γ rollt, d. h. die epi- oder hypozykloidale Bewegung. Fassen wir der Einfachheit halber nur den ersten Fall ins Auge, wo ein Kreis Γ' mit dem Mittelpunkt K' auf einem Kreise Γ mit dem Mittelpunkt K rollt. Man findet dann wieder die Bahnnormale eines Punktes P von Γ', indem man P mit dem momentanen Berührungspunkt C verbindet. Zieht man durch P den Durchmesser $PK'L$, so ist der Schnittpunkt P_1 der Geraden PC mit LK der zu P gehörige Krümmungsmittelpunkt P_1. Man beachte, daß beim Rollen des Kreises Γ' auch der Punkt L eine Epizykloide beschreibt, die zu der von P beschriebenen kongruent ist.

Ist nun C' der auf Γ' dem Punkte C diametral gegenüberliegende Punkt, so wird $CPC'L$ ein Rechteck, also $LC' \parallel P_1C$ und damit

$$\frac{KP_1}{KL} = \frac{KC}{KC'} = \text{konst.}$$

So ist zu sehen, daß der Krümmungsmittelpunkt P_1 eine Epizykloide beschreibt, die zu der von L und damit auch zu der von P durchlaufenen ähnlich ist: die Evolute einer Epizykloide ist eine ähnliche Epizykloide.

Von der hypozykloidalen Bewegung wollen wir nur den Fall betrachten, wo der rollende Kreis Γ' halb so groß ist wie der feste Kreis Γ, also durch dessen Mittelpunkt K hindurchgeht. Es ist dann leicht zu sehen, daß ein Punkt P des Kreises Γ' einfach einen Durchmesser OO_1 des Kreises Γ beschreibt. Denn ist in der Figur P der zweite Schnittpunkt von OO_1 mit dem durch K gehenden und Γ in C berührenden Kreise um K', so wird $\sphericalangle PK'C = 2 \sphericalangle OKC$, also da $CK' = \frac{1}{2} CK$ ist, Bogen PC = Bogen OC, also rollt der kleine Kreis von O anfangend in dem großen Kreise. Wir haben so eine erste wichtige Art der Geradführung gefunden.

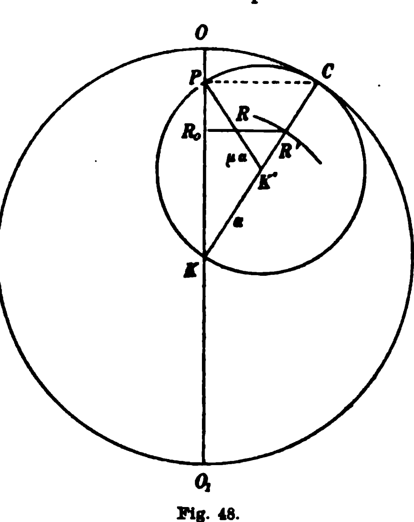


Fig. 48.

Ist nun R ein beliebiger Punkt auf $K'P$, R_0 der Fußpunkt des aus ihm auf OO_1 gefällten Lotes, R' der Schnittpunkt dieses Lotes mit KC, so wird, da auch $CP \perp OO_1$ ist, wenn wir $K'P = a$, $K'R = \mu a$ annehmen

$$KR' = KK' + K'R' = K'P + K'R = (1+\mu)a,$$

ferner

$$R_0R' : PC = KR' : KC = \tfrac{1}{2}(1+\mu),$$

$$RR' : PC = K'R : K'P = \mu,$$

also

$$\frac{R_0R}{R_0R'} = 1 - \frac{RR'}{R_0R'} = 1 - \frac{2\mu}{1+\mu} = \frac{1-\mu}{1+\mu}.$$

Nehmen wir nun R in dem rollenden Kreise fest an, so wird $\mu =$ konst., mithin auch $KR' =$ konst., R' bewegt sich demnach auf einem Kreise mit dem Mittelpunkt K; die Ordinate $R_0 R'$ dieses Kreises wird aber durch R in konstantem Verhältnisse geteilt und daraus folgt, daß R' sich auf einer Ellipse mit dem Mittelpunkte K bewegt, deren große Achse in die Gerade $O O_1$ fällt. Die betrachtete Art der Geradführung liefert also gleichzeitig eine Ellipsenführung.

Wir gelangen zu dieser Ellipsenführung auch auf die folgende Art. Wir verlangen, daß zwei Punkte A, B der beweglichen Figur zwei zueinander senkrechte Gerade OA und OB beschreiben. Die Lote auf diesen Bahnlinien in A und B müssen sich in dem momentanen Pol C schneiden, und da $OC = AB$ konstant ist, beschreibt C einen Kreis Γ mit dem Mittelpunkt O. Der Radius dieses Kreises ist das Doppelte von dem Radius des dem Rechteck $OACB$ umschriebenen Kreises Γ'. Läßt man diesen Kreis Γ' in dem Kreise Γ rollen, so erhält man genau die vorgeschriebene Bewegung, A und B bewegen sich auf den beiden senkrechten Durchmessern des großen Kreises. Die so gewonnene Bewegung ist also in der Tat dieselbe wie die oben besprochene und ein beliebiger Punkt von AB beschreibt eine Ellipse, deren Achsen in die beiden zueinander senkrechten Geraden fallen. Auf dieser seit langer Zeit gekannten Tatsache ist der Ellipsenzirkel begründet, den man zu der Zeichnung einer Ellipse mit gegebenen Achsen benutzt.

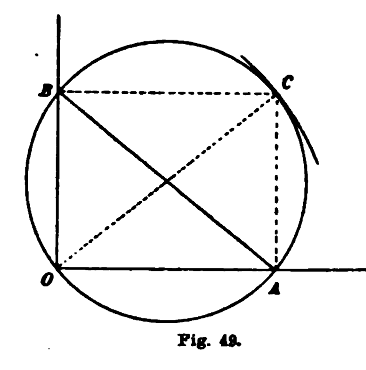


Fig. 42.

Übungsbeispiele.

1. **Aufgabe.** *Die Komponenten der Geschwindigkeit und der Beschleunigung zu finden, wenn das Koordinatensystem so gewählt ist, daß der Momentanpol der Ursprung und die gemeinsame Tangente der Polbahnen die x-Achse wird.*

Auflösung. Aus der Gleichung (2) ergibt sich für die Geschwindigkeitskomponenten

$$v_x = -\omega y, \quad v_y = \omega x,$$

aus der Gleichung (3), da $i\dot{C}$ die Richtung der y-Achse hat und mod $\dot{C} = V$ ist, für die Beschleunigungskomponenten

$$w_x = -\dot{\omega} y - \omega^2 x, \quad w_y = \dot{\omega} x - \omega^2 y - \omega V.$$

2. Aufgabe. *Bei der Bewegung einer ebenen Figur geht eine Gerade durch einen festen Punkt A, während ein Punkt B der beweglichen Figur eine Gerade OB durchläuft. Diese Bewegung zu untersuchen.*

Auflösung. O sei so gewählt, daß OA zu OB senkrecht ist. Der Punkt A läßt sich als ein unendlich kleiner Kreis ansehen, den die Gerade AB umhüllt. Der Momentanpol C liegt also auf dem Lote, das man in A auf AB errichtet und andererseits auf der durch B senkrecht zu OB gezogenen Linie. Der Wendekreis geht durch B und C, der Rückkehrkreis durch A und C. Da die beiden Kreise aber bezüglich C zu einander symmetrisch sind, liegt auch der zu A bezüglich C symmetrische Punkt A' auf dem Wendekreis und dieser ist so bestimmt. Der Schnittpunkt von OB mit dem in A' auf AA' errichteten Lote ist der geometrische Beschleunigungspol. Ein beliebiger Punkt P von AB beschreibt die Konchoide der Geraden für den Pol A, PC ist die Normale der Konchoide, von der man, da man den Wendekreis kennt, mit Hilfe der ersten der angegebenen Konstruktionen den Krümmungsmittelpunkt bestimmen kann.

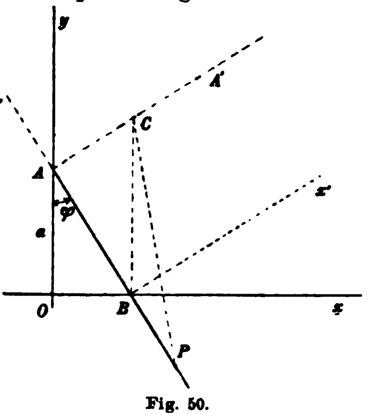


Fig. 50.

Wir können auch leicht die beiden Polbahnen bestimmen. Wählen wir OB und OA zu Koordinatenachsen, so finden wir, wenn $OA = a$, $\sphericalangle\, OAB = \varphi$, für C die Koordinaten

$$x = OB = a \operatorname{tang} \varphi, \qquad y = BC = \frac{AB}{\cos\varphi} = \frac{a}{\cos\varphi^2};$$

eliminieren wir φ, so erhalten wir die Gleichung der Kurve Γ

$$x^2 = a(y - a),$$

die Kurve ist eine Parabel mit dem Scheitel A und der Achse AO. Beziehen wir dagegen C auf ein bewegliches Koordinatensystem (x', y'), dessen Ursprung der Punkt B und dessen y'-Achse BA ist, so wird

$$x' = AC = BC \cdot \sin\varphi = a \sin\varphi : \cos\varphi^2,$$
$$y' = AB = a : \cos\varphi,$$

und durch Elimination von φ erhält man die Gleichung der Kurve Γ'

$$y'^4 = a^2(x'^2 + y'^2).$$

3. Aufgabe. *Ein rechter Winkel AO_1B bewegt sich so, daß der Punkt B den einen Schenkel OB eines festen rechten Winkels BOA durchläuft, während der andere Schenkel des beweglichen Winkels beständig durch den festen Punkt A hindurchgeht; hierbei werde $OA = O_1B$. Die Polbahnen zu bestimmen.*

Auflösung. Der Momentanpol C ist der Schnittpunkt des in B auf OB und des in A auf O_1A errichteten Lotes. Ist aber L der Schnittpunkt von OA und O_1B, so wird $\triangle BOL \cong \triangle AO_1L$ und damit auch $\triangle LBC \cong \triangle LAC$, also $BC = AC$. Daraus folgt, daß die feste Polbahn Γ eine Parabel ist, von der A den Brennpunkt und die Gerade OB die Leitlinie bildet, und daß andererseits die bewegliche Polbahn Γ' eine kongruente Parabel wird, bei der O_1A die Leitlinie und B den Brennpunkt bildet. Die Gerade CL ist die gemeinsame Tangente der beiden Parabeln. Der Scheitel O_1 des beweglichen Winkels beschreibt eine Kurve, deren Punkte man aus dem festen Punkte O erhält, indem man ihn an den Parabeltangenten spiegelt, denn O_1 liegt symmetrisch zu O bezüglich der Geraden CL. Die so entstehende Kurve ist eine Strophoide (Loria, Spezielle Kurven, S. 58).

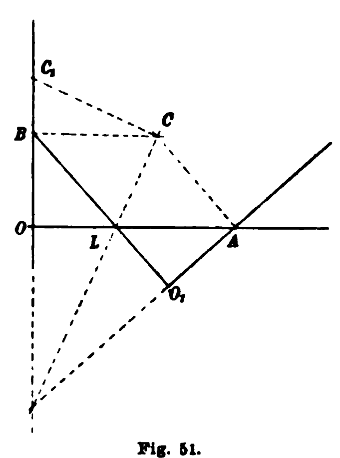


Fig. 51.

Der Wendekreis geht durch C und B hindurch und berührt in C die Linie CL als die gemeinsame Tangente der beiden Polbahnen. Errichtet man also auf LC in C das Lot, so schneidet dieses aus dem Schenkel OB das geometrische Beschleunigungszentrum C_1 aus.

4. Aufgabe. *Die Schenkel a, b eines unveränderlichen Winkels ε gleiten an zwei festen Kreisen α, β mit den Mittelpunkten A, B entlang. Die Polbahnen und die Enveloppe einer beliebigen dritten, mit a und b fest verbundenen Geraden e zu finden.*

Auflösung. Der Momentanpol C wird gefunden, indem man von den Berührungspunkten der Geraden a, b mit den Kreisen α, β die Linien nach den Mittelpunkten A, B zieht und zum Schnitt bringt. Errichtet man in A und B auf CA und CB die Lote, d. h. zieht durch A und B zu a und b die Parallelen und nennt M ihren Schnittpunkt, so ist der durch A, B, M gelegte Kreis, d. h. der Kreis, der durch A, B geht und den Peripheriewinkel ε faßt, der Ort des Poles C, also die feste Polbahn Γ. Es wird aber $CM = AB : \sin \varepsilon$ konstant und in dem beweglichen Winkel hat M, da seine Abstände von a und b gleich den Radien der Kreise α und β sind, eine feste Lage, also ist der um M mit dem Radius $AB : \sin \varepsilon$ beschriebene Kreis die bewegliche Polbahn Γ'.

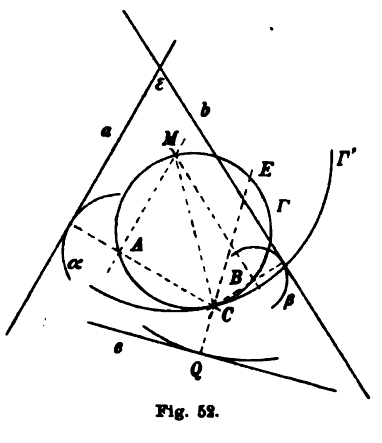


Fig. 52.

Nimmt man die Gerade e hinzu und fällt auf sie aus C das Lot CQ, so muß die Gerade e ihre Enveloppe in dem betrachteten Moment in Q berühren. Ist aber E der zweite Schnittpunkt der Geraden QC mit dem festen Kreise Γ, so bleibt, wenn C auf dem Kreise fortrückt, mit dem Winkel ACE auch der Punkt E fest. Die Gerade e umhüllt also einen um E als Mittelpunkt beschriebenen Kreis.

5. Aufgabe. *Gegeben sei der Momentanpol C, die gemeinsame Tangente der beiden Polbahnen und von einem Punkt P der zugehörige Krümmungsmittelpunkt P_1. Zu einem beliebigen anderen Punkt Q den zugehörigen Punkt Q_1 zu finden.*

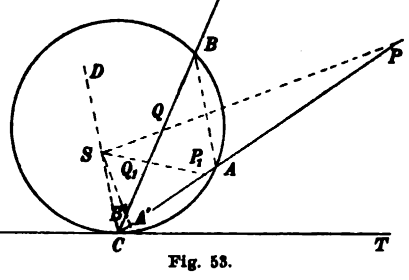


Fig. 53.

Auflösung. Wir gehen aus von dem Wendekreis, der die Linien CP und CQ in A und B zum zweitenmal treffen möge. Es wird dann, wenn

$$CP_1 = r_1, \quad CP = r, \quad CQ_1 = r_1', \quad CQ = r'$$

gesetzt wird,

$$\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r'} = \frac{CA}{CB}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right).$$

Daraus aber ist leicht abzuleiten, daß die Verbindungslinien $P_1 Q_1$ und PQ sich in einem Punkte S der durch C zu AB gezogenen Parallelen CD schneiden. Die durch S gehenden Strahlen schneiden nämlich die Geraden CA und CB in den Punkten zweier perspektiven Punktreihen, wobei C der sich selbst entsprechende Punkt ist. Daraus folgt für die Abstände r, r' zweier entsprechender Punkte von C eine Relation von der Form

$$r' = \frac{r}{\alpha r + \beta} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{r'} = \alpha + \frac{\beta}{r},$$

und für zwei Paare entsprechender Punkte ergibt sich

$$\frac{1}{r'} - \frac{\beta}{r} = \frac{1}{r_1'} - \frac{\beta}{r_1} = \alpha.$$

Um β zu bestimmen, wähle man zwei dem C sehr nahe benachbarte Punkte A' und B'. Es wird dann α zu vernachlässigen und

$$\beta = \frac{CA'}{CB'} = \frac{CA}{CB};$$

somit ergibt sich

$$\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r'} = \frac{CA}{CB}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right),$$

wie es sein soll.

Da nun der Winkel SCB gleich dem Winkel CBA wird und dieser Peripheriewinkel gleich dem Tangentenwinkel ACT, der als von vorneherein bekannt anzusehen ist, so kann man die Gerade CS sofort finden. Darauf hat man sie mit der Verbindungslinie PQ zu schneiden und den Schnittpunkt S mit P_1 zu verbinden. So findet man auf CQ den gesuchten Punkt Q_1.

Wenn umgekehrt die beiden Paare entsprechender Punkte P, P_1 und Q, Q_1 gegeben sind, so liefert der Schnittpunkt der Linien PP_1 und QQ_1 den Momentanpol C, der Schnittpunkt von PQ und $P_1 Q_1$ den Punkt S, und tragen wir den Winkel SCQ in C an CP an, so finden wir die gemeinsame Tangente CT der beiden Polbahnen.

6. Aufgabe. *Die Beziehung zwischen einem Punkte P und dem zugehörigen Krümmungsmittelpunkte P_1 analytisch auszudrücken.*

Auflösung. Aus der Formel (7) folgt

$$\sin\theta\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r_0},$$

wenn $r_0 = - V : \omega$, und weiter

$$r_1 = \frac{r_0 r \sin\theta}{r_0 \sin\theta - r}, \quad r = \frac{r_0 r_1 \sin\theta}{r_0 \sin\theta + r_1}.$$

Setzt man hierin, indem man die Gleichungen erst mit $\cos\theta$ und dann mit $\sin\theta$ multipliziert, die Werte ein

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta;\qquad x_1 = r_1\cos\theta,\quad y_1 = r_1\sin\theta,$$

so erhält man die analytische Darstellung der Verwandtschaft:

$$x_1 = -\frac{r_0 xy}{x^2 + y^2 - r_0 y},\qquad y_1 = -\frac{r_0 y^2}{x^2 + y^2 - r_0 y}$$

und

$$x = \frac{r_0 x_1 y_1}{x_1^2 + y_1^2 + r_0 y_1},\qquad y = \frac{r_0 y_1^2}{x_1^2 + y_1^2 + r_0 y_1}.$$

Dies ist eine quadratische Transformation. Der Geraden

$$ux + vy + 1 = 0$$

entspricht der Kegelschnitt

$$x_1^2 + y_1^2 + r_0 y_1 + r_0 y_1 (u x_1 + v y_1) = 0.$$

Dieser Kegelschnitt oskuliert den Rückkehrkreis

$$x_1^2 + y_1^2 + r_0 y_1 = 0,$$

dessen Punkte P_1 den unendlich fernen Punkten P entsprechen, im Koordinatenursprung C. Denn die Schnittpunkte des Kegelschnittes mit dem Kreise verteilen sich auf die beiden Geraden

$$y_1 = 0,\quad u x_1 + v y_1 = 0.$$

Die erste Gerade ist die Kreistangente in C, die zweite die zu der gegebenen Geraden durch C gezogene Parallele. Drei von den vier Schnittpunkten des Kegelschnittes mit dem Rückkehrkreis fallen also nach C, d. h. der Kegelschnitt oskuliert den Kreis in C. Auf dieselbe Weise zeigt man, daß wenn der Punkt P_1 auf einer Geraden wandert, der Punkt P sich auf einem Kegelschnitt bewegt, der den Wendekreis in C oskuliert.

7. Aufgabe. *Die Bewegung eines gewöhnlichen Kurbelgetriebes zu untersuchen, insbesondere unter der Voraussetzung, daß die Länge b der Schubstange groß ist gegen den Kurbelarm a.*

Auflösung. Es sei OD die Gerade, in der sich die Kolbenstange bewegt, OA die Kurbel in einer beliebigen Stellung, die durch den Winkel $DOA = \varphi$ festgelegt

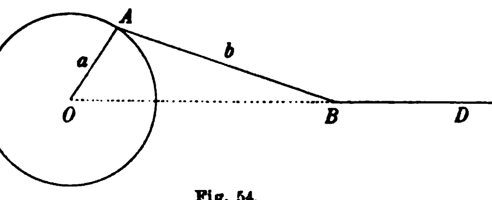


Fig. 54.

wird, AB die Schubstange und θ der Winkel OBA. Dann ergibt sich

$$x = OB = a\cos\varphi + b\cos\theta.$$

Andererseits wird

$$\frac{\sin\theta}{\sin\varphi} = \frac{a}{b} = \varepsilon,$$

und daraus folgt

$$x = a\cos\varphi + b\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin\varphi^2}.$$

Ist ε insbesondere sehr klein, so ergibt sich, daß

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \varepsilon^2\sin\varphi^2} = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\sin\varphi^2$$

gesetzt werden kann, und wir finden

$$x = b + a\left(\cos\varphi - \frac{\varepsilon}{2}\sin\varphi^2\right).$$

So ist die Bewegung des Punktes B bestimmt. Für die Größe v seiner Geschwindigkeit ergibt sich $\pm\, dx/dt$, und für das Verhältnis von v zu der Geschwindigkeit $a\omega$ des Punktes A, da $d\varphi = \omega dt$ ist,

$$\frac{v}{a\omega} = -\frac{dx}{a\,d\varphi} = \sin\varphi\left(1 + \frac{\varepsilon\cos\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin\varphi^2}}\right)$$

und angenähert

$$\frac{v}{a\omega} = \sin\varphi\,(1 + \varepsilon\cos\varphi).$$

Tragen wir das Verhältnis $v:\omega$ auf der Linie OA von O aus als eine Strecke $r = OP$ ab, so erfüllen die Punkte P die Reuleaux-sche Fahrtkurve, deren Polargleichung in der Annäherung lautet

$$r = \pm\, a\sin\varphi\,(1 + \varepsilon\cos\varphi).$$

Das obere Zeichen gilt für $0 < \varphi < \pi$, das untere für $\pi < \varphi < 2\pi$. Für $\varepsilon = 0$ erhält man

$$r = \pm\, a\sin\varphi,$$

also zwei kongruente Kreise, welche einander und die Linie OB in O berühren und das sog. Zeunersche Diagramm bilden (Fig. 55).

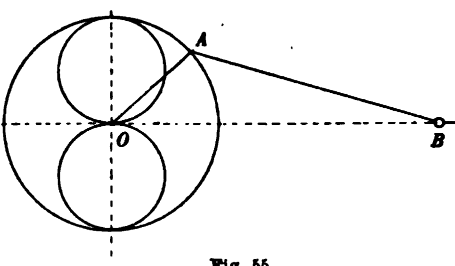


Fig. 55.

Für die feste Polbahn Γ findet man, da der Rotationspol der Schnittpunkt C der Linie OA mit der in B auf OB errichteten Senkrechten ist, aus dem rechtwinkligen Dreieck OBC, in dem der Winkel bei $O = \varphi$, der Winkel bei C gleich $\frac{\pi}{2} - \varphi$ ist und die Seite $OC = \varrho$ gesetzt sei, die Gleichung

$$(\varrho - a)^2 + \varrho^2\sin\varphi^2 - 2(\varrho - a)\,\varrho\sin\varphi\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = b^2$$

oder

$$\varrho(\varrho - 2a)\cos\varphi^2 = b^2 - a^2.$$

Für die bewegliche Polkurve Γ' erhält man, indem man die Entfernung AC mit ϱ_1, den Winkel CAB mit φ_1 bezeichnet, aus den zwei Gleichungen

$$(\varrho_1 + a)\sin\varphi\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \varrho_1 - b\cos\varphi_1,$$

$$(\varrho_1 + a)^2\sin\varphi^2 = \varrho_1^2 + b^2 - 2\varrho_1 b\cos\varphi_1$$

durch Elimination von φ sofort

$$(\varrho_1 + a)(\varrho_1 - b\cos\varphi_1) = \varrho_1^2 + b^2 - 2\varrho_1 b\cos\varphi_1$$

oder

$$b(\varrho_1 - a)\cos\varphi_1 = b^2 - a\varrho_1.$$

8. **Aufgabe.** *Bei der Kulissensteuerung einer Lokomotive sind um einen Punkt O zwei exzentrische Kreise α und β drehbar, ihre*

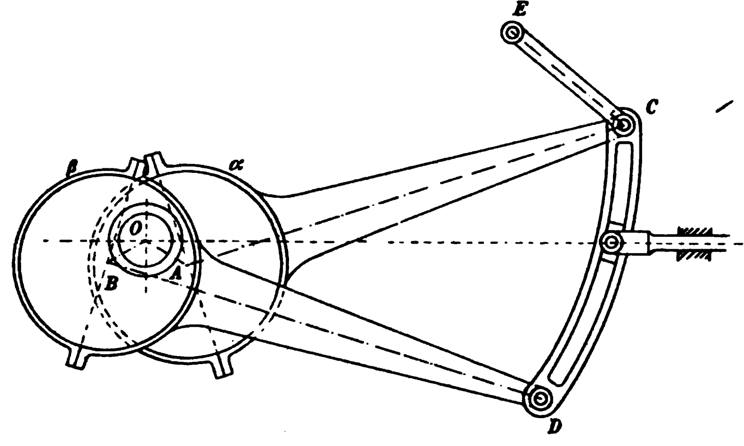


Fig. 56.

Mittelpunkte A und B sind mit den Endpunkten C und D eines Kreisbogens, der Kulisse, starr verbunden. Der Punkt C ist mit einem festen Punkte E fest verbunden. Man soll den Momentanpol für die Bewegung der Kulisse bestimmen.

Auflösung. Da der Punkt C mit E fest verbunden ist, muß er sich senkrecht zu EC bewegen und ein erster Ort für den Momentanpol ist die Linie EC selbst. Ein zweiter Ort wird durch den Satz von Philipps geliefert: Der Schnittpunkt S der Exzenterstangen AC und BD, der Drehungsmittelpunkt O der Exzenterscheiben und

der gesuchte Momentanpol I' liegen in einer geraden Linie. Um diesen Satz zu beweisen, bezeichnen wir mit ω die Winkelgeschwindigkeit der Exzenter, mit ω_1 und ω_2 die Winkelgeschwindigkeiten, mit denen sich die Geraden AC und BD, die eine um den Schnittpunkt U von OA und IC, die andere um den Schnittpunkt V von OB und ID drehen, dann ergeben sich für die Größe der Geschwindigkeiten der Punkte A und B die Werte

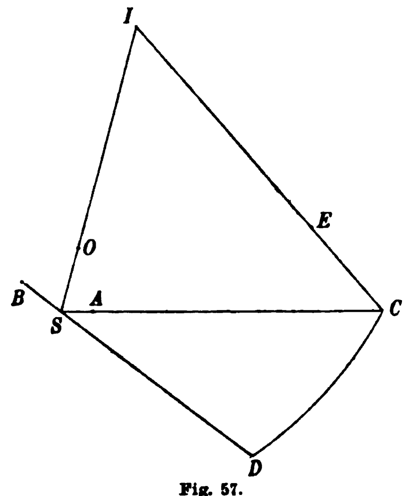


Fig. 57.

$$\omega \cdot OA = \omega_1 \cdot UA,$$
$$\omega \cdot OB = \omega_2 \cdot VB$$

und für die Punkte C und D, wenn ω' die Winkelgeschwindigkeit der Kulisse ist, $\omega_1 \cdot UC = \omega' \cdot IC$, $\omega_2 \cdot VD = \omega' \cdot ID$; somit wird

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{OA \cdot UC}{UA \cdot IC} = \frac{OB \cdot VD}{VB \cdot ID}.$$

In dieser Gleichung liegt der zu beweisende Satz. Wählt man nämlich auf AC den Punkt M so, daß $IM \parallel OA$ wird, und entsprechend N auf BD so, daß $IN \parallel OB$, dann wird

$$IM = \frac{UA \cdot IC}{UC}, \qquad IN = \frac{VB \cdot ID}{VD}$$

und somit

$$\frac{OA}{IM} = \frac{OB}{IN},$$

also gehen die Geraden AM oder AC, BN oder BD und OI durch einen Punkt S.

9. Aufgabe. *Den allgemeinen Charakter der sogen. Dreistabbewegung zu untersuchen.*

Auflösung. Wird von einem Gelenkviereck $OABO'$ die Seite OO' festgehalten, so heißt die entstehende Bewegung eine Dreistabbewegung (three bar motion). Der Schnittpunkt C der Verlängerungen von OA und $O'B$ ist der Momentanpol. Die von dem Momentanpol beschriebenen Polkurven sind von der 8. Ordnung und von R. Müller in der Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 48, S. 224 (1903) untersucht worden.

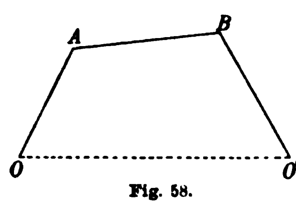


Fig. 58.

Ein mit dem Stabe AB starr verbundener Punkt P beschreibt eine Wattsche Kurve (Loria, Spezielle eb. Kurven S. 232), die von der 6. Ordnung und eine sog. trizirkulare Kurve ist, d. h. auch von keinem Kreise in mehr als 6 Punkten geschnitten wird. O und O' bilden von ihr zwei Brennpunkte. Sie hat drei Doppelpunkte, diese liegen auf einem über OO' als Sehne beschriebenen Kreise, welcher den Winkel APB als Peripheriewinkel faßt, also wenn insbesondere P dem Stabe AB selbst angehört, auf der Geraden OO' selbst. Vgl. die Arbeiten in den Proceedings of the London Mathem. Society von Cayley, vol. 4 (1872), p. 105, vol. 7 (1876), p. 136, Roberts, vol. 7 (1876), p. 14, ferner zahlreiche Aufsätze von R. Müller, die meisten in der Zeitschrift für Math. u. Physik, und L. Allievi, Cinematica della biella piana, Napoli 1895.

10. Aufgabe. *Von dem Gelenkviereck $ABCD$, in dem $AD = BC$, wird die Seite AB festgehalten, man soll insbesondere die Kurve untersuchen, die von dem Mittelpunkte M der Seite CD beschrieben wird.*

Auflösung. Wir bezeichnen den Winkel, den die um A drehbare Seite AD mit der festen Seite bildet, mit θ und analog den Winkel CBA mit ω, ferner setzen wir $AB = 2a$, $AD = BC = b$, $CD = 2c$. O sei die Mitte von AB, auf O als Ursprung und OB als x-Achse beziehen wir ein Koordinatensystem, in dem x, y die Koordinaten von M werden mögen. Endlich sei $OM = r$. Dann ergibt sich, da

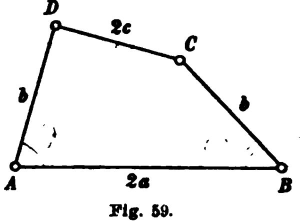


Fig. 59.

$x_1 = -a + b\cos\theta$, $y_1 = b\sin\theta$ die Koordinaten von D und $x_2 = a - b\cos\omega$, $y_2 = b\sin\omega$ die von C werden,

$$y = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2) = \tfrac{1}{2}b(\sin\theta + \sin\omega), \quad x = \tfrac{1}{2}b(\cos\theta - \cos\omega),$$
$$r^2 = a^2 + b^2 - c^2 - ab(\cos\theta + \cos\omega),$$
$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 =$$
$$[2a - b(\cos\theta + \cos\omega)]^2 + b^2(\sin\theta - \sin\omega)^2 = 4c^2.$$

Aus diesen Gleichungen haben wir, um die gesuchte Kurvengleichung zu erhalten, θ und ω zu eliminieren. Wir finden zunächst die einfache Gleichung

$$r^2 = x^2 + y^2 = b^2 \sin\tfrac{1}{2}(\theta + \omega)^2,$$

ferner läßt sich die erste Gleichung schreiben

$$4a^2b^2\sin^2\tfrac{1}{2}(\theta + \omega)\cos^2\tfrac{1}{2}(\theta - \omega) = 4a^2y^2$$

und die dritte

$$4a^2b^2\cos^2\tfrac{1}{2}(\theta + \omega)\cos^2\tfrac{1}{2}(\theta - \omega) = (r^2 + c^2 - a^2 - b^2)^2.$$

Daraus ergibt sich

$$r^2[(r^2+c^2-a^2-b^2)^2+4a^2y^2]=4a^2b^2y^2$$

oder wenn wir noch $r^2=x^2+y^2$ einsetzen,

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2+c^2-a^2-b^2)^2+4a^2y^2(x^2+y^2-b^2)=0$$

als Gleichung der gesuchten Kurve, die sonach von der sechsten Ordnung ist.

Für $c=a$ zerfällt sie in einen Kreis $(x^2+y^2-b^2=0)$ und eine Kurve vierter Ordnung

$$(x^2+y^2)^2-b^2x^2+(4a^2-b^2)y^2=0,$$

eine sog. Boothsche Lemniskate. Für $b=a\sqrt{2}$ wird die Gleichung dieser Kurve

$$(x^2+y^2)^2-b^2(x^2-y^2)=0;$$

sie ist dann eine gewöhnliche Lemniskate.

Auch die Polbahnen lassen sich in dem Falle $a=c$ sehr einfach bestimmen. Da nämlich der Momentanpol P der Schnittpunkt der Verlängerungen von AD und CB ist, ergibt sich aus $AD=BC$ und $AP=CP$ sofort

$$AP-BP=CP-DP=\pm b.$$

Die erste Differenz ist also konstant für die feste Polkurve, die zweite Differenz für die bewegliche Polkurve, und beide Polkurven werden Hyperbeln, die eine mit den Brennpunkten A und B, die andere mit den Brennpunkten C und D.

Von besonderer Wichtigkeit sind die Fälle, wo der in Betracht kommende Teil der von M beschriebenen Kurve von einer Geraden sehr wenig abweicht, wo also der Mechanismus eine angenäherte Geradführung liefert.

Der erste Fall ist der des sogen. Wattschen Parallelogramms. In diesem Falle ist $b^2+c^2=a^2$, die Stäbe AD, DC, CB bilden also in einer bestimmten Mittellage einen rechtwinkligen Streckenzug (Fig. 60).

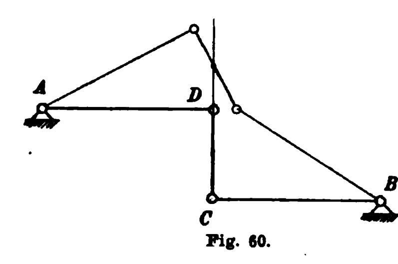


Fig. 60.

Der zweite Fall ist der des von Tschebischeff ersonnenen Mechanismus (Fig. 61). Dann ist $a=2c$, $b=5c$. Dies hat zur Folge, daß in zwei seitlichen Grenzlagen der Stab CD und der Stab BC oder AD zu dem Stabe AB senkrecht stehen, so daß entweder A, D, C oder B, C, D

in einer zu AB senkrechten Geraden liegen, und daß in diesen Grenzlagen die Mitte M des Stabes CD von der Geraden AB gleich weit entfernt ist wie in der symmetrischen Mittellage. In der Tat wird hier

$$(2a)^2 + (b - 2c)^2 = b^2$$

und

$$(b - c)^2 = b^2 - (a + c)^2.$$

Fig. 61.

11. Aufgabe. *In dem Gelenkvierecke $ABCD$ sei*

$$AB = BC = a, \quad AD = CD = b.$$

Man bestimme die Polbahnen für den Stab CD, wenn der Stab AB festgehalten wird.

Auflösung. Die Dreiecke BAD und BCD sind in diesem Falle kongruent, ferner ist AC senkrecht auf BD. Der Momentanpol von CD ist der Schnittpunkt P der Geraden BC und AD. Da nun

Fläche PDC = Fläche PAB + 2 Fläche BAD

wird, wenn wir den Winkel BAD oder BCD mit $\pi - \theta$ bezeichnen, so ergibt sich

$$\tfrac{1}{2}(PB + a)\, b \sin\theta = \tfrac{1}{2} PA \cdot a \sin\theta + ab \sin\theta$$

und daraus

$$b \cdot PB - a \cdot PA = ab.$$

Der Ort des Punktes P ist also in der festen Ebene ein **kartesisches Oval**, von dem A und B die Brennpunkte bilden. Aus der vorstehenden Gleichung folgt aber auch

$$b \cdot PC - a \cdot PD = ab.$$

Fig. 62.

Mithin ist der Ort des Punktes P in der beweglichen Ebene ebenfalls ein kartesisches Oval, von dem C und D die Brennpunkte sind.

Um die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten zu finden, setzen wir

$$AP = r, \quad BAP = \theta,$$

dann folgt

$$BP^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta$$

und da andererseits durch doppelte Ausrechnung der Fläche PBD

$$b \cdot BP = a(b + r)$$

wird, ergibt sich weiter

$$b^2(a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta) = a^2(b^2 + r^2 + 2br)$$

und daraus

$$r = \frac{2ab}{b^2 - a^2}(a + b\cos\theta).$$

Dies ist die Gleichung einer **Pascalschen Schnecke.**

12. Aufgabe. *Ein überschlagenes Gelenkviereck $ABCD$, in dem $AB = CD$, $AD = BC$, heißt ein Hartsches Antiparallelogramm. Wird die Mitte O von AB festgehalten, so soll man zeigen, daß die Mitten P und Q von AD und BC mit O, die beständig in einer Geraden liegen, bei der Bewegung das Produkt $OP \cdot OQ$ konstant bleibt (Hartscher Inversor).*

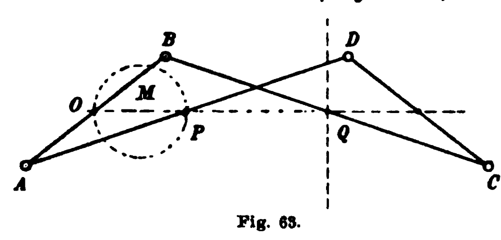


Fig. 63.

Auflösung. Da die Winkel bei A und C oder bei B und D einander gleich sind, läßt sich dem Antiparallelogramm ein Kreis umschreiben. Man kann also auf das Viereck $ABDC$ den Ptolemäischen Lehrsatz anwenden und findet, wenn $AB = CD = a$, $AD = BC = 2b$ gesetzt wird,

$$AC \cdot BD + 4a^2 = 4b^2.$$

Nun ergibt sich aber weiter

$$OP = \tfrac{1}{2}AC, \quad OQ = \tfrac{1}{2}BD,$$

also wird

$$OP \cdot OQ = b^2 - a^2.$$

Zwingen wir nun P, sich auf einem Kreise zu bewegen, der durch O geht, indem wir P mit einem festen Punkte M durch einen Stab von der Länge $MO = r$ verbinden, so wird, wenn wir den Winkel MOP mit θ bezeichnen,

$$OP = 2r\cos\theta,$$

also folgt aus der vorhergehenden Gleichung

$$OQ \cdot \cos\theta = \frac{b^2 - a^2}{2r},$$

mithin liegt Q auf einer Geraden, die auf der Linie OM senkrecht steht, und der Hartsche Inversor bietet ein Mittel zur **exakten Geradführung eines Punktes Q.**

13. Aufgabe. *Von einem Gelenkviereck $APBQ$ mit vier gleichen Seiten a sind die Gegenecken A und B mit einem festen Punkte O durch zwei Stäbe von der gleichen Länge b drehbar befestigt. Zu zeigen, daß zwischen den drei Punkten O, P, Q, die offenbar stets in gerader Linie liegen, die Beziehung besteht*

$$OP \cdot OQ = b^2 - a^2$$

(Peaucellierscher Inversor).

Auflösung. Man schlage um A den Kreis, der durch P und Q geht, M und N seien die Schnittpunkte dieses Kreises mit der Geraden OA. Dann wird

$$OP \cdot OQ = OM \cdot ON.$$

Fig. 64.

Es ist aber

$$OM = b - a, \quad ON = b + a,$$

also erhalten wir

$$OP \cdot OQ = b^2 - a^2.$$

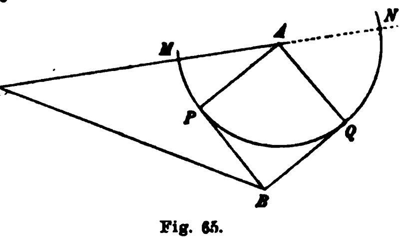


Fig. 65.

Peauselliers Entdeckung der exakten Geradführung durch den hier angegebenen Mechanismus, die in den Nouvelles Annales de Mathém. (2) t. 3 (1864), p. 414 mitgeteilt ist und von Lipkin, Bullet. de l'Acad. de St. Pétersbourg t. 16 (1871), p. 57 wiedergefunden wurde, gab den Anlaß zu den zahlreichen Arbeiten über die Gelenksysteme. Man vgl. die Vorlesung von Sylvester an der Royal Institution: On recent discoveries in Mechanical Conversion of Motion, die in den Notices of the Proceedings... of the Royal Institution, vol. 7 (1873—75) und in der Revue Scientifique (2) vol. 4 (1874), p. 490 veröffentlicht ist, ferner Les Mondes (2) t. 37 (1875), p. 623, 667, und die kleine Schrift von Kempe, How to draw a straight line, London 1877, außerdem Peaucellier, Nouvelles Annales (2) t. 12 (1873), p. 71; Liguine, ebenda t. 14 (1875), p. 529; Tschebyscheff, Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes (Mémoires des savants étrangers, t. 7 (1853), p. 537); Sur une modification du parallélogramme articulé de Watt (Bulletin de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg, t. 4 (1862), p. 434); Hart, Messenger of Mathematics, vol. 4, p. 82, 116, vol. 6, p. 39 (1874—1875).

Siebentes Kapitel.

Kontinuierliche Bewegung eines räumlichen starren Systems.

1. Bewegung um einen festen Punkt. Die Bewegung eines räumlichen Systems um einen festen Punkt läßt sich der Bewegung eines ebenen Systems in seiner Ebene an die Seite stellen. In der Tat handelt es sich hier ja um die Bewegung einer sphärischen Figur auf ihrer Kugel, so daß die Beziehung zwischen den beiden Bewegungsarten dieselbe ist wie zwischen der ebenen und der sphärischen Geometrie. Nach der Formel (6) in Kap. V ergibt sich, wenn O der feste Punkt, also $\dot{O} = 0$ ist, für die Geschwindigkeit eines Punktes P der Ausdruck

$$\dot{P} = \Omega \wedge (P - O): \tag{1}$$

die momentane Bewegung ist mit einer Rotation um eine durch den festen Punkt O gehende Achse, die momentane Rotationsachse, äquivalent.[1])

Demnach sind die Bahnkurven der einzelnen Punkte normal zu den Ebenen, welche die Punkte mit der momentanen Rotationsachse verbinden und es zeigt sich: die Normalebenen der Bahnkurven aller Punkte des Systems für einen bestimmten Augenblick gehen durch die momentane Rotationsachse hindurch.

Den durch die Gleichung

$$\mathfrak{C} = O + \Omega$$

bestimmten Punkt $\mathfrak{C}$ nennen wir den Rotationspol. Seine verschiedenen Lagen im Raume erfüllen eine Kurve, welche die Herpolhodie heißt; der Kegel Γ', welcher die Kurve aus O

---

1) Dieser Satz wurde von d'Alembert entdeckt: Recherches sur la précession des équinoxes, Paris 1749, p. 83.

projiziert, heißt der **Herpolhodiekegel** oder der feste Kegel der momentanen Rotationsachsen. Betrachten wir sodann die verschiedenen Punkte in dem starren Körper, die nach und nach Rotationspole werden, so erfüllen diese in dem Körper eine andere Kurve, welche die **Polhodie** heißt, und der Kegel Γ, der sie aus O projiziert, heißt der **Polhodiekegel** oder der bewegliche Kegel der momentanen Rotationsachsen.

Die beiden Kegel haben in jedem Augenblicke eine Seitenlinie, die momentane Rotationsachse, gemein. Genau analog wie im vorigen Kapitel läßt sich schließen, daß die Kegel sich längs dieser Seitenlinie berühren müssen, denn durch eine unendlich kleine Drehung um sie werden zwei ihr unendlich benachbarte Seitenlinien der beiden Kegel zur Deckung gebracht. Also läßt sich schließen: **Die kontinuierliche Bewegung eines starren Systems um einen festen Punkt läßt sich herstellen, indem man einen gegen das System festen Kegel ohne zu gleiten auf einem im Raume festen Kegel rollen läßt.**[1])

Wir betrachten nun die Bewegung einer um O als Mittelpunkt beschriebenen Kugel in sich und nennen r und r_1 die Hauptkreisbögen vom momentanen Rotationszentrum C bis zu den sphärischen Krümmungszentren P, P_1 einer beliebigen Kurve σ und ihrer Enveloppe σ_1, genommen für ihren momentanen Berührungspunkt T, dann ergibt sich durch die Zerlegung der Rotation um C (mit der Winkelgeschwindigkeit ω) in zwei Rotationen (mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2) um P_1 und P

$$\omega = \omega_1 \cdot \frac{\sin(r - r_1)}{\sin r} = \omega_1 \sin r_1 (\operatorname{ctg} r_1 - \operatorname{ctg} r).$$

Nennen wir wie oben V die Größe der Geschwindigkeit, mit der sich das Rotationszentrum C verändert, so wird genau analog wie früher

1) Dieser Satz, der schon von Cauchy und Chasles gegeben wurde, ist in seiner vollen Bedeutuug erkannt worden von Poinsot, Théorie nouvelle de la rotation des corps, Paris 1834 [Journ. de Mathém. t. 16 (1851), pp. 9, 289]. Von ihm rühren auch die Betrachtungen über Polhodie und Herpolhodie her.

$$\omega_1 \sin r_1 = V \sin \theta,$$

wenn θ den Winkel bedeutet, um den die gemeinsame Tangente der sphärischen Polbahnen γ', γ (d. h. der Schnittkurven der Kugel mit dem Polhodie- und Herpolhodiekegel) gegen den Hauptkreis CT geneigt ist. Nennen wir demnach R, R' die sphärischen Krümmungsradien von γ, γ', so ergibt sich analog wie früher

$$\sin \theta \left(\frac{1}{\operatorname{tang} r_1} - \frac{1}{\operatorname{tang} r}\right) = \frac{1}{\operatorname{tang} R} - \frac{1}{\operatorname{tang} R'}. \tag{2}$$

Dies ist die Euler-Savarysche Formel für die Kugel, und es zeigt sich: projizieren wir die Bewegung aus dem Kugelmittelpunkt auf die Tangentialebene der Kugel in C, so ergibt sich in unendlich naher Nachbarschaft dieses Punktes eine ebene Bewegung, bei welcher die Krümmungszentren durch die Projektion aus den analogen auf der Kugel hervorgehen.[1])

2. Polhodie und Herpolhodie. Als die direkte Bewegung bezeichnen wir die Bewegung des Körpers gegen den umgebenden Raum, als die inverse Bewegung die Bewegung des Raumes gegen den Körper. Bei diesen beiden Bewegungen sind die Winkelgeschwindigkeiten gleich groß und von entgegengesetztem Sinne, und deshalb die zugehörigen Rotationspole symmetrisch bezüglich des festen Punktes O.

Es seien $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1$ diese beiden Pole. Wenn $\mathfrak{C}$ die im Körper feste Polhodie der direkten Bewegung beschreibt, so beschreibt $\mathfrak{C}_1$ die im Raume feste Kurve, d. h. die Herpolhodie der inversen Bewegung. Also ist die Polhodie (und Herpolhodie) der direkten Bewegung bezüglich des festen Punktes symmetrisch zu der Herpolhodie (und Polhodie) der inversen Bewegung (Klein und Sommerfeld, S. 14).

Wir beziehen die Lage der einzelnen Punkte im Körper auf ein Koordinatensystem, das im Körper fest ist und dessen

1) Diese Betrachtungen stammen von Aronhold und sind entwickelt in der Dissertation von Buka, Das sphärische Kurbelgetriebe, Göttingen 1876.

Ursprung in O liegt, die Lage dieses Koordinatensystems wiederum auf ein im Raume festes Koordinatensystem mit dem gleichen Ursprung. Zur Zeit t seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die komplexen Parameter, welche die Lage des beweglichen gegen das feste Koordinatensystem bestimmen, zur Zeit $t + \Delta t$ seien die Werte dieser Parameter $\alpha + \Delta\alpha$, $\beta + \Delta\beta$, $\gamma + \Delta\gamma$, $\delta + \Delta\delta$, 2χ sei der Winkel der Rotation, durch die man aus der ersten Lage in die zweite Lage übergeht, und l', m', n' die Richtungskosinus der zugehörigen Rotationsachse, dann werden die Parameter dieser Rotation nach den Gleichungen (17), (27) und (28) in Kap. IV

$$\alpha' = \cos\chi + in'\sin\chi, \quad \beta' = \sin\chi(-m' + il'),$$
$$\gamma' = \sin\chi(m' + il'), \quad \delta' = \cos\chi - in'\sin\chi.$$

Nach (29) in Kap. IV erhalten wir

$$\alpha + \Delta\alpha = \alpha\alpha' + \beta\gamma', \quad \beta + \Delta\beta = \alpha\beta' + \beta\delta'$$

oder

$$\Delta\alpha = -\alpha(1 - \cos\chi) + i\alpha n'\sin\chi + \beta\sin\chi(m' + il'),$$
$$\Delta\beta = -\beta(1 - \cos\chi) - i\beta n'\sin\chi + \alpha\sin\chi(-m' + il').$$

Dividieren wir durch Δt und gehen dann zur Grenze ($\Delta t = 0$) über, so haben wir zu setzen

$$\lim \frac{2\chi}{\Delta t} = \omega, \quad \lim \frac{\sin\chi}{\Delta t} = \tfrac{1}{2}\omega, \quad \lim \frac{1 - \cos\chi}{\Delta t} = 0$$

und erhalten, wenn wir noch $p = l'\omega$, $q = m'\omega$, $r = n'\omega$ setzen,

$$\left.\begin{aligned} \dot\alpha &= \tfrac{1}{2}ir\alpha + \tfrac{1}{2}(ip + q)\beta, \\ \dot\beta &= \tfrac{1}{2}(ip - q)\alpha - \tfrac{1}{2}ir\beta, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

und analog

$$\left.\begin{aligned} \dot\gamma &= \tfrac{1}{2}ir\gamma + \tfrac{1}{2}(ip + q)\delta, \\ \dot\delta &= \tfrac{1}{2}(ip - q)\gamma - \tfrac{1}{2}ir\delta. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich umgekehrt

$$\left.\begin{aligned} p + iq = 2i(\beta\dot\delta - \delta\dot\beta), \quad -p + iq = 2i(\alpha\dot\gamma - \gamma\dot\alpha), \\ r = 2i(\gamma\dot\beta - \alpha\dot\delta) = -2i(\beta\dot\gamma - \delta\dot\alpha). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Führen wir hierin durch (19) in Kap. IV die Eulerschen Winkel φ, ψ, ϑ ein, so ergibt sich

$$p + iq = (\dot{\vartheta} + i\dot{\psi}\sin\vartheta)e^{-i\varphi}, \quad -p + iq = -(\dot{\vartheta} - i\dot{\psi}\sin\vartheta)e^{i\varphi},$$
$$r = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\vartheta$$

oder

$$\left.\begin{aligned} p &= \dot{\vartheta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi, \\ q &= -\dot{\vartheta}\sin\varphi + \dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi, \\ r &= \dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Ist die Bewegung in endlicher Form gegeben, so sind φ, ψ, ϑ als Funktionen der Zeit bekannt. Dann liefern die vorstehenden Gleichungen die Komponenten p, q, r der momentanen Rotation nach den im Körper festen Achsen, ausgedrückt durch φ, ψ, ϑ und ihre Derivierten nach der Zeit, also ebenfalls als Funktionen der Zeit t. Es sind aber p, q, r nichts anderes wie die Koordinaten des Rotationspols $\mathfrak{C}$ in dem gegen den Körper festen Koordinatensystem. Die Gleichungen (6) sind also aufzufassen als die Darstellung der Polhodie, sie liefern die Koordinaten der Punkte dieser Kurve als Funktionen eines Parameters t.

Um auch die Darstellung der Herpolhodie zu finden, benutzt man am besten den zu Anfang dieses Paragraphen bewiesenen Satz und bestimmt den zu dem Rotationspol für die inverse Bewegung bezüglich O symmetrischen Punkt. Die inverse Bewegung findet man, indem man $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ersetzt durch $\delta, -\beta, -\gamma, \alpha$. Dies bedeutet, daß man φ, ψ, ϑ ersetzt durch $-\psi, -\varphi, -\vartheta$, und ersetzt man gleichzeitig p, q, r durch $-p_1, -q_1, -r_1$, so findet man anstatt (6)

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \dot{\vartheta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi, \\ q_1 &= \dot{\vartheta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi, \\ r_1 &= \dot{\psi} + \dot{\varphi}\sin\vartheta; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

p_1, q_1, r_1 sind dann die Komponenten der momentanen Rotation für die im Raume festen Achsen, und deutet man sie als die auf diese Achsen bezogenen Koordinaten des Rotationspols, so liefern die vorstehenden Gleichungen die gesuchte Darstellung der Herpolhodie.

3. Die Beschleunigungen. Für die Beschleunigung eines Punktes P des starren Körpers finden wir aus der Grundgleichung (1) sofort durch Differentiation nach der Zeit

$$\begin{aligned}\ddot{P} &= \dot{\Omega} \wedge (P - O) + \Omega \wedge \dot{P} \\ &= \dot{\Omega} \wedge (P - O) + \Omega \wedge [\Omega \wedge (P - O)].\end{aligned}$$

Fällt man aber aus P das Lot PM auf die momentane Rotationsachse, so daß $\Omega \times (M - P) = 0$ ist, dann wird auf Grund von (20) in Kap. I

$$\Omega \wedge [\Omega \wedge (P - O)] = \Omega \wedge [\Omega \wedge (P - M)] = \Omega^2 (M - P).$$

Es ist aber $\Omega^2 = \omega^2$, wenn $\omega = \operatorname{mod} \Omega$ die Winkelgeschwindigkeit der momentanen Rotation bedeutet; also wird

$$\ddot{P} = \dot{\Omega} \wedge (P - O) + \omega^2 (M - P). \tag{8}$$

Die Beschleunigung setzt sich also zusammen aus dem Vektor $\dot{\Omega} \wedge (P - O)$, der mit Hilfe des Vektors $\dot{\Omega}$ ebenso gebildet ist wie die Geschwindigkeit mit Hilfe des Vektors Ω, und aus dem Vektor $\omega^2 (M - P)$, d. h. dem mit dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit multiplizierten Lote aus dem Punkte P auf die momentane Achse.

Aus dem ersten Ausdrucke für $\ddot{P}$ folgt sofort, da $\dot{P} \times \Omega \wedge \dot{P} = 0$ wird, daß

$$\dot{P} \times \ddot{P} = \dot{P} \times \dot{\Omega} \wedge (P - O)$$

ist. Da der Vektor $\dot{P}$ zu dem Vektor $P - O$ senkrecht ist, findet man, wenn man $\operatorname{mod}(P - O) = r$ setzt und mit η die Projektion von $\dot{\Omega}$ auf die zu den Vektoren $\dot{P}$ und $P - O$ senkrechte Richtung bezeichnet, für den Wert der rechten Seite in der vorstehenden Gleichung

$$\omega \cdot \eta \cdot r,$$

denn dies ist das Volumen des durch die drei Vektoren bestimmten Parallelepipedon. Es wird aber $\dot{P} \times \ddot{P}$ durch ω geteilt die Komponente der Beschleunigung nach der Richtung von $\dot{P}$, also ergibt sich für diese Tangentialbeschleunigung der Wert ηr, sie ist also gleich dem Produkt des Radiusvektors OP mit der Projektion der Winkel-

beschleunigung $\dot{\Omega}$ auf die Normale des von dem Radiusvektor beschriebenen Kegels.

Von den Bahnkurven zweier verschiedenen Punkte desselben Radiusvektors geht die eine in die andere über durch eine Ähnlichkeitstransformation mit dem Zentrum O. Ihre Krümmungsmittelpunkte müssen deshalb wieder auf einer Geraden durch O liegen, und wir wollen zeigen, daß diese Gerade senkrecht zu den Normalen der Bahnkurven ist.

Wir gehen zu dem Zwecke aus von der Gleichung (8) in Kap. III

$$\ddot{P} = \dot{v}t + \frac{v^2}{\varrho}n.$$

Da hier die Bewegungsrichtung senkrecht ist zu dem Radiusvektor OP, ergibt sich

$$t \times (P - O) = 0,$$

es wird also

$$\ddot{P} \times (P - O) = \frac{v^2}{\varrho} n \times (P - O).$$

Aus der obenstehenden Gleichung (8) folgt aber

$$\ddot{P} \times (P - O) = \omega^2 (M - P) \times (P - O).$$

Der Wert der rechten Seite dieser Gleichung ist nun gleich $-\omega^2(M - P)^2$, d. h. gleich $-v^2$, und somit ergibt sich

$$\varrho = n \times (O - P), \tag{9}$$

d. h. der Krümmungsradius ist die orthogonale Projektion des Radiusvektors OP auf die Bahnnormale.

4. Poinsotsche Bewegung. Wenn bei der kontinuierlichen Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt die Komponenten der momentanen Rotation nach drei zueinander senkrechten und im Körper festen Achsen den Richtungskosinus einer im Raume festen Geraden gegen diese Achsen proportional sind, so heißt die Bewegung eine Poinsotsche Bewegung.[1])

Es seien a, b, c die Richtungskosinus der im Raume festen (invariablen) Achse, dann muß nach den Bedingungen

1) Poinsot, Théorie nouvelle de la rotation, Paris 1834, Journal de Math. pures et appliquées (1) t. 16 (1851), p. 79.

$$Ap = \varkappa a, \quad Bq = \varkappa b, \quad Cr = \varkappa c \tag{10}$$

werden, wenn A, B, C, $\varkappa$ Konstante bedeuten. Aus den Gleichungen (11) in Kap. V ergeben sich dann sofort die Differentialgleichungen der Bewegung

$$\left.\begin{aligned} A\dot{p} &= (B-C)qr, \\ B\dot{q} &= (C-A)rp, \\ C\dot{r} &= (A-B)pq. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit p, q, r und addieren sie, so ergibt sich

$$Ap\dot{p} + Bq\dot{q} + Cr\dot{r} = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich aber sofort integrieren und liefert

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h, \tag{12}$$

wenn h eine Integrationskonstante bedeutet. Andererseits folgt aber aus $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ und den Gleichungen (10) sofort

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \varkappa^2. \tag{13}$$

Die Gleichungen (12) und (13) legen die Polhodie der Bewegung fest und es zeigt sich, daß diese Polhodie die Schnittkurve zweier Flächen zweiter Ordnung ist. Für die Gleichung des Kegels Γ', der die Polhodie aus O projiziert, ergibt sich aus (12) und (13) sofort die Gleichung

$$A(Ah - \varkappa^2)p^2 + B(Bh - \varkappa^2)q^2 + C(Ch - \varkappa^2)r^2 = 0. \tag{14}$$

Wir setzen

$$A > B > C > 0$$

voraus. Es wird dann nach (12) und (13) auch

$$Ah - \varkappa^2 = B(A-B)q^2 + C(A-C)r^2,$$

also ist

$$Ah - \varkappa^2 > 0,$$

wenn nicht zu Anfang der Bewegung $q = 0$, $r = 0$ ist. Dann wird $Ah - \varkappa^2 = 0$, und mithin ist während des ganzen Verlaufes der Bewegung $q = 0$, $r = 0$, der Körper dreht sich fortdauernd um dieselbe (permanente) Rotationsachse.

Ebenso ergibt sich

$$Ch - \varkappa^2 = A(C-A)p^2 + B(C-B)q^2,$$

mithin

$$Ch - \varkappa^2 < 0,$$

mit Ausnahme des Falles, wo $p = 0$, $q = 0$ ist, der Körper also fortdauernd um die z-Achse rotiert.

Wir haben nun drei Fälle zu unterscheiden, jenachdem

$$Bh - \varkappa^2 > 0, \ = 0 \text{ oder } < 0.$$

Ist $Bh - \varkappa^2 > 0$, so ist der Schnitt des die Polhodie projizierenden Kegels (14) mit der Ebene $r = 0$ eine Ellipse, der Kegel schließt also die r-(oder z-) Achse ein und die Polhodie besteht aus zwei symmetrischen Ovalen, welche die z-Achse umschließen. Eines von diesen Ovalen wird von dem Rotationspol bei der Bewegung beschrieben.

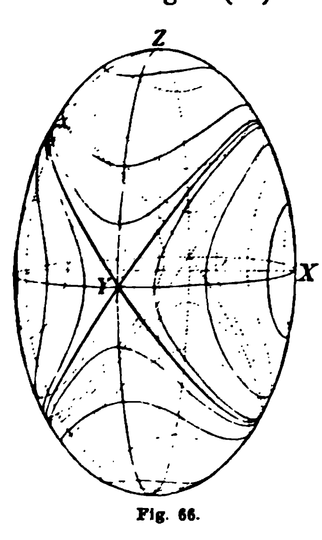


Fig. 66.

Ist dagegen $Bh - \varkappa^2 < 0$, so umschließt die Polhodie ebenso die x-Achse.

Ist endlich $Bh - \varkappa^2 = 0$, so zerfällt der Kegel in zwei reelle Ebenen, die sich in der y-Achse durchschneiden, und die Polhodie zerfällt in zwei Ellipsen, die gegen die xy- und yz-Ebene symmetrisch liegen.

Die beistehende Figur veranschaulicht diese verschiedenen möglichen Fälle.

Legt man durch den Rotationspol $\mathfrak{C}$ mit den Koordinaten p, q, r die Ebene senkrecht zur invariablen Achse, so ergibt sich aus den Gleichungen (10) in Verbindung (12) sofort

$$ap + bq + cr = \frac{h}{\varkappa}, \tag{15}$$

es wird also die Gleichung der Ebene

$$ax + by + cz = \frac{h}{\varkappa}.$$

Der Abstand δ dieser Ebene von O ist mithin konstant gleich $h : \varkappa$, demnach ist diese Ebene überhaupt fest im Raume, und

in dieser invariablen Ebene ist die Herpolhodie enthalten.

Setzt man aber in die gefundene Ebenengleichung die Werte für a, b, c aus (10) ein, so wird sie

$$Apx + Bqy + Crz = h.$$

Die Form dieser Gleichung zeigt, daß die Ebene nichts anderes ist wie die Tangentialebene der Fläche (12) im momentanen Rotationspol. Diese Fläche berührt also beständig die invariable Ebene und dreht sich in jedem Augenblicke um ihren Berührungspunkt mit dieser Ebene; das heißt aber, die Fläche rollt auf der invariablen Ebene, und so zeigt sich:

Die Poinsotsche Bewegung läßt sich herstellen, indem man eine Fläche zweiter Ordnung, deren Mittelpunkt festgehalten wird, auf einer festen Ebene rollen läßt.

Die linke Seite der Gleichung (15) läßt sich deuten als die Komponente der Rotation nach der invariablen Achse, und die Gleichung zeigt, daß diese Komponente konstant ist. Wir müssen also den vorigen Satz so ergänzen, daß wir sagen: Die Fläche zweiter Ordnung rollt auf der festen Ebene derart, daß ihre Rotationsgeschwindigkeit parallel zu dieser Ebene, d. h. um eine zu der Ebene senkrechte Achse, unverändert denselben Wert behält.

5. Allgemeine Bewegung eines starren Systems. Die allgemeine momentane Bewegung eines starren Systems ist einer momentanen Schraubenbewegung äquivalent. Die sukzessiven Achsen dieser Schraubenbewegung, wie sie aus den sukzessiven Lagen des Körpers hervorgehen, erfüllen eine Regelfläche Γ, und andererseits erfüllen die geraden Linien in dem Körper, die nach und nach die Achsen der momentanen Schraubenbewegung werden, eine Regelfläche Γ'. Im Falle der Drehung um einen festen Punkt O reduzieren sich diese Regelflächen auf zwei Kegel mit der Spitze O; in dem Falle, wo die Bewegung aller Punkte ständig einer Ebene parallel und für alle Punkte einer Normalen dieser Ebene dieselbe ist,

werden die Regelflächen zwei Zylinder, deren Achsen zu der Ebene senkrecht sind. Im allgemeinen Falle haben sie wie in diesen besonderen Fällen einen Regelstrahl gemein, um den die momentane Schraubenbewegung erfolgt. Längs dieses Regelstrahles berühren sich die beiden Flächen, denn durch die unendlich kleine Schraubung geht ein benachbarter Regelstrahl der einen Fläche in einen benachbarten Regelstrahl der anderen Fläche über. Die kontinuierliche Bewegung des starren Systems läßt sich also erzeugen, indem man eine mit dem System fest verbundene Regelfläche auf einer im Raume festen Regelfläche sich derart bewegen läßt, daß sie diese Regelfläche in jedem Augenblicke längs eines Regelstrahles berührt, um den sie sich dreht und an dem sie gleichzeitig entlang gleitet. Eine solche Bewegung einer Fläche auf einer anderen wird als eine Schrotung bezeichnet, und man kann einfach sagen: die allgemeinste Bewegung eines starren Systems läßt sich herstellen, indem man eine Regelfläche auf einer anderen schroten läßt.[1]) Diese beiden Flächen heißen die Achsenflächen der Bewegung.

Übungsbeispiele.

1. Aufgabe. *Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Punkte eines um einen festen Punkt sich drehenden starren Körpers analytisch darzustellen in einem rechtwinkligen Koordinatensystem, von dem der feste Punkt der Ursprung, die momentane Rotationsachse die z-Achse und die gemeinsame Berührungsebene der Kegel Γ und Γ' die zx-Ebene ist.*

Auflösung. In diesem Koordinatensystem wird für den betrachteten Augenblick

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = \omega, \quad \text{ferner} \quad \dot{q} = 0,$$

denn die Rotationsachse im nächstfolgenden Augenblick soll immer noch in der zx-Ebene liegen. Es wird weiter $\dot{r} = \dot{\omega}$, und wir wollen

1) Dieser Satz ist zuerst von Cauchy, Exercices de math. 2 (1827), Œuvres (2) 7, p. 94, bemerkt worden, deutlich ausgesprochen hat ihn Poncelet 1838 in seinen Vorlesungen an der Faculté des Sciences zu Paris.

noch $\dot{p} = \dot{\theta}$ setzen. Dann finden wir aus den Gleichungen (7) und (13) des V. Kapitels, da hier $u, v, w = 0$ und die Funktion $\varphi = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2)$ ist,

$$\dot{x} = -\omega y, \quad \dot{y} = \omega x, \quad \dot{z} = 0,$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - \dot{\omega} y, \quad \ddot{y} = \dot{\omega} x - \omega^2 y - \dot{\theta} z, \quad \ddot{z} = \dot{\theta} y.$$

2. Aufgabe. *Unter den Voraussetzungen der vorigen Aufgabe den Ort der Punkte zu finden, für welche die Tangentialbeschleunigung verschwindet.*

Auflösung. Aus den in der vorigen Aufgabe gefundenen Gleichungen läßt sich sofort ableiten, daß die Punkte, deren Tangentialbeschleunigung verschwindet, für die also

$$\dot{P} \times \ddot{P} = 0 \quad \text{oder} \quad \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = 0$$

wird, auf dem Kegel liegen, dessen Gleichung lautet

$$\dot{\omega}(x^2 + y^2) - \dot{\theta} x z = 0.$$

Die Gleichung ist erfüllt für $x = 0$, $y = 0$, die Rotationsachse liegt also auf dem Kegel; die Gleichung ist ferner erfüllt für $y = 0$, $x : z = \dot{\theta} : \dot{\omega}$; die Achse, für die $x : y : z = \dot{p} : \dot{q} : \dot{r}$, d. h. die Beschleunigungsachse liegt also ebenfalls auf dem Kegel. Eine beliebige Ebene, die durch diese Achse geht, hat eine Gleichung von der Form

$$\dot{\omega} x + \mu y - \dot{\theta} z = 0,$$

wobei μ willkürlich bleibt. Eine Ebene durch die Rotationsachse, d. h. durch die z-Achse hat eine Gleichung von der Form

$$\nu x - y = 0;$$

die beiden Ebenen sind zueinander rechtwinklig, wenn $\dot{\omega}\nu - \mu = 0$ ist. Setzen wir aber den sich so ergebenden Wert für μ in die erste Ebenengleichung ein und eliminieren ν aus den beiden Gleichungen, so ergibt sich die vorher gefundene Kegelgleichung. Der Kegel wird also erzeugt durch die Paare zueinander senkrechter Ebenen, die man durch die beiden Achsen, die Rotationsachse und die Beschleunigungsachse, legen kann.

3. Aufgabe. *Die Komponenten p, q, r der momentanen Rotation um einen festen Punkt O durch die Rodriguesschen Parameter und ihre Derivierten auszudrücken.*

Auflösung. Wir wollen als Rodriguessche Parameter statt der früher benutzten Cayleyschen Parameter $\varkappa$, λ, μ, ν die folgenden Werte einführen

$$L = l \operatorname{tang} \frac{\omega}{2}, \quad M = m \operatorname{tang} \frac{\omega}{2}, \quad N = n \operatorname{tang} \frac{\omega}{2},$$

dann werden die Formeln (30) des Kap. IV für die Zusammensetzung zweier Drehungen

$$L = \frac{L_1 + L_2 + M_1 N_2 - N_1 M_2}{1 - L_1 L_2 - M_1 M_2 - N_1 N_2},$$

$$M = \frac{M_1 + M_2 + N_1 L_2 - L_1 N_2}{1 - L_1 L_2 - M_1 M_2 - N_1 N_2},$$

$$N = \frac{N_1 + N_2 + L_1 M_2 - M_1 L_2}{1 - L_1 L_2 - M_1 M_2 - N_1 N_2}.$$

Hierin wollen wir jetzt setzen

$$-L, -M, -N \quad \text{für} \quad L_1, M_1, N_1,$$

$$L + \dot{L}dt, M + \dot{M}dt, N + \dot{N}dt \quad \text{für} \quad L_2, M_2, N_2,$$

dann wird zu setzen sein

$$pdt, qdt, rdt \quad \text{für} \quad L, M, N.$$

Führen wir dies aus und beachten, daß

$$\frac{1}{1 + L^2 + M^2 + N^2} = \cos^2 \frac{\omega}{2}$$

wird, so erhalten wir

$$p = 2 \cos^2 \frac{\omega}{2} (\dot{L} + N\dot{M} - M\dot{N}),$$

$$q = 2 \cos^2 \frac{\omega}{2} (\dot{M} + L\dot{N} - N\dot{L}),$$

$$r = 2 \cos^2 \frac{\omega}{2} (\dot{N} + M\dot{L} - L\dot{M}).$$

Diese Formeln stammen von Cayley, On the rotation of a solid body round a fixed point, Cambridge Dublin Math. Journal, vol. 1 (1846), pp. 167, 264, auch Mathem. Papers, vol. 1, p. 237.

4. Aufgabe. *Unter den gleichen Voraussetzungen die Punkte zu finden, deren Beschleunigung nach dem festen Punkte O hin gerichtet ist.*

Auflösung. Für die gesuchten Punkte muß

$$\ddot{x} = \lambda x, \quad \ddot{y} = \lambda y, \quad \ddot{z} = \lambda z$$

sein. Der Faktor λ ist hierbei zu bestimmen, indem man diese Werte von $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ in die Gleichungen der 1. Aufgabe einsetzt, die so

$$(\omega^2 + \lambda)x + \dot{\omega}y = 0, \quad -\dot{\omega}x + (\omega^2 + \lambda)y + \dot{\theta}z = 0, \quad \dot{\theta}y - \lambda z = 0$$

werden, und aus ihnen dann x, y, z eliminiert. So erhält man aber ohne Schwierigkeit

$$(\omega^2 + \lambda)(\lambda^2 + \omega^2\lambda + \dot{\theta}^2) + \dot{\omega}^2\lambda = 0$$

oder

$$\lambda^3 + 2\omega^2\lambda^2 + (\omega^4 + \dot{\omega}^2 + \dot{\theta}^2)\lambda + \omega^2\dot{\theta}^2 = 0$$

d. h. eine Gleichung dritten Grades für λ, die mindestens einen und höchstens drei Werte für λ liefert. Jedem Werte λ entsprechend erhält man aber aus zweien der drei Gleichungen, aus denen die Gleichung für λ abgeleitet wurde, bestimmte Werte für die Verhältnisse von x, y, z. Man findet also mindestens eine und höchstens drei Gerade durch O, deren Punkte die verlangte Eigenschaft haben.

5. Aufgabe. *Die Schar der Flächen zu bestimmen, welche von den Punkten mit gleich großer Beschleunigung erfüllt werden.*

Auflösung. Soll die Beschleunigung den konstanten Wert c haben, so ergibt sich aus den Gleichungen der ersten Aufgabe, da

$$\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2 = c^2$$

werden muß, sofort

$$(\omega^2 x + \dot{\omega} y)^2 + (\dot{\omega} x - \omega^2 y - \dot{\theta} z)^2 + \dot{\theta}^2 y^2 = c^2.$$

Die gesuchten Flächen bilden also eine Schar koaxialer und ähnlicher Ellipsoide.

6. Aufgabe. *Den folgenden Satz zu beweisen: Setzt man eine Poinsotsche Bewegung mit einer gleichförmigen Drehung um die invariable Achse zusammen, so ist die resultierende Bewegung wieder eine Poinsotsche Bewegung, deren Grundfläche zu der Grundfläche der ursprünglichen Bewegung konfokal ist.*

Auflösung. Ist ω_0 die konstante Winkelgeschwindigkeit der hinzukommenden Drehung, so werden ihre Komponenten

$$p_0 = \omega_0 a, \quad q_0 = \omega_0 b, \quad r_0 = \omega_0 c$$

und an Stelle der Gleichungen (10) erhält man für die Komponenten $p' = p + p_0$, $q' = q + q_0$, $r' = r + r_0$ der resultierenden Rotation

$$p' = \varkappa a\left(\frac{1}{A} + \frac{\omega_0}{\varkappa}\right), \quad q' = \varkappa b\left(\frac{1}{B} + \frac{\omega_0}{\varkappa}\right), \quad r' = \varkappa c\left(\frac{1}{C} + \frac{\omega_0}{\varkappa}\right).$$

Diese Gleichungen sind von derselben Form wie die Gleichungen (10), nur sind

$$\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C} \quad \text{durch} \quad \frac{1}{A} + \frac{\omega_0}{\varkappa}, \frac{1}{B} + \frac{\omega_0}{\varkappa}, \frac{1}{C} + \frac{\omega_0}{\varkappa}$$

ersetzt. Die Bewegung ist also ebenfalls eine Poinsotsche Bewegung. Die Gleichung der Grundfläche sei für diese

$$A'p'^2 + B'q'^2 + C'r'^2 = h'.$$

Dann haben wir

$$\frac{1}{A'} - \frac{1}{A} = \frac{1}{B'} - \frac{1}{B} = \frac{1}{C'} - \frac{1}{C} = \frac{\omega_0}{\varkappa}$$

zu setzen und finden aus den Gleichungen für p', q', r', daß $h' = h + \omega_0 \varkappa$ wird. Die vorstehenden Gleichungen zeigen aber in der Tat, daß die beiden Grundflächen konfokal sind. Vgl. Sylvester, Philosophical Transactions, vol. 156 (1866).

7. Aufgabe. *Zu beweisen, daß bei einer Poinsotschen Bewegung jede zur Grundfläche konzyklische Fläche auf einer Rotationsfläche rollt, deren Achse die invariable Linie ist.*

Auflösung. Eine zur Grundfläche konzyklische Fläche hat eine Gleichung von der Form

$$(A - \lambda)x^2 + (B - \lambda)y^2 + (C - \lambda)z^2 = h. \qquad (\alpha)$$

Ihr Schnittpunkt S mit der momentanen Rotationsachse hat die Koordinaten

$$x = \mu p, \quad y = \mu q, \quad z = \mu r,$$

wobei

$$\mu^2 = \frac{h}{h - \lambda\omega^2}$$

wird ($\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2$). Beziehen wir diesen Punkt S auf ein festes Koordinatensystem, dessen z-Achse in die invariable Linie fällt, und nennen x_1, y_1, z_1 seine Koordinaten, so wird, da dann $r_1 = \delta = h : \varkappa$ ist,

$$z_1 = \frac{h}{\varkappa}\mu, \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \mu^2\omega^2,$$

woraus durch Elimination von ω

$$\lambda(x_1^2 + y_1^2) + \left(\lambda - \frac{\varkappa^2}{h}\right)z_1^2 = -h \qquad (\beta)$$

folgt. Die Tangentialebene der Fläche (α) im Punkte S hat die Gleichung

$$(A - \lambda)px + (B - \lambda)qy + (C - \lambda)rz = \frac{h}{\mu}.$$

Um diese Gleichung auf die festen Achsen zu beziehen, beachte man, daß

$$Apx + Bqy + Crz = \varkappa(ax + by + cz) = \varkappa z_1,$$
$$px + qy + rz = p_1x_1 + q_1y_1 + r_1z_1$$

wird, also erhalten wir für die Ebenengleichung

$$\varkappa z_1 - \lambda(p_1x_1 + q_1y_1 + r_1z_1) = \frac{h}{\mu},$$

oder da r_1, die Komponente der Rotation nach der invariabeln Achse, $= h : \varkappa$,

$$\lambda(\mu p_1 x_1 + \mu q_1 y_1) + \left(\lambda - \frac{\varkappa^2}{h}\right)\mu r_1 z_1 = -h.$$

Dies aber ist die Gleichung der Tangentialebene von (β) in demselben Punkte S. Also berühren die beiden Flächen sich in dem Punkte S, um den sich die Grundfläche dreht, und diese rollt ohne zu gleiten auf der Rotationsfläche, w. z. b. w. Die Rotationsfläche wird ein Zylinder, wenn $\lambda = \varkappa^2/h$.

Vgl. Siacci, Collectanea mathematica in memoriam D. Chelini, Milano 1881; Gebbia, Memorie dell'Accademia dei Lincei, Roma, (4) vol. 1 (1885), p. 326.

8. **Aufgabe.** *Bei einer Poinsotschen Bewegung die Winkelgeschwindigkeit ω als Funktion der Zeit auszudrücken.*

Auflösung. Es folgt aus $\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2$

$$\omega\dot{\omega} = p\dot{p} + q\dot{q} + r\dot{r},$$

also nach (11)

$$\omega\dot{\omega} = \left(\frac{B-C}{A} + \frac{C-A}{B} + \frac{A-B}{C}\right)pqr$$
$$= -\frac{(B-C)(C-A)(A-B)}{ABC}pqr.$$

Berechnen wir aber aus den drei Gleichungen

$$p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2,$$
$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h,$$
$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \varkappa^2,$$

der Reihe nach p^2, q^2, r^2, so finden wir

$$p^2 = \frac{BC}{(A-B)(A-C)}(\omega^2 - \alpha^2),$$
$$q^2 = \frac{CA}{(B-A)(B-C)}(\omega^2 - \beta^2),$$
$$r^2 = \frac{AB}{(C-A)(C-B)}(\omega^2 - \gamma^2),$$

wenn wir setzen

$$\alpha^2 = \frac{h(B+C) - \varkappa^2}{BC},$$
$$\beta^2 = \frac{h(C+A) - \varkappa^2}{CA},$$
$$\gamma^2 = \frac{h(A+B) - \varkappa^2}{AB}.$$

Es hat, wie man leicht verifiziert, $\alpha^2-\gamma^2$ das Vorzeichen von $Bh-\varkappa^2$, denn es ergibt sich

$$\alpha^2-\gamma^2=\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)\frac{Bh-\varkappa^2}{B}.$$

Ferner zeigen die Formeln für p^2, q^2, r^2, daß $\omega^2-\alpha^2>0$, $\omega^2-\beta^2<0$, $\omega^2-\gamma^2>0$ wird.

Setzen wir die Werte für p, q, r ein, so ergibt sich die Formel für $\dot\omega$

$$\omega\dot\omega=\sqrt{(\alpha^2-\omega^2)(\beta^2-\omega^2)(\gamma^2-\omega^2)}.$$

Daraus findet man durch eine Quadratur ω als Funktion der Zeit, und hierauf p, q, r als einfache Funktionen von ω^2, und zwar werden sie elliptische Funktionen der Zeit, da ja

$$t=\int\frac{\frac{1}{2}d(\omega^2)}{\sqrt{(\alpha^2-\omega^2)(\beta^2-\omega^2)(\gamma^2-\omega^2)}}$$

wird. Man vgl. Euler, Theoria motus corporum rigidorum, p. 299; Lagrange, Mécanique analytique, Œuvres complètes, t. 12, p. 234; Jacobi, Ges. Werke, Bd. 2, S. 289, 468.

9. Aufgabe. *Bei der Poinsotschen Bewegung die Differentialgleichung der Herpolhodie zu finden.*

Auflösung. Wir setzen

$$h=D\delta^2,\quad \varkappa^2=D^2\delta^2;$$

aus den Ungleichungen $Ah-\varkappa^2>0$, $Ch-\varkappa^2<0$ folgt dann

$$A-D>0,\quad C-D<0.$$

Wir wollen noch das „Trägheitsellipsoid“

$$Ax^2+By^2+Cz^2=1$$

einführen, das zu dem Poinsotschen Ellipsoid konzentrisch und homothetisch ist. Wir betrachten den Punkt R, in dem der Radiusvektor $O\mathfrak{C}$ des Rotationspols $\mathfrak{C}$ das Trägheitsellipsoid schneidet. Dieser Punkt hat die Koordinaten

$$x=\frac{p}{\sqrt{h}}=\frac{p}{\delta\sqrt{D}},\quad y=\frac{q}{\delta\sqrt{D}},\quad z=\frac{r}{\delta\sqrt{D}}.$$

Schneiden wir im Punkte Q die invariable Linie durch die im Punkte R an das Trägheitsellipsoid gelegte Tangentialebene, so wird, da der entsprechende Abschnitt für die Tangentialebene des Poinsotschen Ellipsoides im Punkte $\mathfrak{C}$ $\delta=\frac{h}{\varkappa}$ ist,

$$OQ=\frac{\delta}{\sqrt{h}}=\frac{1}{\sqrt{D}}.$$

Auf dieser invariablen Linie stehen aber die beiden parallelen Tangentialebenen senkrecht, also wird $QR \perp OQ$, $OR^2 = OQ^2 + QR^2$ und wenn wir die Länge RQ mit ϱ bezeichnen, ergibt sich

$$OR^2 = \varrho^2 + \frac{1}{D};$$

andererseits wird

$$OR^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{p^2 + q^2 + r^2}{\delta^2 D} = \frac{\omega^2}{\delta^2 D},$$

somit erhalten wir

$$\omega^2 = \delta^2 (D\varrho^2 + 1).$$

Wir berechnen nun die in der vorigen Aufgabe benutzten Ausdrücke:

$$\begin{aligned}\omega^2 - \alpha^2 &= \delta^2 D \left(\varrho^2 + \frac{1}{D} - \frac{B + C - D}{BC}\right) \\ &= \delta^2 D \left(\varrho^2 + \frac{(B - D)(C - D)}{BCD}\right) \\ &= \delta^2 D (\varrho^2 - \mathfrak{a}),\end{aligned}$$

und analog

$$\omega^2 - \beta^2 = \delta^2 D (\varrho^2 - \mathfrak{b}), \quad \omega^2 - \gamma^2 = \delta^2 D (\varrho^2 - \mathfrak{c}),$$

wobei wir

$$\mathfrak{a} = -\frac{(B - D)(C - D)}{BCD}, \quad \mathfrak{b} = -\frac{(C - D)(A - D)}{CAD}, \quad \mathfrak{c} = -\frac{(A - D)(B - D)}{ABD}$$

setzen. Also werden die Formeln für p^2, q^2, r^2 der vorigen Aufgabe

$$\begin{aligned}p^2 &= \delta^2 D \frac{BC}{(A - B)(A - C)} (\varrho^2 - \mathfrak{a}), \\ q^2 &= \delta^2 D \frac{CA}{(B - C)(B - A)} (\varrho^2 - \mathfrak{b}), \\ r^2 &= \delta^2 D \frac{AB}{(C - A)(A - B)} (\varrho^2 - \mathfrak{c}).\end{aligned}$$

Dabei ist $\mathfrak{b} > 0$, $\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \frac{C - D}{C}\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right) < 0$, also $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, ferner folgt aus den Gleichungen für p^2 und r^2 unmittelbar, daß $\varrho^2 - \mathfrak{a} \geqq 0$ und $\varrho^2 - \mathfrak{b} \leqq 0$ ist. Da ϱ aber der Radiusvektor der Herpolhodiepunkte wird, zeigt sich, wenn $B > D$, also $\mathfrak{a} > 0$ ist, daß die Herpolhodie zwischen zwei Kreisen mit den Radien $\sqrt{\mathfrak{a}}$ und $\sqrt{\mathfrak{b}}$ verläuft.

Setzen wir nun in dem Resultat der vorigen Aufgabe die vorstehend angegebenen Werte von $\omega^2 - \alpha^2$, $\omega^2 - \beta^2$, $\omega^2 - \gamma^2$ ein und beachten, daß aus $\omega^2 = \delta^2 (D\varrho^2 + 1)$

$$\omega\dot{\omega} = \delta^2 D \varrho \dot{\varrho}$$

folgt, so erhalten wir unmittelbar die Differentialgleichung

$$\varrho\dot{\varrho} = \delta\sqrt{D}\cdot\sqrt{(\mathfrak{a}-\varrho^2)(\mathfrak{b}-\varrho^2)(\mathfrak{c}-\varrho^2)}.$$

Es wird also $\dot{\varrho} = 0$, sowie $\varrho^2 = \mathfrak{a}$ oder $\varrho^2 = \mathfrak{b}$ ist. Dies aber sind die äußersten Werte, zwischen denen, wie wir sahen, ϱ^2 schwankt. So zeigt sich, daß die bei dem Rollen des Trägheitsellipsoides auf der zur invariablen Ebene parallelen Ebene entstehende Herpolhodie die zwei konzentrischen Kreise mit dem Mittelpunkt Q und den Radien $\sqrt{\mathfrak{a}}$ und $\sqrt{\mathfrak{b}}$, zwischen denen sie verläuft, abwechselnd berührt.

Führen wir nun den Rotationsvektor $\Omega = P - O$ ein, so folgt aus $\Omega^2 = (P-O)^2$ sofort

$$\Omega \times \dot{\Omega} = (P-O)\times\dot{P} = h(R-O)\times\dot{R}.$$

Bezeichnen wir mit k einen auf der invariablen Ebene senkrechten Einheitsvektor, so wird weiter

$$\frac{1}{h}k\wedge\Omega\times\dot{\Omega} = k\wedge(R-O)\times\dot{R} = k\wedge(R-Q)\times\dot{R} = \varrho^2\frac{d\theta}{dt},$$

wenn wir mit θ den Winkel bezeichnen, den der Radiusvektor $R-Q$ mit einer festen Richtung in der Ebene bildet. Es sind nun Ap, Bq, Cr die Komponenten des Vektors $\varkappa k$, p, q, r die des Vektors Ω, also werden die Komponenten des Vektors $k\wedge\Omega$ der Reihe nach $\frac{1}{\varkappa}(B-C)qr$, $\frac{1}{\varkappa}(C-A)rp$, $\frac{1}{\varkappa}(A-B)pq$, und multiplizieren wir diesen Vektor skalar mit dem Vektor $\frac{1}{h}\dot{\Omega}$, so finden wir nach (11)

$$\frac{1}{h}k\wedge\Omega\times\dot{\Omega} = \frac{1}{\varkappa h}\left\{\frac{(B-C)^2}{A}q^2r^2 + \frac{(C-A)^2}{B}r^2p^2 + \frac{(A-B)^2}{C}p^2q^2\right\},$$

hierfür aber läßt sich schreiben

$$\frac{(Ah-\varkappa^2)A^2p^2 + (Bh-\varkappa^2)B^2q^2 + (Ch-\varkappa^2)C^2r^2}{ABC\varkappa h},$$

was man sofort bestätigen kann, wenn man für h und $\varkappa^2$ die Werte aus (12) und (13) einsetzt. Führt man nun ein

$$\varkappa h = \delta^3 D^2, \quad Ah - \varkappa^2 = \delta D^2(A-D) \quad \text{usw.}$$

und die oben angegebenen Werte für p^2, q^2, r^2, so wird der vorstehende Ausdruck

$$\delta\left\{\frac{A(A-D)}{(A-B)(A-C)}(\varrho^2-\mathfrak{a}) + \frac{B(B-D)}{(B-C)(B-A)}(\varrho^2-\mathfrak{b}) + \frac{C(C-D)}{(C-A)(C-B)}(\varrho^2-\mathfrak{c})\right\}$$

und demnach erhalten wir

$$\varrho^2 \frac{d\theta}{dt} = \delta(\varrho^2 + E),$$

wenn wir beachten, daß

$$\frac{A(A-D)}{(A-B)(A-C)} + \frac{B(B-D)}{(B-C)(B-A)} + \frac{C(C-D)}{(C-A)(C-B)} = 1$$

wird, und

$$-\frac{A(A-D)\mathfrak{a}}{(A-B)(A-C)} - \frac{B(B-D)\mathfrak{b}}{(B-C)(B-A)} - \frac{C(C-D)\mathfrak{c}}{(C-A)(C-B)}$$
$$= \frac{(A-D)(B-D)(C-D)}{ABCD} = E$$

setzen. Führen wir ein $dt = \frac{\varrho\, d\varrho}{\varrho\dot{\varrho}}$ und nehmen für $\varrho\dot{\varrho}$ den obenstehenden Wert, so finden wir endlich

$$d\theta = \frac{(\varrho^2 + E)\, d\varrho}{\varrho\sqrt{D} \cdot \sqrt{(\mathfrak{a} - \varrho^2)(\mathfrak{b} - \varrho^2)(\mathfrak{c} - \varrho^2)}}.$$

Dies ist die gesuchte Differentialgleichung der Herpolhodie. Die Kurve legt sich in kongruenten, symmetrischen Schlingen um den Kreis mit dem Radius $\sqrt{\mathfrak{a}}$ innerhalb des Kreises mit dem Radius $\sqrt{\mathfrak{b}}$ herum, wie es die nebenstehende Figur zeigt.

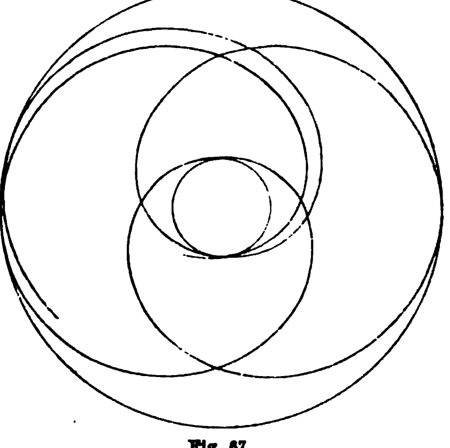


Fig. 67.

Die Gleichung

$$\frac{d\theta}{dt} = \delta\left(1 + \frac{E}{\varrho^2}\right)$$

lehrt, daß die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ nie verschwindet, nie ihr Zeichen wechselt und eine einfache Funktion von ϱ^2 ist.

Im Falle $Bh - \varkappa^2 = 0$ wird $B = D$, $\mathfrak{a} = 0$, $\mathfrak{c} = 0$, $E = 0$, also die obige Gleichung

$$d\theta = \frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{D}\sqrt{\mathfrak{b} - \varrho^2}}.$$

Durch Integration folgt hieraus

$$\varrho \operatorname{Cof} \sqrt{\frac{\mathfrak{b}}{D}}\,\theta = \sqrt{\mathfrak{b}}.$$

Dies ist die Gleichung einer Poinsotschen Spirale. Vgl. Loria, Spezielle ebene Kurven, 24. Kapitel.

10. Aufgabe. *Die Wendepunkte der Herpolhodie zu bestimmen.*

Auflösung. Wir setzen

$$S - O = \dot{\Omega} \wedge \Omega;$$

in den Wendepunkten ist die ganze Beschleunigung tangential, also besteht hier eine Gleichung von der Form

$$\ddot{\Omega} = \alpha \dot{\Omega}$$

und es wird

$$\dot{S} = \ddot{\Omega} \wedge \Omega = \alpha \dot{\Omega} \wedge \Omega = \alpha (S - O),$$

die Geschwindigkeit von S ist also, wenn sie nicht verschwindet, nach O hin gerichtet. Nun sind die Koordinaten von S im Körper

$$\xi = AD\delta^2(D-A)p, \quad \eta = BD\delta^2(D-B)q, \quad \zeta = CD\delta^2(D-C)r.$$

Die Komponente der Geschwindigkeit von S nach der p-Achse wird also

$$\frac{d\xi}{dt} + q\zeta - r\eta = AD\delta^2(D-A)\dot{p} + CD\delta^2(D-C)qr - BD\delta^2(D-B)qr$$
$$= -D\delta^2 \{A^2\dot{p} + (C^2 - B^2)qr\}$$

oder nach (11)

$$= D\delta^2(B-C)(B+C-A)qr,$$

und dies soll zu ξ proportional sein. Wir müssen also haben

$$\frac{A(A-D)p^2}{(B-C)(B+C-A)} = \frac{B(B-D)q^2}{(C-A)(C+A-B)} = \frac{C(C-D)r^2}{(A-B)(A+B-C)}.$$

Nehmen wir nun $A > B > C$ an, so wird auch, wie wir schon gesehen haben, $A > D > C$. Der Koeffizient von r^2 in der vorstehenden Doppelgleichuug wird also negativ, und soll die Doppelgleichung sich für reelle Werte von p, q, r erfüllen lassen, so müssen auch die Koeffizienten von p^2 und q^2 negativ sein, es muß also

$$B + C < A, \quad B < D$$

werden: wenn die Herpolhodie Wendepunkte besitzt, so müssen die vorstehenden beiden Ungleichheiten erfüllt sein. Vgl. W. Heß, Das Rollen einer Fläche zweiten Grades auf einer invariablen Ebene, Diss. München 1881; Mannoury, Nouvelle démonstration sur les points d'inflexion de l'herpolhodie, Bulletin des Sciences Math. (2) tome 19 (1895), p. 282; Lecornu, Sur l'herpolhodie, Bulletin de la Société mathém. de France, t. 34 (1900), p. 40.

11. Aufgabe. *Die Poinsotsche Bewegung zu untersuchen, wenn anfänglich die Rotationsachse sehr nahe bei einer Hauptachse liegt.*

Auflösung. Die Voraussetzung der Aufgabe bedeutet, daß anfänglich zwei der drei Rotationskomponenten sehr klein sind. Seien zunächst q, r sehr klein, so können wir in den Eulerschen Gleichungen (11) das Produkt qr vernachlässigen, und die erste liefert dann $p = p_0$, wenn p_0 der Anfangswert ist. Demnach folgt aus den andern beiden

$$\ddot{q} = -\frac{A-C}{B} p_0 \dot{r} = -\frac{(A-B)(A-C)}{BC} p_0^2 q = -n^2 q,$$

und durch Integration

$$q = q_0 \cos nt + \frac{1}{n} \dot{q}_0 \sin nt,$$

wenn q_0 den Anfangswert von q und $\dot{q}_0$ den Anfangswert seiner Änderungsgeschwindigkeit bezeichnet. Also wird

$$q \leqq \sqrt{q_0^2 + \frac{1}{n^2} \dot{q}_0^2}$$

und bleibt somit, da nach der Voraussetzung q_0 und $\dot{q}_0 = \frac{C-A}{B} p_0 r_0$ sehr klein sind, andauernd sehr klein. Das Gleiche gilt von r.

Ebenso läßt sich der Fall behandeln, wo p und q anfänglich sehr klein sind. Es ergibt sich hierbei ein analoges Resultat und so zeigt sich: Die Drehbewegung ist stabil um die große und die kleine Achse des Poinsotschen Ellipsoids oder des ihm ähnlichen Trägheitsellipsoids.

Bei der mittleren Achse ergibt sich aber unter analogen Voraussetzungen

$$\ddot{p} = \frac{(A-B)(B-C)}{AC} q_0^2 p = m^2 p,$$

und das Integral dieser Gleichung ist von der Form

$$p = \alpha e^{mt} + \beta e^{-mt}.$$

Hier würde p (und analog r) mit der Zeit beständig wachsen; die Drehbewegung ist also instabil (Poisson, Traité de Mécanique, vol. 2, p. 155).

12. Aufgabe. *Die zwei besonderen Fälle der Poinsotschen Bewegung zu behandeln: erstens wo $Bh - \varkappa^2 = 0$ wird, zweitens wo $A = B$ wird.*

Auflösung. Im Falle $Bh - \varkappa^2 = 0$ wird

$$A(Ah - \varkappa^2)p^2 + C(Ch - \varkappa^2)r^2 = 0,$$

woraus eine Gleichheit von der Form

$$r = \alpha p$$

resultiert, und (12) oder (13) liefert dann noch eine Gleichheit von der Form

$$q = \beta \sqrt{e^2 - p^2}.$$

Demnach nimmt die erste Gleichung (11) die Form an

$$\dot{p} = \gamma p \sqrt{e^2 - p^2}$$

oder

$$\gamma dt = -\frac{dp}{p\sqrt{e^2 - p^2}}.$$

Mit Hilfe der Substitution

$$p = \frac{e}{\mathfrak{Cos}\, v}$$

erhalten wir hieraus

$$v = \gamma e(\tau - t),$$

wenn τ eine Konstante bedeutet. Die Quadraturen sind also durch elementare Funktionen ausführbar.

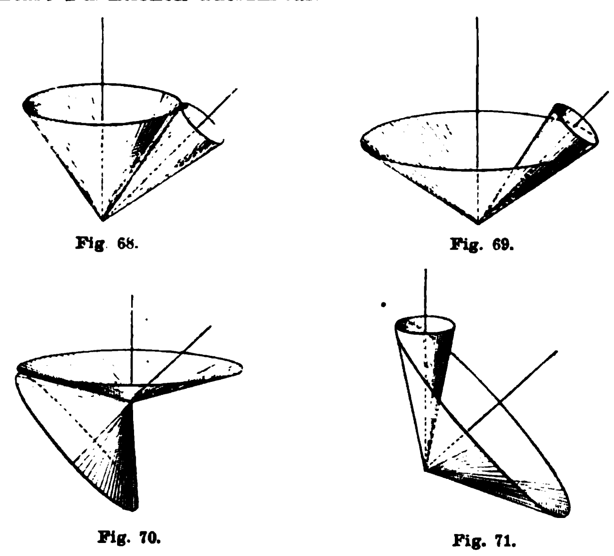


Fig. 68. Fig. 69.

Fig. 70. Fig. 71.

Im Falle $A = B$ wird das Poinsotsche Ellipsoid ein Rotationsellipsoid, der Kegel (14), der die Polhodie projiziert, wird ein Rotationskegel, und beim Rollen des Ellipsoides auf der invariablen Ebene rollt der Polhodiekegel auf einem anderen Rotationskegel, der die Herpolhodie projiziert. Diese Herpolhodie ist ein Kreis. Die verschiedenen möglichen Fälle sind aus den obenstehenden Figuren zu ersehen.

13. Aufgabe. *Welches sind die Formeln für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung eines Punktes P bei der allgemeinen Bewegung eines starren Systems, wenn die z-Achse in die Achse der momentanen Schraubung gelegt wird und die x-Achse in die Linie des kürzesten Abstandes zwischen der Achse dieser Schraubung und der Achse der momentanen Schraubung in einem unendlich benachbarten Augenblicke fällt?*

Auflösung. Es wird hier

$$p = 0,\ q = 0,\ r = \omega;\quad u = 0,\ v = 0,\ w = \tau.$$

Da ferner die Komponenten der Derivierten der Winkelgeschwindigkeit nach Ablauf der Zeit dt gleich $\dot p dt$, $\dot q dt$, $r + \dot r dt$ werden und die Schraubungsachse der yz-Ebene parallel bleiben soll, so muß auch $\dot p = 0$ sein; ferner ergibt sich $\dot u = 0$. Damit werden die Gleichungen (7) und (13) des V. Kapitels

$$\dot x = -\omega y,\quad \dot y = \omega x,\quad \dot z = \tau,$$

$$\ddot x = \dot q z - \dot r y - \omega^2 x,\quad \ddot y = \dot v + \dot r x - \omega^2 y,\quad \ddot z = \dot w - \dot q x,$$

wobei noch $\dot r = \dot\omega$ gesetzt werden kann.

14. Aufgabe. *Unter den Voraussetzungen der vorigen Aufgabe zu zeigen, daß ein Beschleunigungspol A existiert, für den die Beschleunigung verschwindet, und daß die Punkte, für welche die Beschleunigung denselben Wert annimmt, eine Schar homothetischer Ellipsoide erfüllen, deren gemeinsamer Mittelpunkt der Beschleunigungspol A ist, während die Punkte mit verschwindender Tangentialbeschleunigung eine durch den Beschleunigungspol A gehende Fläche zweiter Ordnung und die Punkte mit verschwindender Normalbeschleunigung eine ebenfalls durch A gehende Raumkurve dritter Ordnung erfüllen.*

Auflösung. Die Schar der ähnlichen Ellipsoide wird gegeben durch die Gleichung

$$\ddot x^2 + \ddot y^2 + \ddot z^2 = \varkappa^2$$

oder

$$(\dot q z - \dot r y - \omega^2 x)^2 + (\dot v + \dot r x - \omega^2 y)^2 + (\dot w - \dot q x)^2 = \varkappa^2.$$

Ihr gemeinsamer Mittelpunkt wird gefunden, indem man die drei Klammern auf der linken Seite der vorstehenden Gleichung gleich Null setzt. Daraus ergibt sich für die Koordinaten x_0, y_0, z_0 dieses Punktes

$$x_0 = \frac{\dot w}{\dot q},\quad y_0 = \frac{\dot q \dot v + \dot r \dot w}{\omega^2 \dot q},\quad z_0 = \frac{\dot r(\dot q \dot v + \dot r \dot w) + \omega^4 \dot w}{\omega^2 \dot q^2}.$$

Diese Werte sind eindeutig bestimmt, solange weder ω noch $\dot q$ verschwindet, die momentane Schraubung also nicht in eine Translation

ausartet und die Schraubenachse zu der unendlich benachbarten Schraubenachse nicht parallel ist.

Verschwindet die Tangentialbeschleunigung eines Punktes, ist also $\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = 0$, so ergibt sich

$$\omega \dot{r}(x^2 + y^2) - \omega \dot{q} y z + (\omega \dot{v} - \tau \dot{q}) x + \tau \dot{w} = 0.$$

Kreisschnitte dieser Fläche ergeben sich für alle Ebenen $z =$ konst., d. h. für alle zur momentanen Schraubenachse senkrechte Ebenen.

Verschwindet die Normalbeschleunigung, so wird

$$\ddot{x} : \ddot{y} : \ddot{z} = \dot{x} : \dot{y} : \dot{z}$$

oder

$$\frac{\omega^2 x + \dot{r} y - \dot{q} z}{y} = \frac{\dot{v} + \dot{r} x - \omega^2 y}{x} = \frac{\dot{w} - \dot{q} x}{k} \quad (k = \tau : \omega).$$

Diese Doppelgleichung stellt eine Raumkurve dritter Ordnung dar.

15. Aufgabe. *Zu zeigen, daß auf einer beliebigen Geraden ein Punkt liegt, für den die Beschleunigung senkrecht zu der Geraden gerichtet ist.*

Auflösung. Sind $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ die Koordinaten der Geraden, so fordert die gestellte Bedingung, daß

$$\alpha \ddot{x} + \beta \ddot{y} + \gamma \ddot{z} = 0$$

wird. Diese Gleichung geht aber über in

$$\omega^2 (\alpha x + \beta y) = \dot{w} \gamma + \dot{q} (\alpha z - \gamma x) + \dot{r} (\beta x - \alpha y)$$
$$= \dot{w} \gamma + \dot{q} \mu + \dot{r} \nu = \delta,$$

wobei δ eine Konstante ist. So ergibt sich die Gleichung einer zu der Achse der momentanen Schraubung parallelen Ebene, welche den gesuchten Punkt aus der Geraden ausschneidet.

ZWEITER TEIL

STATIK



Erstes Kapitel.

Zusammensetzung der Kräfte.

1. Gegenstand der Statik. Wie die Kinematik auf dem Begriff der Bewegung, so ist die Statik auf dem Begriff der Kraft aufgebaut. Der Begriff der Kraft entstammt wie der Begriff der Bewegung der Erfahrung des täglichen Lebens. Was aber den Begriff der Kraft von dem Begriffe der Bewegung unterscheidet, ist, daß er nicht unmittelbar Gegenstand der mathematischen Beschreibung werden kann, sondern daß hierzu eine weitergehende Abstraktion notwendig ist. Wir reden von der Kraft eines Menschen oder eines Tieres und beurteilen sie in der Regel nach einer mechanischen Arbeitsleistung, d. h. nach der Herstellung, Aufrechterhaltung oder Zerstörung einer Bewegung. Den Maßstab für diese Beurteilung liefert uns das Gefühl der Muskelanspannung bei dem Versuch, selbst eine ähnliche Arbeit auszuführen, und die Wahrnehmung gewisser Grenzen, über die hinaus uns die Ausführung der Arbeit selbst bei der stärksten Anspannung unmöglich ist. Die Vorstellungen, zu welchen das Gefühl einer eigenen Anstrengung Anlaß gibt, dehnen wir nicht nur auf alle lebenden Wesen, sondern auch auf leblose Dinge aus. Da wir das Gefühl eines Druckes haben, wenn wir eine Bleikugel in der Hand halten, reden wir auch von einem Drucke, wenn die Bleikugel auf einem Tisch liegt, und schreiben dem Tisch eine Kraft zu, vermöge deren er die Kugel am Fallen verhindert. In der gleichen Weise haben wir das Gefühl eines Zuges, wenn wir eine Last am hängenden Arm tragen, und reden auch von einem Zuge, wenn dieselbe Last an einem Seile hängt, genau so als ob das Seil unser oder eines anderen Menschen Arm wäre. Diese Eindeutung menschlicher Empfindungen in leblose Dinge hat, so unberechtigt und unwissenschaftlich sie

scheinen mag, nichtsdestoweniger den Anstoß zur Entwicklung der Mechanik gegeben und ist für die lebendige Erfassung technischer Aufgaben nicht ohne Wert.

Eine exakte Definition des so entstandenen Kraftbegriffes scheint aber unmöglich. Er ist nicht einmal einheitlich. Vielmehr zerfällt er von Anfang an in zwei verschiedene Arten. Auf der einen Seite bedeutet er nämlich ein Maß für die Arbeitsfähigkeit, die eine Person oder im übertragenen Sinne auch ein Komplex lebloser Dinge (wie z. B. eine Dampfmaschine) besitzt. Auf der anderen Seite aber bezieht er sich auf die nach einer bestimmten Richtung hin, zur Erzielung eines bestimmten Zweckes, aufgewendete Anstrengung. Mit der letzteren Kraftart allein haben wir es hier zu tun.

Die Statik beschäftigt sich indes mit diesen Kräften nicht im allgemeinsten Sinne, sie untersucht vielmehr die Kräfte nur insoweit ihre sichtbare Wirkung verschwindet, d. h. sie betrachtet diejenige Beziehung zwischen den Kräften, die man als ihr Gleichgewicht bezeichnet.[1]) Sie beruht als eine mathematische Wissenschaft darauf, daß die verschiedenen Sätze, die man über das Gleichgewicht der Kräfte auf Grund bestimmter Erfahrungen ausspricht, nicht alle logisch voneinander unabhängig sind, vielmehr sich alle als denknotwendige Folgen gewisser grundlegender Sätze erweisen, welche wir genau wie in der Geometrie als Axiome bezeichnen.

Die Statik ist also eine axiomatische Wissenschaft. Die Dinge, über die sie ihre Aussagen macht und die nicht definiert, sondern außer durch gewisse Merkmale nur durch bestimmte grundlegende Aussagen charakterisiert werden, sind die Kräfte, und die Beziehung, die sich in den einzelnen Aussagen ausdrückt, ist das Gleichgewicht der Kräfte. Eine vollendete Dar-

---

1) Unter den neueren Lehrbüchern vgl. man insbesondere außer dem ersten Bande von Appell, Traité de Mécanique rationnelle; E. J. Routh, A Treatise on analytical Statics, vol. I, Cambridge 1896; Minchin, A Treatise on Statics with Applications to Physics, vol. 1 (5. ed.), Oxford 1896, vol. 2 (4. ed.), 1889; Thomson und Tait, Treatise on natural Philosophy, part. 2, chap. 7 (3. ed.), 1895.

stellung der Statik in diesem Sinne hat von den zugrunde gelegten Aussagen, den Axiomen, erstens zu beweisen, daß sie voneinander logisch unabhängig sind, und zweitens, daß sie hinreichen, um aus ihnen alle anderen Sätze durch rein logische Deduktion zu gewinnen. Das letztere geschieht durch die Ausführung der Statik selbst.

Wenn wir hier die volle Strenge, namentlich im ersten Punkte, nicht erreichen, so muß dies durch die geforderte Kürze der Darstellung entschuldigt werden. Viele Autoren suchen überhaupt eine solche axiomatische Darstellung zu vermeiden, indem sie die Betrachtung des Zusammenhanges zwischen Kraft und Bewegung voranstellen und die Kraft direkt aus der Bewegung definieren.[1]) Wenn sich aber die Darstellung der historischen Entwicklung anschmiegen und möglichst vom Einfachen zum Verwickelten aufsteigen soll, so empfiehlt sich der hier gewählte Weg. Denkt man auch an die Bedürfnisse der Technik, so ist der Begriff der Kraft als ein ursprünglicher, grundlegender Begriff nicht zu entbehren, und die Disziplin, die allein den Kraftbegriff verwendet, ist derjenigen voranzustellen, in der er mit dem Begriffe der Bewegung vereinigt wird.[1])

2. Die Kraft und ihre Darstellung. Der Aufstellung der Axiome muß die Hervorhebung gewisser Merkmale an dem Begriff der Kraft vorangehen, die überhaupt erst die mathematische Formulierung der Axiome möglich machen. Wir können uns diese Merkmale am besten klar machen, wenn wir an dem Körper, um den es sich handelt, einen Haken anbringen und an diesem Haken eine Schnur befestigen, an der wir ziehen. Dies ist in der Tat die gewöhnliche Veranschaulichung, die in den ersten Lehrbüchern der Statik auftritt. Es ist dann klar, daß drei Momente in Betracht kommen: erstens wo wir den Haken einschlagen, zweitens wohin wir vom Haken aus die Schnur laufen lassen und drittens wie stark wir an der Schnur ziehen. Dementsprechend unter-

1) So Poncelet (Introduction à la Mécanique industrielle, 1829), darauf Coriolis (Traité de la Méc. des corps solides, 1829), Belanger (Cours de Mécanique, 1847) und viele der Neueren.

scheiden wir an der Kraft die folgenden drei Merkmale: erstens ihren Angriffspunkt, zweitens ihre Richtung und drittens ihre Größe, Stärke oder Intensität.

Um in dem gewählten Beispiele die Größe der Kraft wirklich als bestimmbar erscheinen zu lassen, dachte man sich die ziehende Hand ersetzt durch ein Gewicht, das an die über eine Rolle geführte Schnur angehängt wird. Die mit der Wage zu bestimmende Größe dieses Gewichtes gibt dann ein Maß ab für die ausgeübte Kraft. Daher auch die Bezeichnung Gleichgewicht (aequiponderantia).

Diese Verbildlichung legt es nahe, den Begriff der Summe zweier gleich gerichteter Kräfte mit demselben Angriffspunkte einzuführen, indem man einfach die zugehörigen Gewichte, d. h. die Größen der beiden Kräfte addiert. Sind die Kräfte nicht gleich, sondern entgegengesetzt gerichtet, so hat man ihre Größen zu subtrahieren statt zu addieren. Man erhält dann eine neue Kraft, welche die aus den beiden vorgelegten Kräften resultierende bildet. Sind die beiden Kräfte einander entgegengesetzt gleich, so verschwindet die resultierende Kraft. Dann sagt man, die beiden Kräfte seien im Gleichgewicht. Zusammenfassend formulieren wir das

Axiom 1. Gleich oder entgegengesetzt gerichtete Kräfte mit demselben Angriffspunkt lassen sich zusammensetzen nach denselben Regeln, nach denen algebraische Größen mit gleichem oder entgegengesetztem Vorzeichen addiert werden. Die sich hierbei ergebende Summe repräsentiert die resultierende Kraft der Größe und dem Sinne nach. Verschwindet die Summe, so sind die Kräfte im Gleichgewicht.

Es liegt nahe, die Kräfte allgemein durch Vektoren darzustellen, die ja auch einen Angriffspunkt, eine Richtung und eine Größe zu ihrer vollständigen Bestimmung erfordern. Der Modul des Vektors entspricht der Größe der Kraft, wenn wir ein bestimmtes Verhältnis zwischen der Längeneinheit und der Maßeinheit der Kraft zugrunde legen, Richtung und Angriffspunkt des Vektors lassen sich unmittelbar mit denen der Kraft

identisch annehmen. Das Axiom 1 sagt dann nichts anderes aus, als daß gleich oder entgegengesetzt gerichtete Kräfte mit demselben Angriffspunkt sich ebenso addieren lassen wie die sie darstellenden Vektoren.

3. Statik des starren Körpers. Außer dem bereits angeführten Axiom haben wir noch die folgenden Axiome zugrunde zu legen, die als einfache Abstraktionen aus der Erfahrung anzusehen sind:

Axiom 2. Das Gleichgewicht an einem irgendwie beschaffenen materiellen System wird nicht gestört, wenn außer den zwischen den Teilen des Systems bestehenden Verbindungen noch neue hinzugefügt werden, insbesondere wenn alle Teile des Systems starr miteinander verbunden werden (Prinzip des Festmachens, Poinsot, Journ. de l'école polytechnique, cah. 13, 1806, p. 206).

Daraus ist zu folgern, daß die Bedingungen für das Gleichgewicht eines starren Systems auch notwendige, aber nicht hinreichende Bedingungen für das Gleichgewicht eines nicht starren Systems sind.

Axiom 3. Das Gleichgewicht eines Kräftesystems wird nicht gestört, wenn man ihm ein System von Kräften hinzufügt, das für sich betrachtet im Gleichgewicht ist (Prinzip der Superposition).

Axiom 4. Kräfte, die gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind und an demselben Punkte angreifen, können immer durch ihre Resultante ersetzt oder, wenn sie im Gleichgewichte sind, weggelassen werden.

Wir führen noch die folgende Definition ein: Als das entgegengesetzte System $-S$ eines Systems S bezeichnen wir das System, das aus S entsteht, wenn wir von allen Kräften dieses Systems die Richtung umkehren, sie aber sonst ungeändert lassen. Dann ergibt sich das folgende

Theorem I. Von einem Kräftesystem S, das im Gleichgewichte ist, läßt sich ein Teilsystem S_1 fort-

nehmen, wenn auch das diesem entgegengesetzte System $-S_1$ für sich betrachtet im Gleichgewicht ist.[1])

Wenn nämlich das System $-S_1$ im Gleichgewicht ist, so kann man es dem System S, das ebenfalls im Gleichgewicht ist, nach Axiom 3 hinzufügen. Jede Kraft des Systems $-S_1$ hebt sich dann aber nach Axiom 4 gegen die entgegengesetzt gleiche Kraft des Systems S_1 auf, d. h. man kann das System S_1 unmittelbar fortlassen, w. z. b. w.

Greifen z. B. an den Endpunkten eines Fadens zwei einander entgegengesetzt gleiche und voneinander weg gerichtete Kräfte an, während gleichzeitig auf diese Endpunkte zwei kleinere, einander entgegengesetzt gleiche und aufeinander zu gerichtete Kräfte wirken, so ist der Faden gespannt und im Gleichgewichte. Man kann nun, ohne das Gleichgewicht zu stören, die aufeinander zu gerichteten Kräfte weglassen, die für sich genommen nicht an dem Faden im Gleichgewicht sind, es aber werden, wenn man ihre Richtungen umkehrt; die voneinander weg gerichteten Kräfte dagegen kann man nicht weglassen, ohne das Gleichgewicht zu stören.

Ist das materielle System aber ein starres, so können wir die folgenden weiteren Axiome aufstellen:

Axiom 5. An einem starren Körper ist mit einem Kräftesystem auch immer das entgegengesetzte Kräftesystem im Gleichgewicht.

Axiom 6. Zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte, die an zwei starr miteinander verbundenen Punkten angreifen und in die Verbindungslinie dieser Punkte fallen, sind stets im Gleichgewicht.

Aus diesen beiden Axiomen folgen die beiden Theoreme:

Theorem II. Von einem Kräftesystem, das an einem starren Körper im Gleichgewicht ist, kann man ein Teilsystem fortlassen, wenn dieses für sich betrachtet im Gleichgewicht ist.

1) Moebius, Lehrbuch der Statik, 1837, Ges. Werke Bd. 3, S. 5.

Es ist dieser Satz eine unmittelbare Folge des Theorems I in Verbindung mit dem Axiom 5.

Theorem III. Der Angriffspunkt einer Kraft läßt sich in der Richtung der Kraft beliebig verschieben, wenn der neue Angriffspunkt mit dem alten starr verbunden ist.

Um diesen Satz zu beweisen, führt man an dem neuen Angriffspunkt zunächst zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte ein, von denen die eine der Größe und Richtung nach gleich der gegebenen Kraft ist, was nach Axiom 4 erlaubt ist. Die gegebene Kraft hebt sich dann gegen die zweite der neu eingeführten Kräfte nach Axiom 6 weg und es bleibt nur die mit der gegebenen Kraft gleichgerichtete Kraft übrig, w. z. b. w.

Wir führen jetzt noch die weitere Definition ein: Zwei an einem starren Körper angreifende Kräftesysteme S_1 und S_2 heißen äquivalent, wenn ein drittes System S existiert, das sowohl mit S_1 wie auch mit S_2 zusammen genommen im Gleichgewichte ist. Dann ist auch jedes andere System S', das mit S_1 zusammen im Gleichgewichte ist, mit S_2 zusammen ebenfalls im Gleichgewicht. Denn es ist nach Axiom 3 das System, das aus S_1, S', S_2, S zusammen genommen besteht, im Gleichgewichte, aber das System, das aus S_1 und S besteht ist für sich im Gleichgewicht, also ist nach Theorem II auch das aus S_2 und S' zusammengesetzte System im Gleichgewicht.

Beachten wir nun, daß auf jeden Fall das entgegengesetzte System $-S_1$ mit S_1 im Gleichgewicht ist, so ergibt sich die speziellere Definition: Zwei Systeme sind äquivalent, wenn das eine mit dem entgegengesetzten Systeme des anderen zusammen genommen im Gleichgewicht ist.

Wir fügen noch hinzu das

Axiom 7. Wenn ein Punkt eines starren Körpers fest ist, so ist dieser Körper unter der Einwirkung einer Kraft im Gleichgewichte oder nicht, jenachdem die Linie, in der diese Kraft wirkt, den festen Punkt enthält oder nicht.

Daraus folgt sofort, daß wenn in dem Körper eine Achse fest ist, er unter der Einwirkung einer Kraft im Gleichgewichte ist oder nicht, je nachdem die Wirkungslinie der Kraft die feste Achse trifft oder nicht.

Weiter können wir als eine Folgerung dieses neuen Axioms und des Theorems II aussprechen das

Theorem IV. Die Kräfte, deren Wirkungslinien einen festen Punkt oder eine feste Achse treffen, können weggelassen werden, ohne daß dadurch das Gleichgewicht des starren Körpers gestört wird.

Wir wollen beachten, daß der Begriff des Gleichgewichtes eines starren Körpers nicht definiert, sondern seine Bedeutung nur durch die Axiome festgelegt wird. Diese Axiome enthalten gleichzeitig alles das, was betreffs der Kräfte abgesehen von ihren drei Merkmalen des Angriffspunktes, der Größe und der Richtung angenommen wird.

4. Das Parallelogramm der Kräfte. Von entscheidender Bedeutung ist ein weiteres Axiom, das wir als das Axiom der Resultante bezeichnen können und das folgendermaßen lautet:

Axiom 8. Mehrere Kräfte, die an demselben Punkte angreifen, sind entweder im Gleichgewichte oder sie können ins Gleichgewicht gebracht werden durch Hinzufügung einer einzigen Kraft. Es folgt dann sofort das

Theorem V. Die Kraft, die mehreren an einem Punkte angreifenden Kräften das Gleichgewicht hält, greift wieder an demselben Punkte an.

Denn würde die hinzugefügte Kraft nicht in demselben Punkte angreifen, so müßte sie nach Axiom 1 für sich im Gleichgewichte sein, wenn man den Angriffspunkt der übrigen Kräfte fest machte und diese Kräfte nach Theorem IV wegließe; dies widerspricht aber dem Axiom 7, wonach das Gleichgewicht nur eintritt, wenn die Wirkungslinie der Kraft durch den festen Punkt hindurchgeht.

Kehren wir die Richtung der hinzugefügten Kraft um, so heißt sie die Resultante der vorgelegten Kräfte und ist nach der gegebenen Definition dem System dieser Kräfte äquivalent.

Die Bestimmung der Resultante kann auf die Bestimmung der Resultante für nur zwei Kräfte zurückgeführt werden, wenn wir das folgende Axiom annehmen:

Axiom 9. Die Resultante eines Systems von Kräften mit demselben Angriffspunkte ändert sich nicht, wenn wir beliebige zwei oder mehr Kräfte des Systems durch ihre Resultante ersetzen.

Was nun die Resultante zweier Kräfte angeht, so beweist man zunächst sehr leicht die folgenden Sätze:

Satz 1. Zwei Kräfte P, Q mit demselben Angriffspunkte, die nicht entgegengesetzt gleich sind, haben immer eine von Null verschiedene Resultante R; mit anderen Worten, zwei Kräfte mit demselben Angriffspunkt sind nur dann im Gleichgewicht, wenn sie entgegengesetzt gleich sind.

Um den Satz zu beweisen, setzen wir die Resultante R der zwei Kräfte P, Q mit der Kraft $-P$ zusammen, dann ergibt sich, da R die Kräfte P, Q ersetzt und P und $-P$ sich aufheben, die Kraft Q. Tritt nun der besondere Fall ein, daß die Resultante R verschwindet, so ergibt sich so die Kraft $-P$ selbst. Also wird dann $Q = -P$, w. z. b. w.

Satz 2. Die Resultante zweier nicht gleich oder entgegengesetzt gerichteter Kräfte mit demselben Angriffspunkt liegt in der Ebene dieser beiden Kräfte.

Zum Beweis brauchen wir nur eine Achse anzunehmen, welche die Wirkungslinie der beiden Kräfte schneidet, und diese Achse fest zu machen. Dann können wir die beiden Kräfte nach Theorem IV weglassen, und die der Resultante entgegengesetzte Kraft muß für sich im Gleichgewichte sein, daher muß nach Axiom 7 ihre Wirkungslinie die feste Achse schneiden, d. h. mit den Wirkungslinien der beiden gegebenen Kräfte in einer Ebene liegen, w. z. b. w.

Wir stellen jetzt durch zwei von einem Punkte O ausgehende Strecken, die nicht in eine gerade Linie fallen, zwei Kräfte P_1, P_2 dar und nehmen von O ausgehend senkrecht zu der Ebene der beiden ersten Strecken eine dritte Strecke P_3 an, die wir ebenfalls als eine Kraft deuten. Wir bestimmen dann die Resultanten je zweier der drei Kräfte, P_{12}, P_{23}, P_{31}, und die Resultante Q aller drei Kräfte, die sich auch als Resultante von P_{12} und P_3 oder P_{23} und P_1 oder P_{31} und P_2 ergibt. Daraus folgt auf Grund des Satzes 2, daß die Verbindungsebenen dieser drei Streckenpaare sich in der Geraden von Q schneiden müssen.

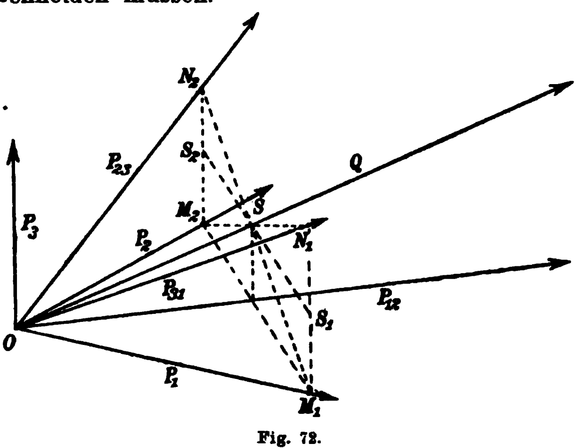


Fig. 72.

Wir tragen nun auf den Geraden von P_1 und P_2 zwei gleiche Strecken OM_1, OM_2 ab und errichten in M_1 und M_2 auf der Verbindungsebene von P_1 und P_2 die Lote, welche die Geraden von P_{31} und P_{23} in N_1 und N_2 treffen mögen. Die Geraden M_1N_2 und M_2N_1 liegen dann in den Ebenen (P_1P_{23}) und (P_2P_{31}), schneiden sich also in einem Punkte S der Geraden von Q. Fällt man aus diesem Punkte S die Lote SS_1 und SS_2 auf die Geraden M_1N_1 und M_2N_2, so folgt aus zwei ähnlichen Dreiecken

$$SS_1 : SS_2 = M_1N_1 : M_2N_2.$$

Anderseits sind aber die Strecken SS_1 und SS_2 gleich den

Abschnitten, in welche die Strecke $M_1 M_2$ durch die Gerade von P_{12} geteilt sind, und sonach wird

$$SS_1 : SS_2 = \sin(P_1 P_{12}) : \sin(P_2 P_{12});$$

ferner ergibt sich, da $OM_1 = OM_2$ war,

$$M_1 N_1 : M_2 N_2 = \operatorname{tang}(P_1 P_{31}) : \operatorname{tang}(P_2 P_{23}).$$

Also erhalten wir

$$\sin(P_1 P_{12}) : \sin(P_2 P_{12}) = \operatorname{tang}(P_1 P_{31}) : \operatorname{tang}(P_2 P_{23}).$$

Wir benutzen jetzt als weiteres Axiom das folgende

Axiom 10. Wird die Figur, die zwei Kräfte und ihre Resultante darstellt, irgendwie im Raum verschoben, so stellt sie nach wie vor zwei Kräfte und ihre Resultante dar.

Daraus folgt sofort, wenn wir die beiden Kräfte senkrecht aufeinander und die Größe der einen gleich der Einheit annehmen, daß der Winkel, den die Resultante mit der anderen Kraft bildet, eine bestimmte Funktion φ allein von der Größe dieser Kraft ist. Dem entsprechend nehmen wir hier die Größe von P_3 gleich der Einheit an und können dann setzen

$$\frac{1}{\operatorname{tang}(P_1 P_{31})} = \varphi(P_1), \qquad \frac{1}{\operatorname{tang}(P_2 P_{23})} = \varphi(P_2).$$

So finden wir endlich

$$\sin(P_1 P_{12}) : \sin(P_2 P_{12}) = \varphi(P_2) : \varphi(P_1).$$

Das heißt aber: Tragen wir auf den Wirkungslinien der Kräfte P_1, P_2 von O aus die Strecken $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$ ab, so bestimmen sie als zwei Seiten ein Parallelogramm, in dessen von O ausgehende Diagonale die Resultante P_{12} fällt.

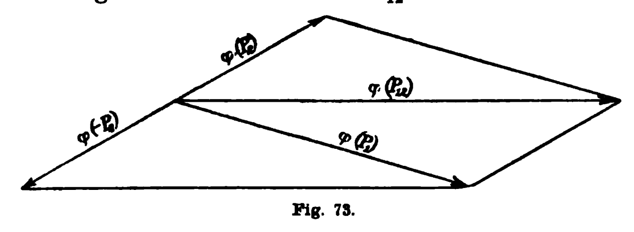


Fig. 73.

Es ist nun leicht zu beweisen, daß die Länge der Diagonale gleich $\varphi(P_{12})$ sein muß. Denn nehmen wir diese Re-

sultante zusammen mit $-P_2$, so muß sich die Kraft P_1 ergeben. Die Strecke $\varphi(P_1)$ in der Wirkungslinie von P_1 finden wir aber als die Diagonale eines Parallelogramms, von dem die Diagonale des ersten Parallelogramms eine Seite und die in der Richtung von $-P_2$ abgetragene Strecke $\varphi(P_2)$ eine zweite Seite ist. Also muß nach dem Satze, den wir gefunden haben, $\varphi(P_{12})$ die Länge der ersten Diagonale sein, w. z. b. w.

Wir denken uns jetzt die Kraft P_1 als die Resultierende zweier gleichgerichteter Kräfte P und P'; es wird dann nach Axiom 1

$$P_1 = P + P'.$$

Wir können nun die Vereinigung von P_1 mit P_2 so ausführen, daß wir zuerst P mit P_2 vereinigen, indem wir in den Richtungen dieser Kräfte von O aus $\varphi(P)$ und $\varphi(P_2)$ abtragen und die Diagonale des so bestimmten Parallelogramms konstruieren. Dann nehmen wir zu dieser Diagonale $\varphi(P_{02})$ die Strecke $\varphi(P')$ wieder in der Richtung von P_1 hinzu und finden als die Diagonale dieses neuen Parallelogramms die Strecke $\varphi(P_{12})$ in der Richtung der Resultierenden P_{12} von P_1 und P_2. Die Diagonale des zweiten Parallelogramms hätten wir aber direkt gefunden, wenn wir $\varphi(P)$ und $\varphi(P')$ aneinander gelegt und mit dem in der Richtung von P_2 abgetragenen $\varphi(P_2)$ zusammengenommen hätten. Vergleichen wir dies mit der ursprünglichen Konstruktion von $\varphi(P_{12})$, so zeigt sich, daß $\varphi(P_1) = \varphi(P) + \varphi(P')$ sein muß, mithin die allgemeine Funktionalgleichung gilt

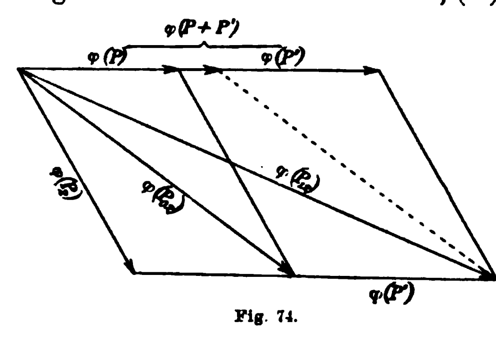


Fig. 74.

$$\varphi(P + P') = \varphi(P) + \varphi(P').$$

Aus dieser folgt sofort die weitere Gleichung

$$\varphi(P + P' + P'' + \cdots) = \varphi(P) + \varphi(P') + \varphi(P'') + \cdots$$

und indem wir $P = P' = P'' = \cdots$ machen,

$$\varphi(mP) = m\varphi(P), \quad \varphi(nP) = n\varphi(P),$$

wenn m, n ganze Zahlen bedeuten; für $P = \frac{1}{n}$ wird also

$$\varphi\left(\frac{m}{n}\right) = m\varphi\left(\frac{1}{n}\right), \quad \varphi(1) = n\varphi\left(\frac{1}{n}\right),$$

woraus weiter

$$\varphi\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}\varphi(1)$$

folgt. Es ist also für jeden rationalen positiven Wert von x

$$\varphi(x) = ax,$$

indem a eine Konstante bezeichnet. Machen wir aber die weitere Annahme, daß $\varphi(x)$ eine stetige Funktion von x sei, so gilt dieselbe Gleichung allgemein (Cauchy, Cours d'Analyse, 1821, Œuvres complètes (2) III, p. 99). Wir können statt dieser Annahme auch das weitere Axiom zugrunde legen:

Axiom 11. Die Resultante zweier Kräfte fällt immer in den von den Richtungen dieser Kräfte eingeschlossenen Winkel.

Dann ist $\varphi(P)$ stets positiv, und vermehrt man P um P', so folgt $\varphi(P + P') = \varphi(P) + \varphi(P') > \varphi(P)$, also wächst die Funktion beständig mit ihrem Argument, es wird also mit

$$\frac{m}{n} < x < \frac{m+1}{n}$$

auch

$$\varphi\left(\frac{m}{n}\right) < \varphi(x) < \varphi\left(\frac{m+1}{n}\right),$$

folglich

$$a\frac{m}{n} < \varphi(x) < a\frac{m+1}{n},$$

und daher

$$\varphi(x) = ax$$

für jeden positiven Wert von x.

Wir können nun $a = 1$ annehmen, denn hierin liegt nur eine Festsetzung über die Wahl der zugrunde gelegten Einheit. Mithin setzt man die an einem Punkte angreifenden Kräfte zusammen, indem man direkt die Vektoren zusammensetzt, die sie darstellen. Mit anderen Worten:

Die Kräfte sind gebundene Vektoren, welche die Regeln für die Zusammensetzung und Zerlegung dieser Vektoren befolgen.

Das Gesetz des Parallelogramms der Kräfte scheint sich nach den Untersuchungen von Caverni (Storia del metodo sperimentale in Italia, 1895, t. 4, cap. I, § III, IV) und Duhem (Les origines de la Statique, 1905) im Mittelalter ausgebildet zu haben, es steht in klarer Formulierung bei Stevin (De Beghinselen der Weegkonst, 1586, Œuvres mathématiques, vol. 4: De la Statique, Leyden 1636). Aus den Bewegungsgesetzen folgerte es Newton (Philosophiae naturalis principia mathematica, 1687: Axiomata sive leges motus, Cor. 1), als Grundprinzip der Statik formulierte es gleichzeitig mit ähnlicher Begründung Varignon (Project d'une nouvelle mécanique, 1687, vgl. auch die nachgelassene Nouvelle mécanique ou Statique, 2 Bände, 1725). D. Bernoulli hat zuerst in dem Examen principiorum mechanicae (Commentarii Acad. Imp. Petropolitanae, t. 1, p. 126, 1726) einen statischen Beweis gegeben, indem er zeigte, wie das ganze Problem sich auf die Zusammensetzung zweier gleicher Kräfte zurückführen läßt. Seither sind sehr zahlreiche Beweise versucht worden. Der erste, der bei dem Beweis eine Funktionalgleichung benutzte, war Foncenex (Mélanges de philosophie et de mathém. t. II, Turin 1760—61, p. 299), hierauf folgen die Beweise von d'Alembert (Mémoires de l'Académie de Paris 1767, p. 285, Opuscules de mathém. t. 6, p. 360, 1773) und Lambert (Beyträge zum Gebrauch der Math. Bd. 2, S. 468, Berlin 1770) und weiter die von Laplace, Monge, Poinsot, Poisson, Cauchy, Moebius u. a. m. Die Darstellung des Textes schließt sich an die Arbeit von Darboux an (Bulletin des sciences math. t. 9, p. 281, 1875). Einen analogen Beweis gab Tschebyscheff (Société math. de Moscou, décembre 1875). Über die beim Beweise benutzte Funktionalgleichung und die Kontinuitätsbedingung der Lösung s. eine Arbeit von Tschebyscheff im Bulletin de la Société mathématique de France, t. 6, p. 188 (1878), ferner Darboux, Math. Annalen, Bd. 17 S. 55 (1880), Volpi, Giornale di matem., vol. 35, p. 104 (1897) und Hamel, Math. Annalen, Bd. 60, S. 459 (1905). Dazu vergleiche man die prinzipiellen Untersuchungen von Siacci, Rendiconto della R. Accad. di Napoli (3) vol. 5, p. 34, 69, 147 (1899) und Schimmack, Axiomatische Untersuchungen über die Vektoraddition, Diss. Göttingen 1908 (Nova Acta, Bd. 90, Nr. 1). Eine Zusammenstellung der älteren Beweise gaben A. H. Westphahl, Die Beweise des Parallelogramms der Kräfte, Diss. Göttingen 1867, und E. Georges, Die Zusammensetzung der Kräfte, Diss. Halle 1909.

5. Äquivalenz der Kräftesysteme. Für ein Kräftesystem lassen sich ebenso wie für ein System gebundener Vektoren Koordinaten definieren, die gebildet werden durch die resultierende Kraft und das resultierende Moment für einen fest gewählten Punkt O. Die resultierende Kraft $\boldsymbol{R}$ finden wir, wenn wir alle Kräfte des Systems ohne Änderung ihrer Größe und Richtung an den Punkt O verlegen und als Kräfte, die an einem Punkte angreifen, zu einer Resultante vereinigen. Das resultierende Moment $\boldsymbol{M}$ finden wir, indem wir die Vektoren, welche die Momente der einzelnen Kräfte des Systems für den Punkt O darstellen, zu einem Vektor vereinigen. Das Moment einer einzelnen Kraft für den Punkt O wird hierbei gefunden, indem wir die Größe der Kraft mit dem Abstand ihrer Wirkungslinie l von O multiplizieren und dies Produkt senkrecht zu der Ebene (Ol) von O aus derart abtragen, daß um die Richtung dieses Vektors die Kraft in positivem Sinne dreht.

Wir beginnen nun mit dem Beweise des Satzes:

Ein beliebiges Kräftesystem läßt sich immer auf ein äquivalentes Kräftesystem zurückführen, das nur aus zwei Kräften besteht.

Um diesen Satz zu beweisen, nehmen wir drei Punkte A, B, C an, die miteinander nicht in einer Geraden und mit keinem von den Angriffspunkten der Kräfte des vorgelegten Systems in einer Ebene liegen. Wir verbinden sie mit allen diesen Angriffspunkten durch gerade Linien, und zerlegen jede der Kräfte in drei Komponenten, die in die Verbindungslinien des betr. Angriffspunktes mit den drei Punkten A, B, C fallen. Diese Komponenten können wir nun nach dem Theorem III in ihrer Wirkungslinie verschieben, bis sie an einen der Punkte A, B, C fallen und

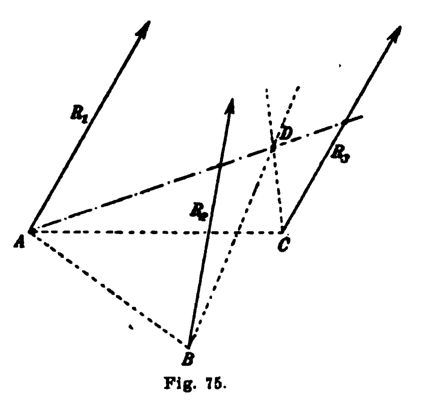


Fig. 75.

darauf können wir die Kräfte, die jetzt an diesen Punkten angreifen, jedesmal zu einer Resultierenden vereinigen, so daß wir drei Kräfte R_1, R_2, R_3 bekommen, die an den Punkten A, B, C angreifen und zusammen dem vorgelegten Kräftesystem äquivalent sind.

Wir legen nun durch A eine Gerade, welche die Wirkungslinien der Kräfte R_2, R_3 trifft und nehmen auf ihr einen neuen Punkt D beliebig an. Dann können wir R_2 in zwei Komponenten zerlegen, die in den Linien BA und BD wirken und die wir in A und D angreifen lassen können, und R_3 ebenso in zwei Komponenten, die in den Linien CA und CD wirken und gleichfalls in A und D angreifen. Wenn wir dann die an demselben Punkte angreifenden Kräfte wieder zu einer Resultante vereinigen, so erhalten wir schließlich zwei Kräfte, die in A und D angreifen und zusammen dem vorgelegten System äquivalent sind.

Wir wollen sofort bemerken, daß aus der ausgeführten Konstruktion unmittelbar die folgende Beziehung folgt: Verlegen wir die beiden gefundenen Kräfte an einen Punkt und vereinigen sie zu einer Resultante, so erhalten wir dieselbe Kraft, die wir als Resultante aller an einen Punkt verlegten Kräfte des gegebenen Systems gewinnen.

Wir wollen jetzt die besonderen Fälle in Betracht ziehen, die bei dieser Reduktion auftreten können.

1. Die beiden Kräfte wirken in einer Ebene, sind aber nicht entgegengesetzt gleich. Dann sind noch zwei Möglichkeiten zu unterscheiden: die Wirkungslinien der beiden Kräfte schneiden sich entweder oder sie sind parallel. Im ersten Falle können wir die beiden Kräfte an den Schnittpunkt ihrer Wirkungslinien verlegen und darauf zu einer Resultierenden vereinigen, im zweiten Falle finden wir die Resultante nach dem Archimedischen Hebelgesetz. In jedem Falle aber ergibt sich unter der angegebenen Voraussetzung eine Einzelkraft, der das vorgelegte Kräftesystem äquivalent ist. Die Größe und Richtung dieser Resultante findet man, indem man die sämtlichen Kräfte des Systems an einen Punkt verlegt und vereinigt.

2. Die beiden Kräfte sind einander entgegengesetzt gleich, wirken aber nicht in derselben geraden Linie. Dann lassen sie sich nicht zu einer Resultante vereinigen und bilden ein sogenanntes Poinsotsches Kräftepaar. In diesem Falle ergeben die an einen Punkt verlegten Systemkräfte die Summe Null. Umgekehrt müssen auch immer, wenn die Kräfte des Systems die Summe Null ergeben, d. h. sich zu einem geschlossenen Polygon aneinander legen lassen, die beiden Kräfte, die man durch Reduktion des vorgelegten Systems erhält, einander entgegengesetzt gleich ausfallen, das Kräftesystem ist also einem Poinsotschen Kräftepaar äquivalent.

3. Die beiden Kräfte sind einander entgegengesetzt gleich und wirken in derselben Geraden. Dann und nur dann halten sie einander das Gleichgewicht, und da, wenn ein Kräftesystem im Gleichgewicht ist, auch jedes ihm äquivalente Kräftesystem im Gleichgewicht sein muß, so ist auch das ursprüngliche Kräftesystem im Gleichgewicht.

Wir wollen nun beachten, daß die Koordinaten $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{M}$ eines Kräftesystems sich nicht ändern, wenn man eine seiner Kräfte in Komponenten zerlegt oder Kräfte, die an einem Punkte angreifen, zu ihrer Resultante vereinigt, endlich auch nicht, wenn man eine Kraft in der Richtung ihrer Wirkungslinie verschiebt. Da wir aber durch solche Prozesse von dem ursprünglichen Kräftesystem zu dem auf zwei Kräfte reduzierten System übergegangen sind, so folgt, daß die Koordinaten dieses reduzierten Systems dieselben sind wie die des ursprünglichen.

Wenn nun insbesondere die beiden Kräfte des reduzierten Systems einander entgegengesetzt gleich werden und in dieselbe Gerade fallen, so verschwinden die Koordinaten dieses Systems, und damit auch die des vorgelegten Systems. Auf diese Weise erkennen wir:

Ein Kräftesystem ist dann und nur dann im Gleichgewicht, wenn seine Koordinaten verschwinden.

Wenn nun zwei Kräftesysteme einander äquivalent sind

und wir die Kräfte des einen mit umgekehrten Richtungen denen des anderen hinzufügen, so ist das entstehende neue System im Gleichgewicht, seine Koordinaten verschwinden also. Diese Koordinaten sind aber die Differenzen von den entsprechenden Koordinaten der vorgelegten Systeme. So zeigt sich:

Zwei Kräftesysteme sind dann und nur dann äquivalent, wenn ihre Koordinaten übereinstimmen.

6. Verschiedene Reduktionen eines Kräftesystems. Die analytischen Koordinaten einer Kraft sind die analytischen Koordinaten des Vektors, der die Kraft darstellt. Ist F die Größe der Kraft und sind $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ die Koordinaten ihrer Wirkungslinie, so ergeben sich für die Koordinaten der Kraft die Werte

$$F\alpha,\ F\beta,\ F\gamma,\ F\lambda,\ F\mu,\ F\nu.$$

Die ersten drei sind die Komponenten der Kraft nach den Achsen und werden auch mit X, Y, Z bezeichnet; die letzten drei sind die Komponenten des Momentes der Kraft für den Koordinatenursprung oder die Momente der Kraft für die Koordinatenachsen. Hat der Angriffspunkt der Kraft die Koordinaten x, y, z und beachten wir, daß

$$F\lambda = F(\gamma y - \beta z) = Zy - Yz$$

wird, so können wir die sechs Koordinaten der Kraft schreiben wie folgt:

$$X,\ Y,\ Z,\ Zy - Yz,\ Xz - Zx,\ Yx - Xy.$$

Alle Sätze und Formeln, die wir in Kap. I des ersten Teiles für gebundene Vektoren und Vektoren aufgestellt haben, lassen sich sofort auf die Kräfte und Kräftesysteme übertragen. Insbesondere ergibt sich, daß wir die Koordinaten eines Kräftesystems finden, indem wir die entsprechenden Koordinaten der einzelnen Kräfte des Systems addieren.

Nehmen wir nun zu der Kraft mit den vorstehenden Koordinaten eine entgegengesetzt gleiche hinzu, deren Koordinaten von der Form sein werden

$$-X,\ -Y,\ -Z,\ -(Zy' - Yz'),\ -(Xz' - Zx'),\ -(Yx' - Xy'),$$

so ergeben sich für die Koordinaten eines Kräftepaares die Werte:

$$0,\ 0,\ 0,\ Z(y-y') - Y(z-z'),\ X(z-z') - Z(x-x'),\ Y(x-x') - X(y-y').$$

Die Bedeutung der drei von Null verschiedenen Größen ist sofort zu erkennen, wenn wir das Koordinatensystem derart parallel verschieben, daß der Ursprung in den Angriffspunkt $P'(x', y', z')$ der zweiten Kraft fällt. Dann werden die neuen Koordinaten des Angriffspunktes P der ersten Kraft $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ und die angeschriebenen Werte sind die Komponenten des Momentes der ersten Kraft für den Punkt P', d. h. des Momentes des Kräftepaares, wenn wir als dieses Moment einen Vektor bezeichnen, der zur Ebene der Kräfte des Paares senkrecht ist, um den diese Kräfte in positivem Sinne drehen und dessen Modul gegeben wird durch das Produkt aus der Größe der Kräfte und dem Abstande ihrer parallelen Wirkungslinien. Auf diese Weise ergibt sich

Alle Kräftepaare, die dasselbe Moment haben, sind äquivalent.

Ein allgemeines Kräftesystem können wir auf unendlich viele Arten ersetzen durch eine Einzelkraft zusammen mit einem Kräftepaar, und zwar können wir den Angriffspunkt der Einzelkraft beliebig wählen. Die Einzelkraft ist die resultierende Kraft $\boldsymbol{R}$ des Kräftesystems, die sich als die Summe der aneinander gelegten Kraftvektoren ergibt, also immer dieselbe, wie auch ihr Angriffspunkt angenommen werden mag. Das Moment des Kräftepaares ist das Moment $\boldsymbol{M}$ des Kräftesystems für den Angriffspunkt der Einzelkraft.

Bilden wir die Koordinaten des Kräftesystems, indem wir mit

$$X_i,\ Y_i,\ Z_i,\ Z_i y_i - Y_i z_i,\ X_i z_i - Z_i x_i,\ Y_i x_i - X_i y_i$$

für $i = 1, 2, \ldots n$ die Koordinaten der einzelnen Kräfte des Systems bezeichnen, so erhalten wir die Werte

$$R_x = \Sigma X_i, \qquad R_y = \Sigma Y_i, \qquad R_z = \Sigma Z_i,$$

$$M_x = \Sigma(Z_i y_i - Y_i z_i),\ M_y = \Sigma(X_i z_i - Z_i x_i),\ M_z = \Sigma(Y_i x_i - X_i y_i).$$

Es sind dann R_x, R_y, R_z die Komponenten der resultierenden Einzelkraft $\boldsymbol{R}$, M_x, M_y, M_z die Komponenten des Momentes des resultierenden Kräftepaares $\boldsymbol{M}$, das man zu einer im Koordinatenursprung angreifenden Einzelkraft erhält. Die beiden Vektoren $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{M}$ sind senkrecht aufeinander und die resultierende Kraft fällt in die Ebene des Kräftepaares, wenn

$$R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = 0$$

ist. Dann ist das Kräftesystem, solange $\boldsymbol{R} \neq 0$ ist, einer Einzelkraft äquivalent. Allgemein liefert $V = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{M}$ oder

$$V = R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z$$

die Projektion des Paarmomentes auf die Richtung der resultierenden Kraft, multipliziert mit der Größe dieser Kraft.

Diese Projektion bleibt konstant, wenn man den Angriffspunkt der Einzelkraft irgendwie verschiebt und dadurch das Kräftepaar verändert. Es wird nämlich das Moment $\boldsymbol{M}$ für einen neuen Punkt O' (vgl. Kap. I, § 5)

$$\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M} + (O - O') \wedge \boldsymbol{R}$$

und daraus folgt sofort, daß auch

$$\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{M}' = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{M} = V$$

ist; diese Zahl V und die Resultante $\boldsymbol{R}$ lassen sich als die Invarianten des Kräftesystems bezeichnen. Für $V = 0$ ist das Kräftesystem einer Einzelkraft, für $\boldsymbol{R} = 0$ einem Kräftepaar äquivalent. M_x, M_y, M_z lassen sich auch auffassen als die Momente des Kräftesystems für die Koordinatenachsen; für eine beliebige Achse mit den Koordinaten α, β, γ, λ, μ, ν wird dieses Moment

$$\alpha M_x + \beta M_y + \gamma M_z + \lambda R_x + \mu R_y + \nu R_z.$$

Es gibt eine Zentralachse des Kräftesystems, für deren Punkte die Ebene des Kräftepaares senkrecht zu der resultierenden Einzelkraft d. h. zu der Zentralachse selbst ausfällt. Das Moment des Kräftepaares erhält, wenn man einen dieser Punkte zum Angriffspunkte der resultierenden Einzelkraft wählt, den kleinsten Wert. Eine solche Kombination einer Einzelkraft

mit einem dazu senkrechten Kräftepaar heißt nach Plücker[1]) eine Dyname.

Die Reduktion eines Kräftesystems auf eine Einzelkraft und ein Kräftepaar ist leicht mit der oben gegebenen Reduktion auf zwei Kräfte in Verbindung zu bringen. Hat man zwei solche Kräfte gefunden und zerlegt die eine in zwei Komponenten, von denen die eine der zweiten Kraft entgegengesetzt gleich ist, so liefert die andere Teilkraft die resultierende Einzelkraft des Systems, und die beiden übrig bleibenden, entgegengesetzt gleichen Kräfte stellen ein Kräftepaar dar, das mit der Einzelkraft zusammen das vorgelegte System ersetzt.

Hieraus ist auch zu sehen, daß die resultierende Einzelkraft in die Ebene des Kräftepaares fallen wird, wenn die Wirkungslinien der beiden Kräfte, die zusammen das vorgelegte System ersetzen, in einer Ebene liegen. Dann aber ist das System einer Einzelkraft äquivalent, und man sieht, daß wenn dies der Fall ist, die resultierende Einzelkraft in die Ebene des resultierenden Kräftepaares fällt, und umgekehrt.

Nach dem im vorigen Paragraphen Gesagten ergibt sich, daß die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Gleichgewicht eines Kräftesystems gegeben werden durch die zwei Vektorgleichungen

$$\boldsymbol{R} = 0, \quad \boldsymbol{M} = 0$$

oder die sechs Zahlgleichungen

$$R_x = 0,\ R_y = 0,\ R_z = 0,\ M_x = 0,\ M_y = 0,\ M_z = 0.$$

Diese Bedingungen lassen sich auch in Vektorform ausgeführt schreiben, wenn wir mit $\boldsymbol{F}_i$ die Kräfte des Systems und mit P_i ihre Angriffspunkte bezeichnen,

$$\sum \boldsymbol{F}_i = 0, \quad \sum (P_i - O) \wedge \boldsymbol{F}_i = 0.$$

Es folgt dann auch für jeden anderen Punkt O'

$$\sum (P_i - O') \wedge \boldsymbol{F}_i = 0.$$

---

1) Fundamental views regarding mechanics, Philosophical Transactions, vol. 156 (1866), p. 361, Wissensch. Abhandlungen, Bd. 1, S. 548.

Liegen alle Kräfte in der xy-Ebene, so daß $Z_i = 0$ und $z_i = 0$ wird, dann ist von vorneherein $R_z = 0$, $M_x = 0$, $M_y = 0$, und die Gleichgewichtsbedingungen reduzieren sich auf

$$R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad M_z = 0.$$

Dieser Fall ist für die Praxis besonders wichtig und seine zeichnerische Behandlung wird in der graphischen Statik ausführlich erörtert.

7. Zusammensetzung eines Systems paralleler Kräfte. Im Falle paralleler Kräfte verschwindet die Invariante V ihrer Bedeutung nach. Außerdem wird die Resultante des Systems gleich der algebraischen Summe aller Einzelkräfte. Ist diese von Null verschieden, so wollen wir zeigen, daß das System einer einzigen Kraft äquivalent ist.

Es sei $\boldsymbol{i}$ ein Einheitsvektor, welcher der gemeinsamen Richtung aller Kräfte parallel ist; $F_1, F_2, \ldots$ seien die Intensitäten dieser Kräfte, F die Intensität der Resultante. Damit die Kraft $-\boldsymbol{i}F$ dem System das Gleichgewicht hält, muß zunächst

$$-\boldsymbol{i}F + \boldsymbol{i}F_1 + \boldsymbol{i}F_2 + \cdots = 0,$$

mithin, wie bereits gesagt wurde,

$$F = F_1 + F_2 + \cdots$$

werden. Wenn ferner O ein beliebiger Punkt ist und $A_1, A_2, \ldots$ die Angriffspunkte der einzelnen Kräfte des Systems bedeuten, während in G die Resultante angreift, so ergibt sich weiter

$$-(G-O) \wedge \boldsymbol{i}F + (A_1 - O) \wedge \boldsymbol{i}F_1 + (A_2 - O) \wedge \boldsymbol{i}F_2 + \cdots = 0$$

oder

$$[-(G-O) \cdot F + (A_1 - O) \cdot F_1 + (A_2 - O) \cdot F_2 + \cdots] \wedge \boldsymbol{i} = 0.$$

Der in der eckigen Klammer stehende Vektor muß also entweder Null oder gleichgerichtet mit $\boldsymbol{i}$ sein. Wenn wir das erstere annehmen, also

$$(G-O)F = (A_1 - O)F_1 + (A_2 - O)F_2 + \cdots,$$

so sind die Bedingungen der Äquivalenz erfüllt, unabhängig von der Wahl des Einheitsvektors $\boldsymbol{i}$, d. h. von der Richtung der parallelen Kräfte. Der Punkt G ist

durch die vorstehende Gleichung auch eindeutig bestimmt, denn existierte ein zweiter Punkt G', der einer analogen Gleichung

$$(G' - O')F = (A_1 - O')F_1 + (A_2 - O')F_2 + \cdots$$

genügt, so ergäbe sich durch Subtraktion der beiden vorstehenden Gleichungen

$$(G - G')F = (O' - O)[-F + F_1 + F_2 + \cdots],$$

also

$$(G - G')F = 0,$$

d. h.

$$G = G'.$$

Der demnach eindeutig bestimmte Punkt G heißt der **Mittelpunkt der parallelen Kräfte.**

Lassen wir die Resultante in ihm angreifen und unterwerfen alle Kräfte des Systems einer gemeinsamen Drehung um ihre Angriffspunkte, so dreht die Resultante sich mit um den Punkt G.

Wird $F = 0$, so versagt die angegebene Reduktion, das System ist dann nicht einer Einzelkraft, sondern einem Poinsotschen Kräftepaar äquivalent. Man kann dies Kräftepaar finden, indem man die Kräfte des Systems nach ihrem Sinne scheidet und erst die Kräfte, die den einen Sinn (etwa den Sinn der positiven z-Achse) haben, zu einer Resultante vereinigt und darauf die Kräfte, die den anderen (negativen) Sinn haben. Diese beiden Resultanten müssen entgegengesetzt gleich ausfallen und bilden ein Kräftepaar, das dem vorgelegten System äquivalent ist. Wir können aber die beiden Resultanten in den Mittelpunkten der beiden Teilsysteme angreifen lassen, und dann drehen sie sich mit den Kräften des vorgelegten Systems um ihre Angriffspunkte. So bekommen wir ein Kräftepaar, das dem vorgelegten Kräftesystem auch dann noch äquivalent bleibt, wenn man alle Kräfte, die Kräfte des Kräftepaares selbst einbegriffen, einer gemeinsamen Drehung um ihre Angriffspunkte unterwirft.

Tritt der besondere Fall ein, daß die Mittelpunkte der beiden Teilsysteme zusammenfallen, so ist das ganze System der parallelen Kräfte im Gleichgewicht und bleibt es, wenn

man die Kräfte irgend einer gemeinsamen Drehung um ihre Angriffspunkte unterwirft. Ein solches Gleichgewicht bezeichnet man als astatisches Gleichgewicht.

Der Mittelpunkt der parallelen Kräfte hat eine besondere Bedeutung, wenn die Kräfte als Gewichte zu deuten sind. Er wird dann als Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt des materiellen Systems bezeichnet.

Haben wir einen kontinuierlich ausgebreiteten Körper vor uns, so haben wir die Summen in der den Schwerpunkt liefernden Gleichung zu ersetzen durch die entsprechenden Integrale. Nehmen wir nur den besonders einfachen Fall, wo die Dichtigkeit in dem Körper überall dieselbe ist, so wird das Gewicht eines Elementes des Körpers dem Volumen $d\tau$ dieses Elementes proportional, und wir erhalten die Vektorgleichung für den Schwerpunkt S

$$S - O = \int (P - O)\, d\tau : \int d\tau,$$

in der O einen beliebigen festen Punkt und P einen Punkt in dem Körperelement $d\tau$ bezeichnet.

Wir können diese Vektorgleichung auflösen in die drei Zahlgleichungen

$$\xi = \int x\, d\tau : \int d\tau, \quad \eta = \int y\, d\tau : \int d\tau, \quad \zeta = \int z\, d\tau : \int d\tau,$$

welche die Koordinaten ξ, η, ζ des Schwerpunktes bestimmen.

8. Das Hebelgesetz. Nehmen wir nur zwei Kräfte an, die der z-Achse parallel sind und in zwei Punkten der x-Achse angreifen, so ergeben die allgemeinen Gleichungen für den Mittelpunkt paralleler Kräfte:

$$(F_1 + F_2)\,\xi = F_1 x_1 + F_2 x_2, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$\xi - x_1 : x_2 - \xi = F_2 : F_1.$$

Greifen also zwei parallele Kräfte in den Endpunkten A, B einer starren, geradlinigen Stange an, so liegt der Mittelpunkt C dieser Kräfte ebenfalls auf der Linie der Stange und teilt zwei den Kräften umgekehrt proportionale Teile ab, und zwar

inner- oder außerhalb der Strecke AB, jenachdem die Kräfte gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind.

Sind P und Q die beiden parallelen Kräfte, R die Resultante, so wird

$$P : Q : R = \operatorname{mod}(B - C) : \operatorname{mod}(C - A) : \operatorname{mod}(B - A).$$

Ist die Stange in C aufgestützt, also ein Hebel im Gleichgewichte, so ist R der Druck des Hebels auf die Stütze, die Strecken CA und CB heißen die Hebelarme und die ausgesprochene Regel drückt das Archimedische Hebelgesetz aus.

Wir wollen zeigen, in welcher zwar nicht strengen, aber sehr anschaulichen Weise man unter Voraussetzung der oben zugrunde gelegten allgemeinen Axiome das Hebelgesetz unabhängig begründen und aus ihm das Parallelogrammgesetz ableiten kann.

Wir gehen dabei von dem Prinzip aus, daß, wenn die Hebelarme gleich und die Kräfte in ihren Endpunkten ebenfalls gleich sind, Gleichgewicht besteht und dabei der resultierende Stützendruck dem Doppelten der Kräfte gleich ist, mit anderen Worten, daß zwei gleich große und gleich gerichtete Kräfte einer entgegengesetzt gerichteten und doppelt so großen Kraft, die in der Mitte zwischen ihren Angriffspunkten wirkt, das Gleichgewicht halten. Ich behaupte nun, daß, wenn die parallelen Kräfte sich etwa wie $3:2$ verhalten, Gleichgewicht besteht, wenn die Hebelarme das umgekehrte Verhältnis $3:2$ haben, und daß der Stützendruck dann gleich $P + Q$ wird.

Zum Beweis nehme ich auf dem Hebel zunächst 10 gleiche Kräfte p in gleichen Abständen a an, dann liegt der Mittelpunkt der Kräfte in der Mitte C zwischen der fünften und sechsten Kraft und die resultierende Kraft R ist gleich $10p$. Die resultierende Kraft der vier ersten Kräfte aber greift

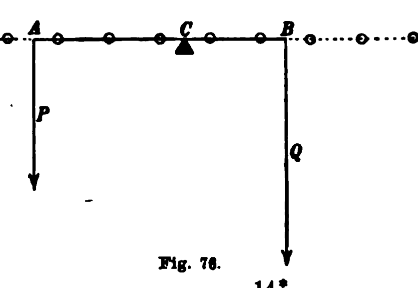


Fig. 76.

in der Mitte A zwischen der zweiten und dritten Kraft, also im Abstande $3a$ von C an und ihre Größe P ist gleich $4a$. Die Resultante der sechs letzten Kräfte dagegen greift in der Mitte B zwischen der siebten und achten Kraft, also im Abstande $2a$ von C an, und ihre Größe ist gleich $6a$. Es ist also hier in der Tat $P:Q = BC:CA$ und $R = P + Q$. Ebenso lassen sich die Gleichungen des Hebelgesetzes in allen anderen Fällen beweisen, wo P und Q ein rationales Verhältnis haben, und dann durch ein Exhaustionsverfahren auch in den Fällen, wo dies Verhältnis einen irrationalen Wert hat.

Der Fall des Winkelhebels läßt sich auf den des geraden Hebels sofort zurückführen, wenn man von dem Prinzip ausgeht, daß ein Winkelhebel mit gleichen Armen unter der Einwirkung gleicher Kräfte im Gleichgewicht ist, wenn die Kräfte den Hebel in entgegengesetztem Sinne zu drehen streben.

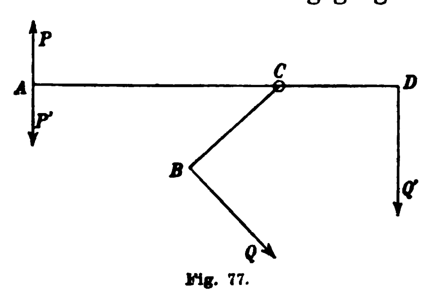


Fig. 77.

Betrachten wir nun den Winkelhebel ACB, an dem in A und B die Kräfte P und Q senkrecht zu den Hebelarmen wirken, so verlängern wir den Hebelarm AC über C hinaus um die Strecke $CD = BC$ und bringen an dem geraden Hebel ACD in A eine der Kraft P entgegengesetzt gleiche Kraft P' und in D eine parallele Kraft Q' an, die P' an dem geraden Hebel das Gleichgewicht hält. Dann zerstören sich die Kräfte P und P' und die übrig bleibenden Kräfte Q und Q' müssen nach dem zugrunde gelegten Prinzip einander gleich sein. Da aber $P':Q' = CD:AC$ ist, muß auch

$$P:Q = CB:AC$$

werden, oder $AC \cdot P = CB \cdot Q$, d. h. die statischen Momente der Kräfte für den Punkt C müssen einander gleich und zwar entgegengesetzt gleich sein, da die Kräfte in entgegengesetztem Sinne um den Punkt C zu drehen streben; denn es ist ja der Drehsinn von Q entgegengesetzt dem von Q', dieser dem von P',

dieser wieder dem von P, also auch der Drehsinn von Q entgegengesetzt dem von P.

Ersetzen wir den Winkelhebel durch einen starren Körper, so können wir die Kräfte P und Q in ihren Wirkungslinien verschieben, bis sie an einen Punkt O fallen. Dann ist sofort zu sehen, daß C auf der von O ausgehenden Diagonale eines Parallelogramms $OEFG$ liegen muß, von dem die Seiten OE und OG die Kräfte P und Q der Größe und Richtung nach darstellen. Denn es muß der Punkt C, wenn p, q seine senkrechten Abstände von den Geraden OE und OG, also die Hebelarme CA und CB sind, die Beziehung erfüllen

$$OE \cdot p = OG \cdot q,$$

diese Beziehung besteht aber für die Punkte der erwähnten Diagonale und für keine anderen Punkte. So gelangen wir wieder zu dem Parallelogrammgesetz, denn wenn wir einmal gefunden haben, daß die Resultante die **Richtung** der Parallelogrammdiagonale hat, so ist, wie wir schon oben gesehen haben, leicht zu zeigen, daß sie auch der **Größe** nach durch diese Diagonale gegeben wird. Auf diesem Wege ist schon im Mittelalter das Parallelogrammgesetz aus dem Hebelgesetz gewonnen werden.

Das für den Winkelhebel verallgemeinerte Archimedische Hebelgesetz steht auch in einer engen Beziehung zu dem Gesetz der **schiefen Ebene**. Denkt man sich nämlich zwei aneinander grenzende schiefe Ebenen, die sich in der Zeichnung als zwei Seiten, AC und BC, eines Dreiecks ABC darstellen, dessen dritte Seite AB horizontal ist, und diese schiefen Ebenen gleichförmig und proportional ihrer Ausdehnung belastet, so sind diese beiden Lasten im Gleichgewicht, wenn man sie durch einen bei C über eine Rolle geführten Faden verbindet.

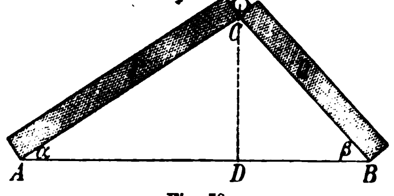


Fig. 78.

Dieser Satz enthält das Gesetz der schiefen Ebene; er

drückt aus, daß die beiden die Lasten längs der Ebenen abwärts treibenden Kräfte einander gleich sind. Nennt man nun P die Last auf AC, Q die Last auf BC, α den Winkel bei A, β den Winkel bei B, so wird nach dem Sinussatz sofort

$$P : Q = \sin\beta : \sin\alpha.$$

Führt man dieselbe Überlegung noch einmal durch, indem man die Seite AC und die Last auf ihr ungeändert läßt, die Seite BC aber ersetzt durch die Höhe CD des Dreiecks ABC und R die an der Seite CD herunterhängende Last nennt, so ergibt sich

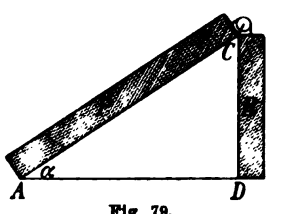


Fig. 79.

$$P : R = 1 : \sin\alpha$$

und somit

$$R = P \sin\alpha.$$

Diese Gleichung ist die gewöhnliche Gleichung der schiefen Ebene, R gibt unmittelbar die längs der schiefen Ebene abwärts treibende Kraft an.

Nennen wir a die Hälfte der Seite AB, so folgt aus der ersten Gleichung

$$P \cdot a \sin\alpha = Q \cdot a \sin\beta$$

oder, wenn wir mit p und q die Längen der aus der Mitte M von AB auf AC und BC gefällten Lote bezeichnen,

$$P \cdot p = Q \cdot q.$$

Dies aber ist nichts anderes wie das verallgemeinerte Archimedische Hebelgesetz.

Der erste Beweis des Hebelgesetzes findet sich bei Archimedes, De Planorum aequilibriis, lib. I, prop. VI und VII, in der Ausgabe von Heiberg Bd. 2, S. 152. Das Hebelgesetz ist auch in der Aristotelischen Schrift Mechanica problemata zu finden; da diese Schrift aber apokryph ist, kann man daraus nicht schließen, daß Archimedes das Gesetz bereits vorgefunden hat. Im Mittelalter bildete das Hebelgesetz die Grundlage der Statik (vgl. Duhem, Les origines de la Statique). Über seine neuere Geschichte sehe man Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch und kritisch dargestellt (zuerst 1883, dann viele Auflagen). An dem Archimedischen Beweise, den wir oben wiedergegeben haben, ist eine Kritik geübt worden, die mit Huygens, Fourier und Lagrange beginnt, sie

findet ihre Zusammenfassung in Vailati, La dimostrazione del principio della leva data da Archimede, Bollettino di bibliografia e di storia d. scienze mat. anno VII (1904).

Über die Geschichte des Prinzips der schiefen Ebene, das von Anfang an in Beziehung zu dem Hebelgesetz gebracht wurde, findet man ebenfalls reichen Aufschluß in den zitierten Werken von Duhem und Mach. Aus mittelalterlichen Quellen, insbesondere der Schrift De Ponderibus des Jordanus Nemorarius, stammt der Beweis, den Stevin für die Zerlegung einer Kraft in zwei orthogonale Komponenten in den Hypomnemata mathematica 1608 gegeben hat. Auch in der Jugendschrift von Galilei, Le meccaniche (1593, Opere di Galilei, Edizione nazionale, vol. 2, p. 181) findet sich eine einfache Zurückführung des Prinzips der schiefen Ebene auf das Hebelprinzip. Man vgl. auch den Aufsatz von Vailati, Il principio dei lavori virtuali ecc. in den Atti della R. Accad. di Torino, t. 32 (1897), p. 940.

Für das Hebelgesetz sind ebenso wie für das Parallelogrammgesetz direkte Beweise gegeben worden, so von Foncenex, Mélanges de phil. et de math. de Turin, t. 2 (1761), p. 305, Monge, Traité élémentaire de Statique (1786), Poinsot, Éléments de Statique (1804), Poisson, Traité de mécanique 1 (1811), p. 34, Moebius, Lehrbuch der Statik (1837, Werke Bd. 3, S. 40).

Übungsbeispiele.

1. Aufgabe. *Die Momente eines Kräftesystems für die Geraden und Punkte des Raumes zu untersuchen.*

Auflösung. Der Ausdruck für das Moment eines Kräftesystems bezüglich einer Geraden $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu)$

$$\alpha M_x + \beta M_y + \gamma M_z + \lambda R_x + \mu R_y + \nu R_z$$

ergibt ausgerechnet die Summe

$$\sum [X_i(\lambda - \gamma y_i + \beta z_i) + Y_i(\mu - \alpha z_i + \gamma x_i) + Z_i(\nu - \beta x_i + \alpha y_i)].$$

Die Größen in den runden Klammern werden, wenn man noch

$$\lambda = \gamma y - \beta z, \quad \mu = \alpha z - \gamma x, \quad \nu = \beta x - \alpha y$$

einsetzt, die Komponenten des Vektorproduktes

$$\boldsymbol{g} \wedge (P_i - P),$$

wobei $\boldsymbol{g} = \alpha \boldsymbol{e}_1 + \beta \boldsymbol{e}_2 + \gamma \boldsymbol{e}_3$ gemacht wird, P_i den Angriffspunkt der i^{ten} Systemkraft und P den auf der Geraden angenommenen Punkt (x, y, z) bezeichnet. Daraus folgt, wenn wir noch den Kraftvektor $X_i \boldsymbol{e}_1 + Y_i \boldsymbol{e}_2 + Z_i \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{F}_i$ einführen, für das Moment der Ausdruck

$$\sum \boldsymbol{F}_i \times \boldsymbol{g} \wedge (P_i - P),$$

entsprechend der ursprünglichen Definition dieses Momentes für ein Vektorsystem.

Man findet das Moment, indem man jede Kraft des Systems mit dem kürzesten Abstand ihrer Wirkungslinie von der Bezugslinie des Momentes und dem Sinus des Winkels, unter dem die beiden Linien sich kreuzen, multipliziert und alle diese Produkte addiert.

Den letzten Ausdruck für das Moment kann man aber auch schreiben

$$\sum (P_i - P) \wedge \boldsymbol{F}_i \times \boldsymbol{g} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{g},$$

wenn man mit $\boldsymbol{M}$ den Vektor bezeichnet

$$\boldsymbol{M} = \sum (P_i - P) \wedge \boldsymbol{F}_i.$$

Man findet also (da der Modul von $\boldsymbol{g}$ gleich 1 ist) das Moment für alle durch den Punkt P gehende Geraden, indem man auf sie den Vektor $\boldsymbol{M}$ projiziert. Trägt man demnach diese Momente vom Punkte P aus als Strecken PQ ab, so erfüllen die Punkte Q eine Kugel, von welcher der Vektor $\boldsymbol{M}$ einen Durchmesser bildet. Dieser Vektor bedeutet dann das Moment des Kräftesystems für den Punkt P.

Die Tangentialebene der Kugel im Punkte P (d. h. die Ebene durch P, die zu $\boldsymbol{M}$ senkrecht ist) wird erfüllt von den Geraden durch P, für welche das Moment gleich 0 ist, es ist also die Nullebene dieses Punktes.

Will man die Komponenten des Vektors $\boldsymbol{M}$ ausrechnen, so findet man aus dem gegebenen Ausdruck für $\boldsymbol{M}$, da

$$\sum \boldsymbol{F}_i = R_x \boldsymbol{e}_1 + R_y \boldsymbol{e}_2 + R_z \boldsymbol{e}_3, \quad \sum (P_i - O) \wedge \boldsymbol{F}_i = M_x \boldsymbol{e}_1 + M_y \boldsymbol{e}_2 + M_z \boldsymbol{e}_3$$

ist, für sie sofort die Werte

$$\mathfrak{M}_x = M_x - R_z y + R_y z, \quad \mathfrak{M}_y = M_y - R_x z + R_z x, \quad \mathfrak{M}_z = M_z - R_y x + R_x y.$$

Vgl. Cauchy, Sur les moments linéaires, Exercices de math. 1 (1826), Œuvres (2) tome 6, p. 89.

2. Aufgabe. *Zu zeigen, daß, wenn ein Kräftesystem auf doppelte Weise zwei Einzelkräften äquivalent ist, die Wirkungslinien dieser vier Kräfte immer einer Regelfläche zweiter Ordnung angehören.*

Auflösung. Wenn ein Kräftesystem zwei Einzelkräften äquivalent ist, so verschwindet für jede Gerade, welche die Wirkungslinien der beiden Einzelkräfte trifft, das Moment dieser beiden Kräfte und damit auch das Moment des vorgelegten Kräftesystems, d. h. die Gerade ist eine Moebiussche Nullinie. Umgekehrt muß eine Nullinie, welche die Wirkungslinie einer der zwei das gegebene Kräftesystem ersetzenden Einzelkräfte trifft, auch die Wirkungslinie

der anderen treffen, denn das Moment dieser Kraft muß für sie verschwinden. Ist nun das Kräftesystem in doppelter Weise auf zwei Einzelkräfte reduziert und wir ziehen eine Linie, welche drei von den Wirkungslinien dieser vier Kräfte trifft, so ist dies eine Nulllinie, weil sie die Wirkungslinien eines der Paare von Einzelkräften trifft, und da sie weiter die eine Wirkungslinie des anderen Paares trifft, muß sie auch die vierte Wirkungslinie treffen. Die Geraden aber, welche drei windschiefe Gerade treffen, erfüllen eine Regelfläche zweiter Ordnung, der die drei Geraden selbst angehören, und auf der Regelfläche, die wir so für drei der vier Wirkungslinien finden, liegt auch die vierte Wirkungslinie, w. z. b. w.

3. Aufgabe. *Die Bedingungen des Gleichgewichtes für vier Kräfte mit windschiefen Wirkungslinien aufzustellen.*

Auflösung. Kehren wir die Richtung von zweien der vier Kräfte um, so erhalten wir ein System, das dem System der anderen beiden Kräfte äquivalent ist. Die beiden Paare von Kräften sind daher jedem Kräftesystem äquivalent, dem das eine Paar äquivalent ist. Deshalb müssen ihre Wirkungslinien, also die Wirkungslinien der vier gegebenen Kräfte, einer Regelfläche zweiter Ordnung angehören.

Wir wollen nun die Größen der vier Kräfte finden. Wir numerieren die Kräfte von 1 bis 4 und nennen ihre Größen P_1, P_2, P_3, P_4. Wir wollen ferner z. B. das Moment der zweiten Kraft für die Wirkungslinie der ersten Kraft in der einfachen Form schreiben

$$P_2 \cdot (12).$$

Es bedeutet dann (12) das gegenseitige Moment der beiden Wirkungslinien, nämlich das Produkt aus ihrem kürzesten Abstande und dem Sinus des Winkels, unter dem sie sich kreuzen. Dabei ist zu beachten, daß allgemein $(ik) = (ki)$ wird.

Stellen wir nun die Bedingungen dafür auf, daß das Moment des Systems der vier Kräfte für die Wirkungslinien dieser Kräfte (wie für jede Gerade des Raumes) verschwindet, so ergeben sich die vier Gleichungen

$$\begin{array}{rrrrl} & (12)P_2 + & (13)P_3 + & (14)P_4 & = 0, \\ (21)P_1 & & + (23)P_3 + & (24)P_4 & = 0, \\ (31)P_1 + & (32)P_2 & & + (34)P_4 & = 0, \\ (41)P_1 + & (42)P_2 + & (43)P_3 & & = 0. \end{array}$$

Sollen diese Gleichungen für Werte P, die nicht sämtlich verschwinden, zusammen bestehen können, so muß ihre Determinante verschwinden. Die so entstehende Gleichung kann man aber reduzieren auf

$$\sqrt{(23)(14)} + \sqrt{(31)(24)} + \sqrt{(12)(34)} = 0.$$

Dies ist eine analytische Beziehung, der die Wirkungslinien genügen. Aber sie ist keineswegs hinreichend, denn sie drückt noch nicht aus, daß die vier Wirkungslinien auf einer Regelfläche 2. Ordnung liegen.

Bezeichnen wir die Unterdeterminanten der betrachteten Determinante mit [11], [12] usw., so ergibt sich, wenn man die erste der vier linearen Gleichungen wegläßt:

$$P_1 : P_2 : P_3 : P_4 = [11] : [12] : [13] : [14],$$

und wenn man die zweite Gleichung wegläßt:

$$P_1 : P_2 : P_3 : P_4 = [21] : [22] : [23] : [24].$$

Multipliziert man aber die Proportionen

$$P_1 : P_2 = [11] : [12] \quad \text{und} \quad P_1 : P_2 = [21] : [22],$$

unter Rücksicht darauf, daß $[12] = [21]$, miteinander, so ergibt sich

$$P_1^2 : P_2^2 = [11] : [22]$$

und somit

$$P_1 : P_2 : P_3 : P_4 = \sqrt{[11]} : \sqrt{[22]} : \sqrt{[33]} : \sqrt{[44]}.$$

Rechnen wir die Werte dieser Unterdeterminanten aus, so finden wir für die Verhältnisse der vier Kräfte

$$P_1 : P_2 : P_3 : P_4 =$$

$$\sqrt{(23)(34)(42)} : \sqrt{(34)(41)(13)} : \sqrt{(41)(12)(24)} : \sqrt{(12)(23)(31)}.$$

Damit ist die Aufgabe vollständig gelöst. Die Verhältnisse der Kräfte sind durch die Lage der Wirkungslinien eindeutig bestimmt. Vgl. Moebius, Lehrbuch der Statik I, § 103.

4. Aufgabe. *Ein vorgelegtes Kräftesystem zu ersetzen durch ein äquivalentes System von sechs Kräften, welche in den Kanten eines gegebenen Tetraeders wirken.*

Auflösung. Wir könnten auch statt der sechs Kanten eines Tetraeders sechs beliebige Gerade wählen, die nur keinem linearen Strahlenkomplex angehören dürfen, doch ziehen wir diese besondere Formulierung vor, weil sie eine übersichtliche und elegante Lösung liefert.

Wir bezeichnen die Ecken des Tetraeders mit P_1, P_2, P_3, P_4, die Kanten entsprechend durch die Indizespaare 12, 13 usw. und nennen die Momente des vorgelegten Kräftesystems für diese Kanten M_{12}, M_{13} usw. Ferner wollen wir

$$\Theta = (P_2 - P_1) \times (P_3 - P_1) \wedge (P_4 - P_1)$$

setzen und die unbekannten Kräfte in den Kanten des Tetraeders gleich $\xi_{12}(P_2 - P_1)$, $\xi_{13}(P_3 - P_1)$ usw. annehmen. Dann muß das

Moment M_{12} des Kräftesystems für die Kante 1 2 gleich dem Moment der Kraft $\xi_{34}(P_4 - P_3)$ für dieselbe Kante werden, weil die Momente aller anderen in den Tetraederkanten wirkenden Kräfte für diese Kante verschwinden. So ergibt sich die Gleichung

$$M_{12} = \xi_{34}(P_4 - P_3) \wedge (P_3 - P_1) \times \frac{P_2 - P_1}{\mathrm{mod}\,(P_2 - P_1)}$$

oder

$$M_{12} = -\xi_{34}\frac{\Theta}{\mathrm{mod}\,(P_2 - P_1)}.$$

Wir finden auf diese Weise die Werte

$$\xi_{12} = -\frac{M_{34}\,\mathrm{mod}\,(P_4 - P_3)}{\Theta}, \quad \xi_{34} = -\frac{M_{12}\,\mathrm{mod}\,(P_2 - P_1)}{\Theta},$$

$$\xi_{23} = -\frac{M_{14}\,\mathrm{mod}\,(P_4 - P_1)}{\Theta}, \quad \xi_{14} = -\frac{M_{23}\,\mathrm{mod}\,(P_3 - P_2)}{\Theta},$$

$$\xi_{31} = -\frac{M_{24}\,\mathrm{mod}\,(P_4 - P_2)}{\Theta}, \quad \xi_{24} = -\frac{M_{31}\,\mathrm{mod}\,(P_1 - P_3)}{\Theta}.$$

Vgl. Zeuthen, Math. Ann., Bd. 1, S. 432 (1869); Battaglini, Rendiconto della R. Accademia di Napoli, vol. 8, p. 87 (1869); vol. 9, p. 89 (1870).

5. Aufgabe. *In welcher Analogie stehen die Kräfte am starren Körper zu den früher behandelten momentanen Drehungen eines starren Körpers?*

Auflösung. Jeder Kraft läßt sich eine Drehung zuweisen derart, daß die Wirkungslinie a der Kraft die Achse der Drehung, die Größe F der Kraft gleich der Winkelgeschwindigkeit ω der Drehung ist, und der Körper bei der Drehung die Richtung der Kraft in positivem Sinne umkreist. Sind α, β, γ, λ, μ, ν die Koordinaten der Linie a, so werden die Koordinaten der Kraft

$$F\alpha, \quad F\beta, \quad F\gamma, \quad F\lambda, \quad F\mu, \quad F\nu,$$

entsprechend werden die Koordinaten der Drehung

$$\omega\alpha, \quad \omega\beta, \quad \omega\gamma, \quad \omega\lambda, \quad \omega\mu, \quad \omega\nu,$$

und es ist $F = \omega$ anzunehmen.

Die Komponenten der Kraft nach den Koordinatenachsen sind

$$X = F\alpha, \quad Y = F\beta, \quad Z = F\gamma.$$

Entsprechend sind die Komponenten der Drehung nach den Koordinatenachsen

$$p = \omega\alpha, \quad q = \omega\beta, \quad r = \omega\gamma.$$

Die Koordinaten eines Kräftesystems bilden wir, indem wir die homologen Koordinaten aller einzelnen Kräfte des Systems addieren.

Entsprechend können wir auch ein System von momentanen Drehungen bilden und dabei, um die Koordinaten des Systems zu erhalten, die Koordinaten der einzelnen Drehungen addieren. Dies bedeutet aber nichts anderes, als daß wir die momentanen Drehungen zu einer resultierenden Bewegung zusammensetzen. Der Zusammensetzung der Kräftesysteme am starren Körper entspricht also die Ersetzung der zugehörigen momentanen Bewegungen durch eine Bewegung, die den Körper direkt aus derselben Anfangslage in dieselbe unendlich benachbarte Endlage bringt wie die in ihr vereinigten Bewegungen, wenn man sie nacheinander ausführt.

Fügt man insbesondere der ursprünglich betrachteten Kraft eine entgegengesetzt gleiche Kraft, die im Koordinatenursprung angreift, also die Koordinaten $-F\alpha$, $-F\beta$, $-F\gamma$, 0, 0, 0 hat, hinzu, so ergibt sich ein Kräftepaar, dessen Koordinaten die folgenden sind:

$$0, \quad 0, \quad 0, \quad F\lambda, \quad F\mu, \quad F\nu.$$

Fügt man entsprechend der Drehung eine entgegengesetzt gleiche Drehung um eine parallele Achse durch den Koordinatenursprung hinzu, so ergibt sich ein Rotationspaar, dessen Koordinaten die folgenden sind:

$$0, \quad 0, \quad 0, \quad \omega\lambda, \quad \omega\mu, \quad \omega\nu.$$

Dieses Rotationspaar bedeutet aber eine bloße Gleitung oder Translation, bei der die Komponenten der Geschwindigkeit eines jeden Punktes

$$u = \omega\lambda, \quad v = \omega\mu, \quad w = \omega\nu$$

sind, während die Komponenten für das Moment des Kräftepaares analog

$$L = F\lambda, \quad M = F\mu, \quad N = F\nu$$

werden. Einem Kräftepaare entspricht also eine Translation und die Komponenten der Translationsgeschwindigkeit korrespondieren den Komponenten des Momentes beim Kräftepaar.

Jenachdem die aus mehreren Drehungen resultierende Bewegung eine Schraubung, Drehung oder Gleitung ist, ist das Kräftesystem, zu dem die den Drehungen analogen Einzelkräfte sich zusammensetzen, äquivalent einer Dyname, einer Einzelkraft oder einem Kräftepaar.

Allgemein werden bei einer Schraubung, deren Koordinaten p, q, r, u, v, w sind, die Komponenten der Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes

$$\dot{x} = u - ry + qz, \quad \dot{y} = v - pz + rx, \quad \dot{z} = w - qx + py.$$

Sind aber analog R_x, R_y, R_z, M_x, M_y, M_z die Koordinaten des zugehörigen Kräftesystems, so hat sein Moment für denselben Punkt P die Komponenten

$$\mathfrak{M}_x = M_x - R_z y + R_y z, \quad \mathfrak{M}_y = M_y - R_x z + R_z x, \quad \mathfrak{M}_z = M_z - R_y x + R_x y.$$

Das Moment eines Kräftesystems für einen beliebigen Punkt entspricht also der Geschwindigkeit desselben Punktes bei der zugehörigen momentanen Bewegung. Zu warnen ist aber davor, die Bewegung etwa als durch das Kräftesystem veranlaßt anzusehen. Die betrachtete Zuordnung ist vielmehr eine rein geometrische. Vgl. F. Klein, Math. Annalen, Bd. 4, S. 403 (1871).

6. Aufgabe. *Zwei Dynamen zu einer einzigen zu vereinigen.*

Auflösung. Wir setzen voraus, daß die Achsen der beiden Dynamen sich nicht schneiden und verlegen die z-Achse eines Koordinatensystems in ihre gemeinsame Normale. Sind dann R_1, R_2 die Werte der Einzelkräfte, $k_1 R_1$, $k_2 R_2$ die Moduln der Momente der Kräftepaare, so sind die Koordinaten z. B. der ersten Dyname von der Form

$$R_1 \cos\theta_1, \quad R_1 \sin\theta_1, \quad 0,$$
$$R_1(k_1 \cos\theta_1 - z_1 \sin\theta_1), \quad R_1(k_1 \sin\theta_1 + z_1 \cos\theta_1), \quad 0,$$

wenn die Achse der Dyname den Abstand z_1 von der xy-Ebene hat und mit der x-Achse den Winkel θ_1 bildet. Wir können nun, indem wir den Koordinatenursprung und die Richtung der x-Achse, also die Werte z_1 und θ_1 geeignet wählen, die Koordinaten der beiden Dynamen auf die Form bringen

$$R_1 \cos\theta_1, \; R_1 \sin\theta_1, \; 0, \quad \alpha R_1 \cos\theta_1, \; \beta R_1 \sin\theta_1, \; 0,$$
$$R_2 \cos\theta_2, \; R_2 \sin\theta_2, \; 0, \quad \alpha R_2 \cos\theta_2, \; \beta R_2 \sin\theta_2, \; 0.$$

Dann ergibt sich

$$\alpha = k_1 - z_1 \operatorname{tang}\theta_1 = k_2 - z_2 \operatorname{tang}\theta_2,$$
$$\beta = k_1 + z_1 \operatorname{cotg}\theta_1 = k_2 + z_2 \operatorname{cotg}\theta_2.$$

Diesen Gleichungen läßt sich genügen, auch wenn man berücksichtigt, daß $z_1 - z_2 = d$ und $\theta_1 - \theta_2 = \delta$ gegebene Werte haben, nämlich d gleich dem kürzesten Abstand der Achsen der gegebenen Dynamen und δ gleich dem Winkel zwischen ihnen ist. Man leitet aus den vorstehenden Gleichungen unschwer die folgenden ab

$$\operatorname{tang}(\theta_1 + \theta_2) = \frac{k_1 - k_2}{d}, \quad \operatorname{tang}(\theta_1 - \theta_2) = \operatorname{tang}\delta,$$
$$z_1 : z_2 = \sin 2\theta_1 : \sin 2\theta_2$$

oder, da $z_1 - z_2 = d$,

$$z_1 + z_2 = d\,\frac{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{k_1 - k_2}{\operatorname{tang}\delta}.$$

Zu beachten ist, daß diese Werte außer von den Achsen der Dynamen nur von der Differenz der Parameter k_1, k_2 abhängen. Haben aber die Koordinatenwerte der beiden Dynamen die angegebene reduzierte Form, so entstehen auch durch Addition dieser Koordinaten für die Koordinaten der resultierenden Dyname Ausdrücke von der gleichen Form:

$$R\cos\theta,\ R\sin\theta,\ 0,\quad \alpha R\cos\theta,\ \beta R\sin\theta,\ 0.$$

Dabei ist zunächst

$$R\cos\theta = R_1\cos\theta_1 + R_2\cos\theta_2,$$
$$R\sin\theta = R_1\sin\theta_1 + R_2\sin\theta_2,$$

d. h. es schließen sich die Resultanten R_1, R_2, $-R$ zu einem Dreieck, dessen Seiten mit der x-Achse der Reihe nach die Winkel θ_1, θ_2, θ bilden, dessen Außenwinkel also $\theta-\theta_2$, $\theta_1-\theta$, $\theta_2-\theta_1$ sind.

Die Achse der resultierenden Dyname trifft, wie aus der Form ihrer Koordinaten ersichtlich ist, die z-Achse ebenfalls unter rechtem Winkel. Ist z ihr Abstand von der xy-Ebene, θ der Winkel, unter dem sie die x-Achse kreuzt, ferner kR der Modul des Momentes des zugehörigen Kräftepaares, so wird

$$\alpha R\cos\theta = kR\cos\theta - Rz\sin\theta,$$
$$\beta R\sin\theta = kR\sin\theta + Rz\cos\theta.$$

Daraus folgt

$$z = (\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta,$$

und da für die ersten beiden Koordinaten x, y eines Punktes der Achse

$$x : y = \cos\theta : \sin\theta$$

sein muß, ergibt sich

$$z(x^2+y^2) = (\beta-\alpha)xy.$$

Da aber auch

$$z_1 = (\beta-\alpha)\sin\theta_1\cos\theta_1 \quad \text{und} \quad z_2 = (\beta-\alpha)\sin\theta_2\cos\theta_2$$

wird, liegen auf dem durch die vorstehende Gleichung dargestellten Zylindroid die Achsen der drei Dynamen, und greifen wir nun zurück auf die früher besprochene Erzeugung des Zylindroids, so ergibt sich, daß auf dem Kreise, der hierzu benutzt wurde, die drei den drei Dynamenachsen entsprechenden Punkte ein Dreieck bestimmen müssen, das dem durch die drei Resultanten gebildeten Dreieck ähnlich ist, denn die Winkel dieses Dreiecks oder ihre Supplemente sind die Winkel, unter denen die Achsen der drei Dynamen sich kreuzen. Die Lote, die man aus jenen drei Kreispunkten auf die z-Achse fällt, sind aber gleich den Werten k_1, k_2, k. Es ergibt sich also für den

Punkt, in dem die Achsen der resultierenden Dynamen die gemeinsame Normale der anderen beiden Achsen treffen, die folgende Konstruktion: Man errichte in einer Ebene, die durch die gemeinsame Normale geht, in den Treffpunkten der beiden gegebenen Achsen die Lote und mache ihre Länge gleich den zugehörigen Parametern k_1, k_2. Über der Verbindungsstrecke ihrer Endpunkte K_1, K_2 zeichne man dann ein Dreieck, das dem Dreieck der Resultanten ähnlich ist, so daß die Seite $K_1 K_2$ der Resultante R entspricht. Fällt man dann aus der dritten Ecke dieses Dreiecks das Lot auf die gemeinsame Normale, so ist sein Fußpunkt der gesuchte Punkt.

7. Aufgabe. *Unter dem Virial eines Kräftesystems, dessen Kräfte durch die Vektoren $\boldsymbol{F}_i$ mit den festen Angriffspunkten P_i dargestellt werden, versteht man den für einen bestimmten Bezugspunkt P gebildeten Ausdruck*

$$V = \sum \boldsymbol{F}_i \times (P_i - P).$$

Dieses Virial zu untersuchen.

Auflösung. Geht man von dem Virial für einen festen Punkt O

$$V_0 = \sum \boldsymbol{F}_i \times (P_i - O)$$

aus und setzt $\sum \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{R}$, so ergibt sich

$$V = V_0 + \boldsymbol{R} \times (P - O).$$

Erhält also das Virial denselben Wert für zwei Punkte P und P', so muß

$$V_0 + \boldsymbol{R} \times (P - O) = V_0 + \boldsymbol{R} \times (P' - O)$$

werden, mithin

$$\boldsymbol{R} \times (P - P') = 0;$$

wenn $\boldsymbol{R} \neq 0$ ist, liegen sonach P und P' in einer zu der Richtung der Resultanten normalen Ebene. Die Punkte, für die das Virial gleiche Werte annimmt, erfüllen also eine Schar paralleler Ebenen. Unter ihnen ist eine, π_0, für deren Punkte das Virial verschwindet. Ist p der Abstand einer der anderen Ebenen von π_0, so wird für die Punkte dieser Ebene $V = R \cdot p$, wenn R die Größe der Resultante bedeutet.

Ist $R = 0$, verschwindet also die resultierende Kraft des Kräftesystems, so wird

$$V = V_0,$$

das Virial ist also konstant für alle Punkte des Raumes.

In kartesischen Koordinaten wird das Virial durch den Ausdruck

$$V = \sum [X_i(x_i - x_0) + Y_i(y_i - y_0) + Z_i(z_i - z_0)]$$

dargestellt, in dem x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Bezugspunktes P sind.

Vgl. Lagrange, Mécanique analytique, 1. Partie, Sect. III, § V, Nr. 21 ff.; Schweins, Journal für Mathem., Bd. 38, S. 77 (1848); Bd. 47, S. 238 (1853). Moebius, Lehrbuch der Statik, 1837, Werke Bd. 3.

8. Aufgabe. *Den Ausdruck des Virials für ein System von Zentralkräften zu finden.*

Auflösung. Unter einem System von Zentralkräften verstehen wir ein System von paarweise entgegengesetzt gleichen Kräften, die in die Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte fallen und deren Größe eine Funktion des Abstandes dieser Angriffspunkte ist. Sind $P_1, P_2, \ldots P_n$ die vorhandenen Angriffspunkte und setzen wir $\operatorname{mod}(P_i - P_k) = r_{ik}$, so wird demnach ein Paar von Zentralkräften durch folgende Vektoren gegeben

$$F_{ik} = f_{ik}(r_{ik})\frac{P_k - P_i}{r_{ik}}, \qquad F_{ki} = f_{ik}(r_{ik})\frac{P_i - P_k}{r_{ik}}.$$

Es wird dann in der Tat $F_{ki} = -F_{ik}$. An jedem der n Punkte P_i greifen $n-1$ Kräfte an, die nach den übrigen Punkten hin gerichtet sind.

Bilden wir nun das Virial, so können wir die Kräfte sofort zu Paaren zusammenfassen und finden

$$V = \sum_{ik}[F_{ik} \times (P_i - P) + F_{ki} \times (P_k - P)],$$

wobei die Summe über alle Verbindungsstrecken ik auszudehnen ist. Wir erhalten dann weiter

$$V = \sum_{ik}\frac{f_{ik}(r_{ik})}{r_{ik}}[(P_k - P_i) \times (P_i - P) + (P_i - P_k) \times (P_k - P)]$$
$$= -\sum_{ik}\frac{f_{ik}(r_{ik})}{r_{ik}}(P_k - P_i)^2$$

oder

$$V = -\sum_{ik} r_{ik} f_{ik}(r_{ik}).$$

Auf diesem Satz beruht die häufigste Verwendung des Virials.

Vgl. R. Clausius, Annalen der Physik, Bd. 141, S. 124 (1870); Jubelband 1874, S. 411; Villarceau, Comptes Rendus, t. 75, p. 232, 377 (1872).

9. Aufgabe. *Es sei ein ebenes Kräftesystem gegeben. Man soll dieses durch eine Resultante oder, wenn das System keine Resultante zuläßt, durch ein Kräftepaar derart ersetzen, daß die Äquivalenz erhalten bleibt, wenn man alle Kräfte in ihrer Ebene irgend einer gemeinsamen Drehung um ihre Angriffspunkte unterwirft.*

Auflösung. Wir bezeichnen mit X_i, Y_i die Komponenten der Kräfte des Systems nach zwei rechtwinkligen Koordinatenachsen in

der Ebene, mit x_i, y_i die Koordinaten der verschiedenen Angriffspunkte, X, Y seien die Komponenten der gesuchten Resultante und ihr Angriffspunkt habe die Koordinaten x, y. Drehen wir nun alle Kräfte in der Ebene um ihre Angriffspunkte und sei ω der Drehungswinkel, so werden die Komponenten der Systemkräfte nach der Drehung

$$X_i' = X_i \cos\omega + Y_i \sin\omega, \quad Y_i' = -X_i \sin\omega + Y_i \cos\omega,$$

und die neuen Komponenten der Resultante

$$X' = X\cos\omega + Y\sin\omega, \quad Y' = -X\sin\omega + Y\cos\omega.$$

Soll aber die Resultante in der verlangten Weise dem vorgelegten Kräftesystem äquivalent sein, so muß

$$\sum X_i' = X', \quad \sum Y_i' = Y', \quad \sum (Y_i' x_i - X_i' y_i) = Y'x - X'y$$

sein, unabhängig von dem Drehungswinkel ω.

Die beiden ersten Gleichungen ergeben aber einfach

$$\sum X_i = X, \quad \sum Y_i = Y,$$

die Größe und Richtung der Resultante wird also auf die gewöhnliche Weise gefunden, indem man die Kräfte wie Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkte nach den Regeln der Vektoraddition vereinigt.

Die letzte Gleichung dagegen liefert, wenn wir die Faktoren von $\sin\omega$ und $\cos\omega$ einzeln einander gleich setzen,

$$\sum (X_i x_i + Y_i y_i) = Xx + Yy,$$
$$\sum (Y_i x_i - X_i y_i) = Yx - Xy.$$

Dies sind zwei lineare Gleichungen für die Koordinaten x, y des Angriffspunktes der Resultanten, die eine und nur eine Lösung zulassen, solange

$$X^2 + Y^2 \neq 0$$

ist, d. h. sich eine nicht verschwindende Resultante ergibt. Der gefundene Angriffspunkt ist durchaus analog dem Mittelpunkt paralleler Kräfte und heißt der Moebiussche Mittelpunkt des ebenen Kräftesystems.

In dem Ausnahmefall, wo $X^2 + Y^2 = 0$ ist, also die Resultante verschwindet und $\sum X_i = 0$, $\sum Y_i = 0$, mithin auch $\sum X_i' = 0$, $\sum Y_i' = 0$ wird, ist das Kräftepaar nicht mehr einer Einzelkraft, sondern nur einem Kräftepaar äquivalent. Seien X', Y' die Komponenten der einen Kraft dieses Paares nach der Drehung, x, y die Koordinaten ihres Angriffspunktes, x', y' die Koordinaten des An-

griffspunktes der anderen Kraft. Für die Äquivalenz ist dann allein erforderlich, daß

$$\sum (Y_i' x_i - X_i' y_i) = Y'(x - x') - X'(y - y')$$

wird, oder

$$\sum (X_i x_i + Y_i y_i) = X(x - x') + Y(y - y'),$$
$$\sum (Y_i x_i - X_i y_i) = Y(x - x') - X(y - y').$$

In diesen Gleichungen sehen wir jetzt, indem wir die Angriffspunkte der Kräfte des Paares, also den Arm des Kräftepaares, beliebig geben, X und Y als die Unbekannten an. Die Gleichungen liefern dann immer ein einziges Lösungssystem, da notwendig

$$(x - x')^2 + (y - y') \neq 0$$

ist, solange die beiden Angriffspunkte nicht zusammenfallen.

Insbesondere findet man den Mittelpunkt zweier Kräfte auf Grund des Satzes von Moebius: Die Angriffspunkte A, B zweier in einer Ebene wirkenden, nicht parallelen Kräfte P, Q und der Schnittpunkt S der Verbindungslinien ihrer Wirkungslinien liegen mit dem Mittelpunkt C der beiden Kräfte auf einem Kreise; die Bögen $\widehat{CA} = \alpha$ und $\widehat{CB} = \beta$ und die Größe R der Resultante werden dabei, wenn r der Radius des Kreises ist, durch die Proportion bestimmt

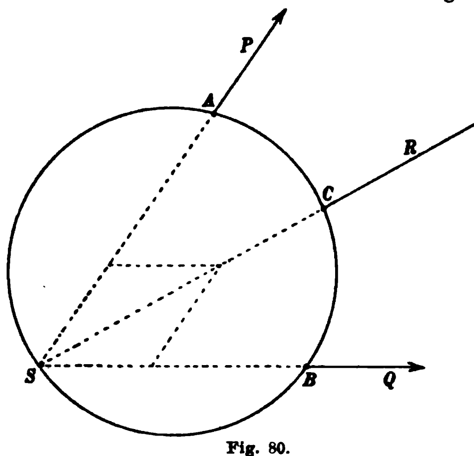


Fig. 80.

$$\sin\frac{\alpha}{2r} : \sin\frac{\beta}{2r} : \sin\frac{\alpha + \beta}{2r} = Q : P : R.$$

Der zweite Teil des Satzes ist eine einfache Umformung des Parallelogrammgesetzes, der erste ergibt sich daraus, daß, wenn man durch A, B, C unter gleichen Winkeln ω gegen die Strecken AS, BS, CS gerade Linien zieht, diese sich in einem Punkte S' des Kreises schneiden und dabei bei S' dieselben Winkel $\frac{\alpha}{2r}$, $\frac{\beta}{2r}$ entstehen wie bei S.

Es ist sofort zu sehen, daß die Moebiussche Regel im Grenzfalle paralleler Kräfte in das Archimedische Hebelgesetz übergeht.

10. Aufgabe. *Ersetzt man alle Kräfte eines vorgelegten Systems durch ihre Komponenten nach einer bestimmten Richtung ϱ, so kann man den Mittelpunkt dieser parallelen Kräfte bestimmen. Man soll nun zeigen, daß dieser Mittelpunkt sich in einer bestimmten Ebene bewegt, wenn man die Richtung ϱ beliebig verändert.*

Auflösung. Es seien X_i, Y_i, Z_i die Komponenten der Kräfte des Systems, x_i, y_i, z_i die Koordinaten ihrer Angriffspunkte. Führen wir dann die „astatischen Koordinaten" des Kräftesystems ein

$$\begin{aligned}
A_1 &= \sum X_i; \quad A_{11} = \sum x_i X_i, \quad A_{12} = \sum x_i Y_i, \quad A_{13} = \sum x_i Z_i,\\
A_2 &= \sum Y_i; \quad A_{21} = \sum y_i X_i, \quad A_{22} = \sum y_i Y_i, \quad A_{23} = \sum y_i Z_i,\\
A_3 &= \sum Z_i; \quad A_{31} = \sum z_i X_i, \quad A_{32} = \sum z_i Y_i, \quad A_{33} = \sum z_i Z_i,
\end{aligned}$$

und nennen α, β, γ die Richtungskosinus von ϱ, so wird die Komponente der i^{ten} Systemkraft

$$\alpha X_i + \beta Y_i + \gamma Z_i,$$

und daraus ergeben sich für die Koordinaten des Mittelpunktes der parallelen Komponenten die Werte

$$\begin{aligned}
R\xi &= \alpha A_{11} + \beta A_{12} + \gamma A_{13},\\
R\eta &= \alpha A_{21} + \beta A_{22} + \gamma A_{23},\\
R\zeta &= \alpha A_{31} + \beta A_{32} + \gamma A_{33},\\
R &= \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3.
\end{aligned}$$

Durch Elimination von α, β, γ folgt

$$\begin{vmatrix}
\xi & A_{11} & A_{12} & A_{13}\\
\eta & A_{21} & A_{22} & A_{23}\\
\zeta & A_{31} & A_{32} & A_{33}\\
1 & A_1 & A_2 & A_3
\end{vmatrix} = 0$$

und dies ist die Gleichung der gesuchten Ebene, welche die Zentralebene des Kräftesystems heißt. Vgl. Minding, Journal für Mathematik, Bd. 15, S. 27 (1836); Moebius, ebenda, Bd. 16, S. 1 (1837), Werke, Bd. 3, S. 216, 523.

11. Aufgabe. *Man sagt von einem Kräftesystem, es sei in astatischem Gleichgewichte, wenn das Gleichgewicht bei einer beliebigen gemeinsamen Drehung aller Kräfte um ihre Angriffspunkte erhalten bleibt. Die Bedingungen des astatischen Gleichgewichts aufzusuchen.*

Auflösung. Die Komponenten X_i, Y_i, Z_i einer Kraft des Systems gehen bei der gemeinsamen Drehung aller Kräfte über in die Werte

$$X_i' = \alpha_1 X_i + \beta_1 Y_i + \gamma_1 Z_i, \quad Y_i' = \alpha_2 X_i + \beta_2 Y_i + \gamma_2 Z_i,$$
$$Z_i' = \alpha_3 X_i + \beta_3 Y_i + \gamma_3 Z_i,$$

wenn die α, β, γ die Richtungskosinus dreier zueinander normaler Richtungen bedeuten. Für das Gleichgewicht ergeben sich zunächst die Bedingungen

$$\sum X_i', \ \sum Y_i', \ \sum Z_i' = 0 \quad \text{oder} \quad \sum X_i, \ \sum Y_i, \ \sum Z_i = 0,$$

d. h. $A_1, A_2, A_3 = 0$. Weiter muß auch

$$\sum(\alpha_3 X_i + \beta_3 Y_i + \gamma_3 Z_i) y_i = \sum(\alpha_2 X_i + \beta_2 Y_i + \gamma_2 Z_i) z_i,$$
$$\sum(\alpha_1 X_i + \beta_1 Y_i + \gamma_1 Z_i) z_i = \sum(\alpha_3 X_i + \beta_3 Y_i + \gamma_3 Z_i) x_i,$$
$$\sum(\alpha_2 X_i + \beta_2 Y_i + \gamma_2 Z_i) x_i = \sum(\alpha_1 X_i + \beta_1 Y_i + \gamma_1 Z_i) y_i$$

werden für jedes Tripel zueinander normaler Richtungen. Dies wird erreicht, indem man

$$\sum X_i x_i = 0, \quad \sum X_i y_i = 0, \quad \sum X_i z_i = 0, \quad \sum Y_i x_i = 0 \quad \text{usw.}$$

macht, d. h. alle die Größen $A_{ik} = 0$ annimmt.

Daß diese Bedingungen auch notwendig sind, läßt sich ebenfalls leicht einsehen. Zunächst fordert schon das Gleichgewicht für die ursprüngliche Lage

$$A_{23} = A_{32}, \quad A_{31} = A_{13}, \quad A_{12} = A_{21}.$$

Wählt man ferner die drei zueinander normalen Richtungen so, daß zwei der xy-Ebene parallel sind und die dritte die der z-Achse ist, so werden die Bedingungsgleichungen von der Form

$$(1-\cos\omega)A_{23} = -\sin\omega A_{13}, \ \sin\omega A_{23} = (1-\cos\omega)A_{13}, \ \cos\omega(A_{22}+A_{33}) = 0,$$

wobei ω beliebig bleibt. Daraus folgt $A_{13} = 0$, $A_{23} = 0$, ebenso ergibt sich auch $A_{12} = 0$ und schließlich $A_{11} = 0$, $A_{22} = 0$, $A_{33} = 0$.

12. Aufgabe. *Astatisch äquivalent nennt man zwei Kräftesysteme, wenn die Äquivalenz bei einer beliebigen gemeinsamen Drehung aller Kräfte der beiden Kräftesysteme um ihre Angriffspunkte erhalten bleibt, wenn also das dem einen entgegengesetzte Kräftesystem das andere in astatisches Gleichgewicht setzt. Ein vorgelegtes Kräftesystem ist auf dreifach unendlich viele Arten drei zueinander senkrechten Einzelkräften astatisch äquivalent, deren Angriffspunkte jedesmal der Zentralebene angehören. Man soll zeigen, daß, wenn man in diesen Angriffspunkten Massen anbringt, die den Quadraten der in ihnen angreifenden Kräfte proportional sind, der Schwerpunkt dieser drei Massen jedesmal in einen bestimmten Punkt der Zentralebene, den Mindingschen Zentralpunkt, fällt.*

Auflösung. Nimmt man von jeder Kraft des Systems die Komponenten nach irgend drei zueinander senkrechten Richtungen, die von Kraft zu Kraft nicht wechseln, und vereinigt die gleichgerichteten Komponenten jedesmal zu einer ihnen astatisch äquivalenten Resultante, so erhält man drei Kräfte, die das vorgelegte System ersetzen und nach der 10. Aufgabe in drei Punkten der Zentralebene angreifen. Läßt man diese Kräfte in die Richtungen der Koordinatenachsen fallen, so werden ihre Intensitäten A_1, A_2, A_3, und die Koordinaten ihrer Angriffspunkte erhalten die Werte

$$x_1 = \frac{A_{11}}{A_1}, \quad y_1 = \frac{A_{21}}{A_1}, \quad z_1 = \frac{A_{31}}{A_1},$$

$$x_2 = \frac{A_{12}}{A_2}, \quad y_2 = \frac{A_{22}}{A_2}, \quad z_2 = \frac{A_{32}}{A_2},$$

$$x_3 = \frac{A_{13}}{A_3}, \quad y_3 = \frac{A_{23}}{A_3}, \quad z_3 = \frac{A_{33}}{A_3}.$$

Der in der angegebenen Weise bestimmte Schwerpunkt hat dann die Koordinaten

$$x_0 = \frac{A_1^2 x_1 + A_2^2 x_2 + A_3^2 x_3}{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} = \frac{A_1 A_{11} + A_2 A_{12} + A_3 A_{13}}{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2},$$

$$y_0 = \frac{A_1^2 y_1 + A_2^2 y_2 + A_3^2 y_3}{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} = \frac{A_1 A_{21} + A_2 A_{22} + A_3 A_{23}}{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2},$$

$$z_0 = \frac{A_1^2 z_1 + A_2^2 z_2 + A_3^2 z_3}{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} = \frac{A_1 A_{31} + A_2 A_{32} + A_3 A_{33}}{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}.$$

Diese Ausdrücke bekommt man aus den Formeln der 10. Aufgabe, indem man

$$\alpha = \frac{A_1}{R}, \quad \beta = \frac{A_2}{R}, \quad \gamma = \frac{A_3}{R}, \quad R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

macht, also die Komponenten nach der Richtung der Resultante des vorgelegten Kräftesystems nimmt und von ihnen den Mittelpunkt bestimmt. Dieser Mittelpunkt ist aber unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems, also ist auch der Schwerpunkt der drei Massenpunkte, die in der angegebenen Weise aus den astatischen Komponenten nach drei zu einander senkrechten Richtungen folgt, unabhängig von der Wahl dieser Richtungen, auf welche die Koordinaten bezogen werden, und damit ist der in der Aufgabe formulierte Satz bewiesen. Vgl. Minding, Journal für Mathematik, Bd. 14, S. 289 (1835); Padelletti, Rendiconto della R. Accademia di Napoli, vol. 22, p. 29 (1883).

13. Aufgabe. *Zu zeigen, daß ein beliebiges Kräftesystem astatisch äquivalent ist einer resultierenden Einzelkraft in Verbindung mit*

drei Kräftepaaren, deren Arme die Länge 1 *haben und drei durch den Angriffspunkt O der Einzelkraft gehenden, zueinander rechtwinkligen Achsen angehören.*

Auflösung. Wir wählen für die drei Achsen die Koordinatenachsen und nennen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Komponenten der einen Kraft eines Paares, dessen Angriffspunkte auf der x-Achse in den Abständen x und x' vom Koordinatenursprung O liegen. Dann werden die astatischen Koordinaten dieses Paares

$$\begin{array}{llll} 0; & \mathfrak{X}(x-x'), & \mathfrak{Y}(x-x'), & \mathfrak{Z}(x-x'), \\ 0; & 0, & 0, & 0, \\ 0; & 0, & 0, & 0. \end{array}$$

Macht man also $x - x' = 1$, so wird

$$\mathfrak{X} = A_{11}, \quad \mathfrak{Y} = A_{12}, \quad \mathfrak{Z} = A_{13}$$

und führt zwei analoge Kräftepaare an der y- und z-Achse ein, außerdem eine Einzelkraft mit den Komponenten A_1, A_2, A_3, die am Koordinatenursprung O angreift, so sind die astatischen Koordinaten des so gewonnenen Kräftesystems denen des vorgelegten Kräftesystems gleich, und dann sind, wie man leicht sieht, die beiden Systeme immer astatisch äquivalent.

Betrachtet man nun das Ellipsoid

$$(A_{11}x + A_{21}y + A_{31}z)^2 + (A_{12}x + \cdots)^2 + (A_{13}x + \cdots)^2 = 1,$$

und denkt sich die Koordinatenachsen in die Hauptachsen dieses Ellipsoids gelegt, so muß

$$A_{11}A_{21} + A_{12}A_{22} + A_{13}A_{23} = 0 \quad \text{usw.}$$

werden, d. h. die Kräfte der Kräftepaare, welche die Komponenten (A_{11}, A_{12}, A_{13}), (A_{21}, A_{22}, A_{23}), (A_{31}, A_{32}, A_{33}) haben, stehen aufeinander senkrecht.

Es lassen sich also diese Kräfte einer solchen gemeinsamen Drehung unterwerfen, daß sie in die Koordinatenachsen selbst fallen. Dann aber verschwinden alle statischen Koordinaten der drei Kräftepaare und das Kräftesystem ist in dieser Lage der im Koordinatenursprung angreifenden Einzelkraft statisch äquivalent. Ist jedoch eine solche Lage gefunden, so ergeben sich drei andere, indem man eine Umwendung um jede Koordinatenachse ausführt. Es gibt also im allgemeinen vier Lagen, bei denen die Kräfte des Systems eine durch einen bestimmten Punkt O gehende Resultante liefern. Vgl., auch für das folgende, Darboux, Mémoire sur l'équilibre astatique [Mémoires de Bordeaux (2) t. 2 (1877)]. Da Silva, Mem. Acad. de Lisboa (2) t. 3 (1851).

14. Aufgabe. *Zu zeigen, daß man durch passende Wahl des Koordinatensystems und Drehung der Kräfte alle astatischen Koordinaten bis auf A_{11}, A_{22}, A_3 zum Verschwinden bringen kann.*

Auflösung. Wir legen zunächst die xy-Ebene des Koordinatensystems in die Zentralebene, dann wird nach der 10. Aufgabe $\zeta = 0$, wie auch α, β, γ gewählt werden mögen, also wird

$$A_{31} = 0, \quad A_{32} = 0, \quad A_{33} = 0.$$

Drehen wir die Kräfte ferner so, daß die Resultante der z-Achse parallel wird, so wird auch

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0.$$

Legen wir dann den Koordinatenursprung in den Zentralpunkt, machen also $x_0, y_0, z_0 = 0$, so wird nach den Formeln der vorigen Aufgabe

$$A_{13} = 0, \quad A_{23} = 0.$$

Lösen wir von dem Kräftesystem die in dem Zentralpunkt angreifende und zur Zentralebene senkrechte Resultante ab, so hat der Rest jetzt die astatischen Koordinaten

$$\begin{matrix} 0; & A_{11}, & A_{12}, & 0; \\ 0; & A_{21}, & A_{22}, & 0; \\ 0; & 0, & 0, & 0; \end{matrix}$$

er bedeutet also ein in der Zentralebene wirkendes Kräftesystem mit verschwindender Resultante, das bei allen Bewegungen in der Zentralebene einem Kräftepaar astatisch äquivalent ist. Drehen wir die Kräfte in der Ebene so, daß die Kräfte des Paares in die Richtung des Armes fallen, so ist Gleichgewicht vorhanden, und es wird

$$A_{12} = A_{21}.$$

Dies ist also stets durch eine Drehung des räumlichen Kräftesystems um eine zur Zentralebene senkrechte Achse zu erreichen.

Drehen wir nun auch noch das Koordinatensystem um die z-Achse durch den Winkel α, so wird A_{12} nach der Drehung

$$A'_{12} = \sum (x_i \cos\alpha + y_i \sin\alpha)(-X_i \sin\alpha + Y_i \cos\alpha)$$
$$= A_{12}\cos\alpha^2 - A_{21}\sin\alpha^2 - (A_{11} - A_{22})\cos\alpha\sin\alpha$$

oder, da $A_{12} = A_{21}$ war,

$$A'_{12} = A_{12}\cos 2\alpha - \tfrac{1}{2}(A_{11} - A_{22})\sin 2\alpha,$$

und dies wird gleich Null, wenn

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}}.$$

Wir können also, indem wir voraussetzen, daß das Koordinatensystem schon zu Anfang die betrachtete besondere Lage hat, mithin $\alpha = 0$ wird, von vornherein auch noch

$$A_{12} = A_{21} = 0$$

annehmen.

15. Aufgabe. *Unter dem Vektormoment eines Kräftesystems für eine beliebige Ebene π verstehen wir den Vektor $\sum p_i F_i$, wenn der Vektor F_i die i^{te} Systemkraft der Größe und Richtung nach darstellt und p_i der Abstand ihres Angriffspunktes von der Ebene π ist. Der Modul dieses Vektormomentes ist das skalare Moment des Kräftesystems für die Ebene π. Man soll zeigen, daß die Ebenen gleichen skalaren Momentes die Flächen einer Schar von konfokalen Flächen zweiter Ordnung umhüllen.*

Auflösung. Ist die Gleichung der Ebene π

$$ux + vy + wz - q = 0,$$

so wird

$$\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \cdot p_i = ux_i + vy_i + wz_i - q$$

und somit ergeben sich für die Komponenten Ξ, H, Z des Vektormomentes die Gleichungen

$$\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \cdot \Xi = A_{11} u + A_{21} v + A_{31} w - A_1 q,$$
$$\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \cdot H = A_{12} u + A_{22} v + A_{32} w - A_2 q,$$
$$\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \cdot Z = A_{13} u + A_{23} v + A_{33} w - A_3 q$$

und für das Quadrat des Skalarmomentes

$$\mathfrak{M}^2 = \Xi^2 + H^2 + Z^2$$

finden wir

$$(u^2 + v^2 + w^2)\mathfrak{M}^2 = (A_{11} u + A_{21} v + A_{31} w - A_1 q)^2$$
$$+ (A_{12} u + A_{22} v + A_{32} w - A_2 q)^2 + (A_{13} u + A_{23} v + A_{33} w - A_3 q)^2.$$

Lassen wir $\mathfrak{M}$ konstant, so ist dies die Gleichung einer quadratischen Fläche.

Setzen wir nun die in der vorigen Aufgabe besprochene Reduktion der astatischen Koordinaten als ausgeführt voraus, so können wir

$$A_{11} = P, \quad A_{22} = Q, \quad A_3 = R$$

und alle anderen Koordinaten $= 0$ annehmen. Dann wird die Flächengleichung einfach

$$(\mathfrak{M}^2 - P^2) u^2 + (\mathfrak{M}^2 - Q^2) v^2 + \mathfrak{M}^2 w^2 = R^2 q^2$$

oder in Punktkoordinaten

$$\frac{x^2}{\mathfrak{M}^2 - P^2} + \frac{y^2}{\mathfrak{M}^2 - Q^2} + \frac{z^2}{\mathfrak{M}^2} = \frac{1}{R^2}.$$

Dies aber ist, wenn wir $\mathfrak{M}$ als einen variablen Parameter deuten, die Gleichung einer Schar von konfokalen Flächen zweiter Ordnung.

16. Aufgabe. *Zu zeigen, daß drei Punkte der Zentralebene, in denen drei zueinander senkrechte und dem vorgelegten Kräftesystem zusammen astatisch äquivalente Kräfte angreifen, in der Zentralebene ein Polardreieck eines bestimmten Polarsystems bilden.*

Auflösung. Wir nehmen das Koordinatensystem so an, daß seine Achsen mit den Hauptachsen der Momentenflächen zusammenfallen. Vergleichen wir dann die vereinfachte Gleichungsform der Momentenflächen mit der ursprünglichen, so zeigt sich, daß bei dieser Wahl des Koordinatensystems

$$A_{31}^2 + A_{32}^2 + A_{33}^2 = 0, \quad \text{also} \quad A_{31} = 0,\ A_{32} = 0,\ A_{33} = 0$$

wird und ferner

$$\begin{aligned} A_{11}A_1 + A_{12}A_2 + A_{13}A_3 &= 0, \\ A_{21}A_1 + A_{22}A_2 + A_{23}A_3 &= 0, \\ A_{11}A_{21} + A_{12}A_{22} + A_{13}A_{23} &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen zeigen, daß man

$$\begin{aligned} A_{11} &= P\alpha_1, & A_{21} &= Q\alpha_2, & A_{31} &= 0, & A_1 &= R\alpha_3, \\ A_{12} &= P\beta_1, & A_{22} &= Q\beta_2, & A_{32} &= 0, & A_2 &= R\beta_3, \\ A_{13} &= P\gamma_1, & A_{23} &= Q\gamma_2, & A_{33} &= 0, & A_3 &= R\gamma_3 \end{aligned}$$

setzen kann; dabei bedeuten die α, β, γ, da noch

$$A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2 = P^2, \quad A_{21}^2 + A_{22}^2 + A_{23}^2 = Q^2,$$
$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = R^2$$

wird, die Richtungskosinus dreier Richtungen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$, die infolge der vorhergehenden Beziehungen zueinander normal sind.

Wir bilden nun für zwei andere zueinander normale Richtungen ϱ, ϱ' die Komponenten der Kräfte des Systems und für diese Komponenten jedesmal die Koordinaten ihres Mittelpunktes. Die Koordinaten dieser Mittelpunkte werden aber nach den für sie in der 10. Aufgabe gegebenen Ausdrücken

$$\xi = \frac{P}{R}\frac{\cos(\varrho\varrho_1)}{\cos(\varrho\varrho_3)}, \quad \eta = \frac{Q}{R}\frac{\cos(\varrho\varrho_2)}{\cos(\varrho\varrho_3)}, \quad \zeta = 0,$$

$$\xi' = \frac{P}{R}\frac{\cos(\varrho'\varrho_1)}{\cos(\varrho'\varrho_3)}, \quad \eta' = \frac{Q}{R}\frac{\cos(\varrho'\varrho_2)}{\cos(\varrho'\varrho_3)}, \quad \zeta' = 0.$$

Hieraus ist auch zu sehen, daß die xy-Ebene hier die Zentralebene ist. Aus den vorstehenden Gleichungen folgt

$$\frac{\xi\xi'}{P^2}+\frac{\eta\eta'}{Q^2}+\frac{1}{R^2}=\frac{\cos(\varrho\varrho_1)\cos(\varrho'\varrho_1)+\cos(\varrho\varrho_2)\cos(\varrho'\varrho_2)+\cos(\varrho\varrho_3)\cos(\varrho'\varrho_3)}{R^2\cos(\varrho\varrho_3)\cos(\varrho'\varrho_3)}.$$

Der Zähler des Bruches auf der rechten Seite wird aber gleich 0, wenn die Richtungen ϱ und ϱ' zueinander normal sind. Man sieht also, daß die beiden Mittelpunkte (ξ, η) und (ξ', η') in der Zentralebene einander konjugiert sind bezüglich des imaginären Kegelschnittes

$$\frac{x^2}{P^2}+\frac{y^2}{Q^2}+\frac{1}{R^2}=0.$$

Sind mithin die Mittelpunkte für drei zueinander normale Richtungen gefunden, so sind sie paarweise konjugiert bezüglich dieses Kegelschnittes, d. h. sie bilden ein Polardreieck von ihm.

Den Kegelschnitt bekommen wir aber aus der Gleichung der konfokalen Flächen, wenn wir darin $\mathfrak{M} = 0$ setzen, und damit die Gleichung dann erfüllbar bleibt, vorher $z = 0$ machen. Dieser imaginäre Kegelschnitt gehört also als eine ausgeartete Fläche der konfokalen Flächenschar an. Ist

$$u'x + v'y - q' = 0$$

die Gleichung einer Tangente oder

$$u'x + v'y + w'z - q' = 0$$

(bei beliebig bleibendem w') die Gleichung einer berührenden Ebene des Kegelschnittes, so erhalten wir die Tangentialgleichung des Kegelschnittes in der Form

$$P^2u'^2 + Q^2v'^2 + R^2q'^2 = 0.$$

Diese Gleichung erfüllen die (bis auf eine, die Zentralebene, imaginären) Ebenen, für die das skalare Moment des Kräftesystems gleich Null ist. Von diesen Ebenen also wird die gefundene imaginäre Kurve umhüllt.

17. Aufgabe. *Die Bedingung dafür zu suchen, daß ein Kräftesystem zwei Einzelkräften astatisch äquivalent ist, d. h. ihnen äquivalent bleibt, wenn man alle Kräfte einer gemeinsamen Drehung um ihre Angriffspunkte unterwirft.*

Auflösung. Wenn zwei Kräftesysteme astatisch äquivalent sind, so müssen die astatischen Koordinaten A_1, A_2, A_3, A_{12} usw. der beiden astatisch äquivalenten Systeme dieselben sein. Es ist also, um unsere Aufgabe zu erledigen, nur nötig, die astatischen Koordinaten des aus nur zwei Kräften bestehenden Systems und die Besonderheiten, die sie zeigen, zu betrachten.

Wir lassen die beiden Kräfte in zwei Punkten der x-Achse angreifen, dann werden die astatischen Koordinaten dieses besonderen Systems von der Form

$$\begin{array}{llll} X_1 + X_2; & X_1 x_1 + X_2 x_2, & Y_1 x_1 + Y_2 x_2, & Z_1 x_1 + Z_2 x_2, \\ Y_1 + Y_2; & 0, & 0, & 0, \\ Z_1 + Z_2; & 0, & 0, & 0. \end{array}$$

Wir können weiter den Koordinatenursprung noch so wählen, daß auch die Bedingung

$$(X_1 + X_2)(X_1 x_1 + X_2 x_2) + (Y_1 + Y_2)(Y_1 x_1 + Y_2 x_2) \\ + (Z_1 + Z_2)(Z_1 x_1 + Z_2 x_2) = 0$$

erfüllt ist.

Wir bestimmen nun die früher behandelten Momentenflächen. Für diese ergibt sich dann sofort die Gleichung

$$P^2 u^2 + R^2 q^2 = \mathfrak{M}^2 (u^2 + v^2 + w^2),$$

wenn wir

$$P^2 = (X_1 x_1 + X_2 x_2)^2 + (Y_1 x_1 + Y_2 x_2)^2 + (Z_1 x_1 + Z_2 x_2)^2,$$
$$R^2 = (X_1 + X_2)^2 + (Y_1 + Y_2)^2 + (Z_1 + Z_2)^2$$

setzen. Die Gleichung derselben Flächen in Punktkoordinaten lautet

$$\frac{x^2}{\mathfrak{M}^2 - P^2} + \frac{y^2 + z^2}{\mathfrak{M}^2} = \frac{1}{R^2}.$$

Diese Flächen werden also Rotationsflächen und ergeben sich für $Q = 0$. Dieses ist sonach die gesuchte Bedingung.

Die Rotationsachse der Momentenfläche enthält die Angriffspunkte der beiden resultierenden Einzelkräfte, und zwar sieht man leicht, daß man den Abstand ihrer Angriffspunkte noch beliebig wählen kann, dadurch aber sind sie selbst vollkommen bestimmt.

Wählt man insbesondere $x_1 = -x_2$, also die Angriffspunkte in gleichem Abstande von dem Mittelpunkte der Momentenflächen, dann wird auch

$$X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2,$$

d. h. die Kräfte sind gleich groß, und weiter ergibt sich

$$x_1 = -x_2 = \frac{P}{R},$$

d. h. aber, der Abstand der beiden Angriffspunkte von dem Mittelpunkte ist gleich dem Radius des Brennkreises

$$x = 0, \quad y^2 + z^2 = \frac{P^2}{R^2}$$

der konfokalen Rotationsflächen, d. h. des Kreises, auf dem die Brennpunkte der Meridianschnitte der Rotationsflächen liegen.

18. Aufgabe. *Man sagt nach Moebius, ein Kräftesystem, das im Gleichgewicht ist, besitze eine Achse des Gleichgewichtes, wenn bei einer beliebigen Drehung des Körpers, an dem die Kräfte angreifen, um eine bestimmte Achse das Gleichgewicht erhalten wird, vorausgesetzt, daß hierbei die Kräfte selbst der Größe und Richtung nach ungeändert bleiben. Man soll die Bedingungen aufstellen dafür, daß eine solche Achse existiert.*

Auflösung. Es ist zunächst klar, daß es sich nur um die Festlegung der Achsenrichtung handelt, denn ist eine Achse des Gleichgewichts gefunden, so ist auch jede parallele Achse eine Achse des Gleichgewichts, weil eine Drehung um diese neue Achse sich aus einer Drehung um die alte Achse und einer Parallelverschiebung, bei der natürlich das Gleichgewicht erhalten bleibt, zusammensetzen läßt. Da nun anfänglich Gleichgewicht vorhanden ist, bestehen außer den Gleichungen

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0$$

die Beziehungen

$$A_{23} = A_{32}, \quad A_{31} = A_{13}, \quad A_{12} = A_{21}.$$

Weiter sollen aber auch die Gleichungen

$$\sum (y_i' Z_i - z_i' Y_i) = 0 \quad \text{usw.}$$

erfüllt sein, wenn x_i', y_i', z_i' die Koordinaten des Angriffspunktes der i^{ten} Kraft nach der Drehung sind. Diese Koordinaten sind von der Form

$$x_i' = a_1 x_i + b_1 y_i + c_1 z_i,$$
$$y_i' = a_2 x_i + b_2 y_i + c_2 z_i,$$
$$z_i' = a_3 x_i + b_3 y_i + c_3 z_i,$$

wo die Koeffizienten a, b, c nach den in Kap. IV S. 95 gegebenen Formeln durch die Parameter $\varkappa$, λ, μ, ν auszudrücken sind. Führen wir die vorstehenden Werte ein, so ergeben sich die Gleichungen

$$a_2 A_{13} + (b_2 - c_3) A_{23} + c_2 A_{33} - a_3 A_{12} - b_3 A_{22} = 0 \quad \text{usw.}$$

In die angeschriebene Gleichung setzen wir nun die erwähnten Werte der Koeffizienten ein und finden, wenn wir

$$\left.\begin{aligned} A &= -(A_{22} + A_{33})\lambda + A_{12}\mu + A_{13}\nu, \\ B &= \quad A_{21}\lambda - (A_{33} + A_{11})\mu + A_{23}\nu, \\ C &= \quad A_{31}\lambda + A_{32}\mu - (A_{11} + A_{22})\nu \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

setzen und sofort die zwei analogen Gleichungen hinzufügen,

$$\left.\begin{aligned} \varkappa A + \nu B - \mu C = 0, \\ -\nu A + \varkappa B + \lambda C = 0, \\ \mu A - \lambda B + \varkappa C = 0. \end{aligned}\right\} \quad \text{(b)}$$

Die Determinante dieser Gleichungen wird einfach

$$= \varkappa(\varkappa^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) = \varkappa = \cos\frac{\omega}{2},$$

wenn ω den Rotationswinkel bezeichnet.

Sollen demnach die Gleichungen für ein von 0 verschiedenes $\varkappa$, also ein von π verschiedenes ω erfüllt sein, so müssen die drei Größen A, B, C verschwinden und die Gleichungen (b) sind erfüllt für jeden Wert von $\varkappa$, also ein beliebiges ω. Es bestehen dann die drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} -(A_{22} + A_{33})\lambda + A_{12}\mu + A_{13}\nu = 0, \\ A_{21}\lambda - (A_{33} + A_{11})\mu + A_{23}\nu = 0, \\ A_{31}\lambda + A_{32}\mu - (A_{11} + A_{22})\nu = 0, \end{aligned}\right\} \quad \text{(c)}$$

aus denen durch Elimination von λ, μ, ν folgt

$$\begin{vmatrix} -(A_{22} + A_{33}) & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & -(A_{33} + A_{11}) & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & -(A_{11} + A_{22}) \end{vmatrix} = 0. \quad \text{(d)}$$

Dies ist die gesuchte Bedingung. Ist sie erfüllt, so ergeben die vorhergehenden Gleichungen eine bestimmte Lösung für die Verhältnisse von λ, μ, ν, und die Bedeutung dieser Größen ist die, daß die Koordinaten x, y, z eines Punktes der Achse des Gleichgewichts, die durch den Ursprung geht, der Proportion genügen

$$x : y : z = \lambda : \mu : \nu.$$

Nehmen wir $\omega = \pi$, so wird $\varkappa = 0$, und die drei Gleichungen (b) liefern eine Lösung

$$A = K\lambda, \quad B = K\mu, \quad C = K\nu.$$

Es ergeben sich also durch Einsetzen dieser Werte in (a) für $\varrho = A_{11} + A_{22} + A_{33} + K$ die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} (A_{11} - \varrho)\lambda + A_{12}\mu + A_{13}\nu = 0, \\ A_{21}\lambda + (A_{22} - \varrho)\mu + A_{23}\nu = 0, \\ A_{31}\lambda + A_{32}\mu + (A_{33} - \varrho)\nu = 0, \end{aligned}$$

aus denen die Gleichung dritten Grades

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\varrho & A_{21} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22}-\varrho & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}-\varrho \end{vmatrix} = 0$$

folgt. Die so gefundene kubische Gleichung hat immer reelle Wurzeln, da $A_{ik} = A_{ki}$ ist. Die zugehörigen Werte von $\lambda : \mu : \nu$ entsprechen den Hauptachsen der Fläche

$$A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{23}yz + 2A_{31}zx + 2A_{12}xy = 1.$$

Es gibt also im allgemeinen, von Parallelverschiebungen abgesehen, außer der ursprünglichen Gleichgewichtslage noch drei, in die der Körper durch je eine halbe Umdrehung um drei zueinander senkrechte Achsen übergeht (vgl. Aufgabe 13 am Ende).

S. Moebius, Lehrbuch der Statik I, Kap. 8 (Werke, Bd. 3).

19. Aufgabe. *Die Stabilität des Gleichgewichtes eines Systems von Kräften am starren Körper zu untersuchen.*

Auflösung. Zunächst können wir die Gleichgewichtsbedingungen selbst folgendermaßen formulieren. Wir erteilen dem Körper eine sehr kleine Bewegung und nehmen an, daß dabei die Kräfte ihre Größe und Richtung nicht ändern. Die Komponenten der Verschiebung, die ein beliebiger Punkt so erleidet, lassen sich in der Form geben:

$$\delta x = \varepsilon(u - ry + qz), \quad \delta y = \varepsilon(v - pz + rx), \quad \delta z = \varepsilon(w - qx + py),$$

wobei ε eine sehr kleine Größe bedeutet. Nehmen wir nun für x, y, z die Koordinaten x_i, y_i, z_i der Angriffspunkte, multiplizieren die entstehenden Werte δx_i, δy_i, δz_i der Reihe nach mit den Kraftkomponenten X_i, Y_i, Z_i und addieren über alle Kräfte des Systems, so erhalten wir

$$\sum(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) =$$
$$\varepsilon[A_1u + A_2v + A_3w + (A_{23} - A_{32})p + (A_{31} - A_{13})q + (A_{12} - A_{21})r].$$

Besteht Gleichgewicht, so wird $A_1, A_2, A_3 = 0$, $A_{23} = A_{32}$, $A_{31} = A_{13}$, $A_{12} = A_{21}$, und es ergibt sich, daß

$$\sum(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) = 0$$

wird für alle möglichen Verschiebungen des Körpers (vgl. darüber auch das nächste Kapitel, insbesondere § 6). Die letzte Gleichung läßt sich aber auch schreiben

$$\delta V = 0,$$

wenn wir das Virial $V = \sum(X_ix_i + Y_iy_i + Z_iz_i)$ einführen und, wie gesagt, die Kräfte als konstant ansehen.

Lassen wir nun in dem Ausdrucke für δV die x_i, y_i, z_i sich noch einmal um δx_i, δy_i, δz_i vermehren, so bleiben die Koeffizienten von u, v, w ungeändert und die Koeffizienten von p, q, r vermehren sich um

$$\begin{aligned}\varepsilon^2\mathfrak{A} &= \varepsilon^2[-(A_{22}+A_{33})p + A_{12}q + A_{13}r],\\ \varepsilon^2\mathfrak{B} &= \varepsilon^2[A_{21}p - (A_{33}+A_{11})q + A_{23}r],\\ \varepsilon^2\mathfrak{C} &= \varepsilon^2[A_{31}p + A_{32}q - (A_{11}+A_{22})r].\end{aligned}$$

Daraus folgt für die Zunahme von δV

$$\delta^2 V = \varepsilon^2 S,$$

wenn wir setzen

$$\begin{aligned}S &= \mathfrak{A}p + \mathfrak{B}q + \mathfrak{C}r\\ &= -(A_{22}+A_{33})p^2 - (A_{33}+A_{11})q^2 - (A_{11}+A_{22})r^2\\ &\qquad + 2A_{23}qr + 2A_{31}rp + 2A_{12}pq.\end{aligned}$$

Haben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ dieselben Vorzeichen wie bzw. p, q, r, so wird $S > 0$ und damit auch $\delta^2 V > 0$. Es gilt aber auch das umgekehrte. Dies ist leicht zu sehen. Denn ist $S > 0$ für alle Werte von p, q, r, so stellt die Gleichung $S = 1$, indem wir p, q, r als Punktkoordinaten deuten, ein Ellipsoid dar, und $\mathfrak{A}p' + \mathfrak{B}q' + \mathfrak{C}r' = 1$ wird die Gleichung einer Tangentialebene, also werden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die reziproken Werte der Achsenabschnitte dieser Tangentialebene. Wir erkennen aber sofort, daß diese Achsenabschnitte dasselbe Vorzeichen erhalten wie die entsprechenden Koordinaten p, q, r des Berührungspunktes. Es ergibt sich also in diesem Falle, daß die ursprünglich verschwindenden Momente des Kräftesystems für die Koordinatenachsen infolge der Bewegung bestimmte Werte annehmen, die stets dem Sinne nach mit der Drehungskomponente für die betreffende Achse übereinstimmen. Ist dagegen $S < 0$ für alle Werte von p, q, r, so sind die entstehenden Momente den Drehungskomponenten stets entgegengesetzt. In diesem letzteren Falle nennt man das Gleichgewicht des Körpers stabil. Es ist also die ausreichende und notwendige Bedingung für die Stabilität des Gleichgewichtes, daß S eine definite negative Form von p, q, r ist.

20. Aufgabe. *Ein Punkt P ist Kräften unterworfen, die nach festen Punkten P_i hin gerichtet sind und den Abständen PP_i proportional sind. Man soll die Gleichgewichtslage des Punktes P bestimmen.*

Auflösung. Man bezeichne die wirkenden Kräfte mit $k_i(P_i - P)$, indem man den Proportionalitätsfaktor k_i nennt. Dann erfordert das Gleichgewicht:

$$\sum k_i(P_i - P) = 0.$$

Nimmt man einen festen Punkt O beliebig an, so folgt daraus

$$\sum k_i \cdot (P - O) = \sum k_i (P_i - O).$$

Der Punkt P ist also der Mittelpunkt paralleler Kräfte, die in den Punkten P_i angreifen und die Größe k_i haben.

21. Aufgabe. *Man beweise, daß für den Schwerpunkt S eines Systems von Massen m_i, die in den Punkten P_i angebracht sind, die Gleichung besteht*

$$\sum_i m_i (P_i - S)^2 = \frac{1}{M} \sum_{ik} m_i m_k (P_i - P_k)^2,$$

wenn $M = \sum m_i$ gesetzt wird.

Auflösung. Wir gehen aus von der Definitionsgleichung des Schwerpunktes

$$M \cdot (P - S) = \sum_k m_k (P - P_k),$$

die für jeden Punkt P des Raumes erfüllt ist, und nehmen für P insbesondere einen Punkt P_i des Massensystems selbst. Die so entstehende Gleichung

$$M \cdot (P_i - S) = \sum_k m_k (P_i - P_k)$$

multiplizieren wir skalar mit $m_i (P_i - S)$ und summieren nach i, d. h. über alle Punkte des Massensystems. Dann erhalten wir, wenn wir auf der rechten Seite sofort die beiden Glieder, die den Faktor $m_i m_k$ enthalten, zusammenfassen,

$$\begin{aligned} M \cdot \sum_i m_i (P_i - S)^2 & \\ &= \sum_{ik} m_i m_k [(P_i - P_k) \times (P_i - S) + (P_k - P_i) \times (P_k - S)] \\ &= \sum_{ik} m_i m_k (P_i - P_k)^2, \end{aligned}$$

das aber ist die zu beweisende Gleichung.

22. Aufgabe. *Als das quadratische Moment $\mathfrak{P}$ eines Systems von Massenpunkten P_i mit den Massen m_i für einen Punkt P bezeichnet man den Ausdruck $\sum m_i (P_i - P)^2$. Man soll zeigen, daß dieses Moment für den Schwerpunkt S der Massenpunkte seinen kleinsten Wert annimmt.*

Auflösung. Man findet sofort

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \sum m_i (P_i - P)^2 \\ &= \sum m_i (P_i - S)^2 + 2 \sum m_i (P_i - S) \times (S - P) + \sum m_i \cdot (P - S)^2. \end{aligned}$$

Der Mittelpunkt der parallelen Kräfte ist aber durch die Gleichung definiert

$$\sum m_i (P_i - S) = 0.$$

Also ergibt sich für $M = \sum m_i$

$$\mathfrak{P} = \sum m_i (P_i - S)^2 + M \cdot (P - S)^2.$$

Hierin ist

$$\sum m_i (P_i - S)^2 = \mathfrak{P}_0$$

das Moment für den Schwerpunkt und dies ist, da ein wesentlich positives Glied noch hinzutritt, stets $< \mathfrak{P}$, also ein Minimum. Sein Wert ist in der vorigen Aufgabe ausgerechnet. Die Gleichung

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 + M \cdot (P - S)^2$$

zeigt, wie sich aus dem Moment für den Schwerpunkt und der Gesamtmasse M das quadratische Moment für jeden Punkt P finden läßt.

Vgl. Lagrange, Mémoires de l'Académie de Berlin, Année 1783 (1785), p. 290. Oeuv. compl. t. 5, p. 5C5.

23. Aufgabe. *Man soll angeben, was aus dem skalaren Momente eines Kräftesystems für eine Ebene wird, wenn die Kräfte des Systems alle gleichgerichtet sind.*

Auflösung. Wir können die Kräfte eines solchen Systems alle durch Vektoren von der Form $m_i g$, indem g einen konstanten Einheitsvektor bedeutet, darstellen. Nennen wir dann p_i die Abstände der Angriffspunkte von der Bezugsebene π, so wird das Vektormoment gleich $\sum m_i p_i g$. Der Faktor von g in diesem Ausdruck heißt das statische Moment des Kräftesystems (oder Massensystems) für die Ebene π und ist das skalare Moment für diesen besonderen Fall. Ist die Ebene durch einen Punkt P in ihr und den Einheitsvektor n in ihrer Normalen festgelegt, so wird das statische Moment

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} = \sum m_i p_i = \sum m_i (P_i - P) \times n \\ = M(S - P) \times n = Mp,\end{aligned}$$

wenn $M = \sum m_i$ ist, S den Schwerpunkt bezeichnet und dieser von der Ebene π den Abstand p hat. Die Flächen, die von den Ebenen gleichen Momentes $\mathfrak{M}$ umhüllt werden, sind hier konzentrische Kugeln mit dem Radius $\mathfrak{M} : M$, deren gemeinsamer Mittelpunkt der Schwerpunkt ist.

24. Aufgabe. *Die Guldinsche Regel zu beweisen.*

Auflösung. Die Guldinsche Regel lautet: Rotiert eine Fläche oder eine Linie um eine Achse, so ist das Volumen oder die Oberfläche des erzeugten Umdrehungsgebildes gleich dem Produkt aus dem

Inhalte der Fläche oder der Länge der Linie und dem Weg des Schwerpunktes.

Wir nehmen, um sie zu beweisen, an, daß die Kurve mit der Rotationsachse x zusammen gleichzeitig die rotierende Fläche begrenze. Das Flächenelement wird von der Form $dx\,dy$, und die Ordinate η des Schwerpunktes der Fläche bestimmt sich aus der Gleichung

$$\eta \iint dx\,dy = \iint y\,dx\,dy$$

oder mit 2π multipliziert, wenn wir auf der rechten Seite die Integration nach y ausführen,

$$2\pi\eta \cdot F = \int \pi y^2\,dx,$$

wobei F den Inhalt der rotierenden Fläche bedeutet. Es ist aber sofort zu sehen, daß das Integral auf der rechten Seite das Volumen des Rotationskörpers liefert.

Ist weiter ds das Linienelement der rotierenden Kurve, so ergibt sich für die Ordinate η_0 des Kurvenschwerpunktes

$$\eta_0 \int ds = \int y\,ds$$

oder, wenn wir wieder mit 2π multiplizieren,

$$2\pi\eta_0 \cdot s = \int 2\pi y\,ds;$$

s ist hierbei die Länge der ganzen Kurve. Das Integral auf der rechten Seite aber liefert die Oberfläche des Rotationskörpers.

25. Aufgabe. *Den Schwerpunkt einer halben Kreisfläche und eines halben Kreisumfanges auf Grund der Guldinschen Regel zu bestimmen.*

Auflösung. Die soeben abgeleiteten Gleichungen werden in diesem Falle

$$2\pi\eta \cdot \tfrac{1}{2}\pi r^2 = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{und} \quad 2\pi\eta_0 \cdot \pi r = 4\pi r^2,$$

somit ergibt sich

$$\eta = \frac{4r}{3\pi}, \quad \eta_0 = \frac{2r}{\pi}$$

für die Abstände der Schwerpunkte von dem den Halbkreis begrenzenden Durchmesser. Sie liegen außerdem natürlich auf dem den Halbkreis halbierenden Radius.

26. Aufgabe. *Den Schwerpunkt eines Ellipsoidoktanten zu finden.*

Auflösung. Der Schwerpunkt habe, auf die Hauptachsen bezogen, die Koordinaten ξ, η, ζ, dann wird z. B., wenn a, b, c die Halbachsen sind,

$$\tfrac{1}{6}\pi abc \cdot \xi = \iiint x\,dx\,dy\,dz,$$

das Integral über den Oktanten ausgedehnt. Wir integrieren zuerst nach y und z und finden als dieses Flächenintegral für die Abszisse x einen Ellipsenquadranten mit den Halbachsen $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ und $\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, also vom Inhalte $\frac{\pi}{4}\frac{bc}{a^2}(a^2-x^2)$. Somit ergibt sich

$$a^3\xi = \tfrac{3}{2}\int_0^a (a^2-x^2)\,x\,dx = \tfrac{3}{4}\left[a^4 - \frac{a^4}{2}\right]$$

oder

$$\xi = \tfrac{3}{8}a.$$

Analog wird

$$\eta = \tfrac{3}{8}b, \quad \zeta = \tfrac{3}{8}c.$$

27. Aufgabe. *Den Schwerpunkt eines geraden Kreiskegels und eines senkrecht zur Achse abgeschnittenen Rotationsparaboloids zu finden.*

Auflösung. Bezeichnen wir mit h die Höhe des Kegels, mit α seinen Achsenwinkel und mit x den Abstand einer zur Achse senkrechten Schnittebene von der Spitze, so wird der Abstand ξ des Schwerpunktes von der Spitze durch die Gleichung gegeben

$$\frac{\pi}{3}h^3\operatorname{tang}\alpha^2\cdot\xi = \int_0^h \pi x^3\operatorname{tang}\alpha^2\,dx = \frac{\pi}{4}h^4\operatorname{tang}\alpha^2,$$

also wird

$$\xi = \tfrac{3}{4}h.$$

Bezeichnen wir ebenso mit h die Höhe des Paraboloids und nehmen die Gleichung seiner Meridiankurve in der Form an

$$y^2 = 2px,$$

so ergibt sich zur Bestimmung des Schwerpunktsabstandes ξ vom Scheitel des Paraboloids, der den Koordinatenursprung bildet, während die Achse des Paraboloids die x-Achse ist,

$$\int_0^h \pi y^2\,dx\cdot\xi = \int_0^h \pi y^2 x\,dx$$

oder, wenn wir durch $2\pi p$ dividieren und für $y^2/2p$ wieder x einsetzen,

$$\int_0^h x\,dx\cdot\xi = \int_0^h x^2\,dx,$$

woraus

$$\xi = \tfrac{2}{3}h.$$

28. Aufgabe. *Zu zeigen, daß der Endpunkt des n^{ten} Teiles der Resultante von n an einem Punkte O angreifenden Kräften durch den Schwerpunkt der mit gleichen Massen m versehenen Endpunkte dieser n Kräfte gebildet wird, wenn man sich alle Kräfte durch Strecken, die vom Punkte O ausgehen, dargestellt denkt.*

Auflösung. Seien die Strecken, welche die n Kräfte darstellen, als Vektoren aufgefaßt $\boldsymbol{F}_i = P_i - O$ und die Resultante $\boldsymbol{R} = P - O$, so wird

$$\boldsymbol{R} = \sum \boldsymbol{F}_i \quad \text{oder} \quad P - O = \sum (P_i - O)$$

und wenn S der Punkt ist, der den n^{ten} Teil der Resultante begrenzt, wird $n(S - O) = (P - O)$, also

$$nm(S - O) = \sum m(P_i - O),$$

d. h. S ist der Schwerpunkt der in den Punkten P_i angebrachten gleichen Massen m.

Zweites Kapitel.

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen.

1. Virtuelle Verschiebungen. Wenn ein Punkt P eines materiellen Systems die unendlich kleine Verschiebung PP' erleiden kann, so sagt man, er erfahre eine virtuelle, d. h. nur als möglich gedachte Verschiebung. Kann dieselbe Verschiebung auch im umgekehrten Sinne stattfinden, so heißt sie umkehrbar, im anderen Fall nicht umkehrbar. Den Inbegriff der Verschiebungen aller Punkte eines starren Systems bezeichnen wir als eine Verschiebung dieses Systems.

Ein freier Punkt kann jede beliebige umkehrbare Verschiebung erleiden; ein Punkt auf der Begrenzungsfläche eines festen, undurchdringlichen Körpers kann umkehrbare Verschiebungen nur innerhalb der Tangentialebene dieser Fläche erleiden und er bleibt bei diesen Verschiebungen, da sie als unendlich klein anzunehmen sind, auf der Fläche. Dagegen kann er in jeder nach außen hin gehenden Richtung eine nicht umkehrbare Verschiebung erfahren und entfernt sich durch diese von der Oberfläche des Körpers.

Das Ende P eines gespannten, biegsamen und unausdehnbaren Fadens, dessen anderes Ende O befestigt ist, kann umkehrbare Verschiebungen innerhalb einer Tangentialebene der mit der Fadenlänge als Radius um O beschriebenen Kugel erleiden. Es sind auch Verschiebungen möglich, welche die Entfernung des Punktes P von O verkleinern, aber diese sind zufolge der Unausdehnbarkeit des Fadens nicht umkehrbar.

Ist ein Punkt gezwungen, im Innern eines Dreikants zu bleiben, dessen Spitze O und dessen Kanten a, b, c seien, so kann er, solange er von der Begrenzung dieses Raumteils fern bleibt, jede beliebige umkehrbare Verschiebung erfahren. Fällt er aber z. B. in die Ebene bc, so sind nur die Verschiebungen umkehrbar, die dieser Ebene angehören, dagegen sind alle die

Verschiebungen nicht umkehrbar, die den Punkt nach dem Innern des Dreikants zu führen. Fällt er auf die Kante a, so sind nur die Verschiebungen längs dieser Kante umkehrbar, und fällt der Punkt schließlich nach O, so ist keine der möglichen Verschiebungen umkehrbar.

Liegt ein starrer Körper in einem Punkte S auf einer festen ebenen Unterlage σ auf, so sind umkehrbar alle die virtuellen Verschiebungen des Körpers, bei denen der Punkt S an seiner Stelle bleibt oder sich in der Ebene σ verschiebt, dagegen sind alle Verschiebungen nicht umkehrbar, die den Punkt S von der Unterlage σ entfernen. Die ersteren Verschiebungen lassen sich erreichen, indem man den Körper um eine in der Ebene σ durch den Punkt S gehende Achse dreht, d. h. auf seiner Unterlage rollt, oder ihn auf der Unterlage gleiten läßt. Hierbei bleibt die Bedingung, daß der Körper auf der Unterlage aufliegen soll, erfüllt, während er bei jeder Bewegung, die eine nicht umkehrbare Verschiebung liefert, sich von der Unterlage entfernt.

Ist ein Punkt O eines starren Körpers fest, so kann dieser Körper nur umkehrbare Verschiebungen erleiden, dabei ist die Verschiebung irgend eines Punktes P zu der Linie OP senkrecht, die Verschiebungen entstehen aus einer virtuellen Drehung des starren Körpers um den Punkt O.

Alle materiellen Systeme, bei denen nicht sämtliche Punkte beliebige Verschiebungen erfahren können, nennen wir unfrei. Wir sehen dann aus den angeführten Beispielen von solchen Systemen, daß bei ihnen entweder ausschließlich umkehrbare oder teils umkehrbare, teils nicht umkehrbare Verschiebungen möglich sind. In allen Fällen aber ergibt sich:

Die umkehrbaren virtuellen Verschiebungen sind stets mit den Bedingungen des Systems vereinbar, d. h. nach ihrer Ausführung sind die Bedingungen des Systems immer noch erfüllt, die nicht umkehrbaren Verschiebungen dagegen zerstören eine vorher bestehende Lagenbeziehung, die als eine Bedingung des Systems bezeichnet werden kann.

Demnach lassen sich die Bedingungen des Systems auch direkt als Bedingungen auffassen, die seinen umkehrbaren virtuellen Verschiebungen auferlegt werden.

2. Holonome und anholonome Systeme. Eine wirkliche Einsicht in die Bedeutung der virtuellen Verschiebungen wird erst erschlossen, wenn man auf die analytische Darstellung der Systembedingungen eingeht. Um diese zu finden, bezeichnen wir mit δP_i die als einen Vektor aufgefaßte Verschiebung eines Punktes P_i und mit δx_i, δy_i, δz_i die Komponenten dieses Vektors nach drei zueinander rechtwinkligen Achsen. Die Bedingungen des Systems bedeuten dann allgemein, daß von den Verschiebungskomponenten aller Punkte des Systems nur gewisse voneinander unabhängig sind und durch diese alle übrigen bestimmt werden. Damit eine mathematische Behandlung überhaupt möglich wird, müssen wir annehmen, daß diese Bestimmung in analytischer Form geschieht.

Es ist aber auch der Fall von besonderer Wichtigkeit, wo von vornherein die Lage des materiellen Systems durch gewisse Parameter festgelegt wird, indem die Koordinaten aller Punkte des Systems Funktionen von diesen Parametern werden.

Ist die Anzahl der Parameter kleiner als die Gesamtzahl der Koordinaten aller Punkte des Systems, so werden durch die angegebene Darstellung dieser Koordinaten bereits gewisse Lagenbeziehungen der einzelnen Systempunkte, also gewisse Bedingungen des Systems ausgedrückt, die von Anfang an als erfüllt anzusehen sind. Man kann die Parameter aus den Gleichungen eliminieren, welche die Koordinaten der Systempunkte in Funktion der Parameter liefern, und erhält dann eine Reihe von Gleichungen zwischen den Koordinaten selbst, die auch als Ausdruck der vorhandenen Lagenbeziehungen betrachtet werden können.

Außer diesen Lagenbeziehungen sind aber weiter diejenigen Bedingungen hinzuzunehmen, die durch die Gleichungen zwischen den Verschiebungskomponenten der einzelnen Systempunkte ausgedrückt werden, diese führen auch zu Gleichungen zwischen den zu möglichen Verschiebungen des Systems gehörenden Variationen

der das System festlegenden Parameter und diesen Parametern selbst. Wir machen zunächst von den Lagenparametern noch keinen Gebrauch und nehmen an, daß alle Beziehungen direkt in den kartesischen Koordinaten der Systempunkte ausgedrückt sind. Wir vereinfachen dabei die Untersuchung ganz bedeutend, indem wir von Anfang an nur solche Bedingungen in Betracht ziehen, die durch homogene lineare Gleichungen zwischen den Verschiebungskomponenten ausgedrückt werden, die also in folgender analytischer Form gegeben werden:

$$\sum(A_i \delta x_i + B_i \delta y_i + C_i \delta z_i) = 0, \tag{1}$$

wobei die Summe über alle Punkte des Systems zu erstrecken ist.

Da die Gleichung (1) erfüllt bleibt, wenn wir die Vorzeichen aller δx_i, δy_i, δz_i umkehren, ergibt sich, daß in der Tat alle Verschiebungen, die dieser Gleichung genügen, umkehrbar sind. Wollten wir auch nicht umkehrbare Verschiebungen in Betracht ziehen, so müßten wir die Gleichung (1) ersetzen durch eine Bedingung von folgender Form:

$$\sum(A_i \delta x_i + B_i \delta y_i + C_i \delta z_i) \geqq 0. \tag{2}$$

Das Zeichen $>$ würde dann den nicht umkehrbaren, das Zeichen $=$ den umkehrbaren Verschiebungen entsprechen. Es hebt sich also auch hier wieder eine Gleichung von der Form (1) heraus, die insbesondere für die umkehrbaren Verschiebungen gilt.

Nun ist sofort zu sehen, daß auch die vorher besprochenen Lagenbeziehungen zu einer Gleichung von der Form (1) führen. Diese Lagenbeziehungen müssen nämlich die Form haben

$$\mathfrak{L}((x_i, y_i, z_i)) = 0, \tag{3}$$

wenn durch die doppelte Klammer ausgedrückt wird, daß $\mathfrak{L}$ eine Funktion der Koordinaten x_i, y_i, z_i aller Punkte des materiellen Systems bedeutet. Lassen wir diese Punkte jetzt solche virtuelle Verschiebungen erleiden, welche die Bedingungen des Systems unverletzt lassen, so finden wir, daß auch die Gleichung gilt

$$\mathfrak{L}((x_i + \delta x_i,\ y_i + \delta y_i,\ z_i + \delta z_i)) = 0.$$

Da δx_i, δy_i, δz_i unendlich klein sind, ergibt sich, wenn, wie wir voraussetzen wollen, nicht alle Derivierten von $\mathfrak{L}$ verschwinden, durch Subtraktion der vorhergehenden Gleichung von der vorstehenden

$$\sum \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0,$$

wobei die Summe über alle Punkte des Systems zu erstrecken ist.

Diese Gleichung ist in der Tat von der Form (1). Aber es ist nicht umgekehrt jede Gleichung von der Form (1) in eine Gleichung von der Form (3) überzuführen, d. h. es ist nicht jede der betrachteten Bewegungsbedingungen als eine Lagenbeziehung des Systems anzusehen. Der Fall, wo dies eintritt, ist nur ein besonders bemerkenswerter Spezialfall; es heißt ein System, dessen sämtliche Bedingungen sich auf Lagenbeziehungen seiner Punkte reduzieren, nach Hertz (Die Prinzipien der Mechanik, Ges. Werke Bd. III, S. 91 (1894)) ein holonomes System. Dagegen werden wir, wenn die Bedingungen sich nicht alle in endlicher Form geben lassen, von einem anholonomen System reden.

Den endlichen Gleichungen (3) läßt sich die allgemeine Bedingungsform an die Seite stellen

$$\mathfrak{L}((x_i, y_i, z_i)) \geqq 0. \tag{4}$$

Es zeigt sich aber, daß diese Bedingung nur dann eine Einschränkung der virtuellen Verschiebungen ergibt, wenn die linke Seite ihre untere Grenze 0 erreicht hat. Dann aber folgt aus den Beziehungen $\mathfrak{L}((x_i, y_i, z_i)) = 0$, daß

$$\mathfrak{L}((x_i + \delta x_i,\ y_i + \delta y_i,\ z_i + \delta z_i)) \geqq 0$$

wird, und demnach ergibt sich weiter

$$\sum \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z_i}\delta z_i\right) \geqq 0,$$

also eine Bedingung von der Form (2).

Wenn z. B. ein Punkt (x, y, z) durch einen biegsamen Faden von der unveränderlichen Länge l an einen festen Punkt O, der mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt, gebunden ist, so gilt die Bedingung

$$l^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \geqq 0.$$

Eine Einschränkung der momentanen Bewegungsfreiheit tritt nur dann ein, wenn der Faden gerade gespannt ist, also

$$l^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

und die sich ergebende Bedingung für die Verschiebungskomponenten lautet

$$-(x\delta x + y\delta y + z\delta z) \geqq 0,$$

d. h. der Punkt P kann sich von dem Punkte O nicht weiter entfernen. Soll aber der Faden gespannt bleiben, so muß

$$x\delta x + y\delta y + z\delta z = 0$$

sein.

Wir wollen auch ein einfaches Beispiel für ein anholonomes System geben und wählen dafür eine Kugel vom Radius a, die gezwungen ist, auf einer festen Ebene ohne Gleitung zu rollen. Das bedeutet, daß sie in jedem Augenblicke die Ebene in einem Punkte A berührt und sich um eine in der Ebene durch A hindurchgehende Achse dreht, so daß die Geschwindigkeit des Punktes A selbst verschwindet. Wir fixieren die Lage der Kugel durch die Koordinaten ξ, η, a des Mittelpunktes, bezogen auf ein Koordinatensystem, dessen x- und y-Achse in die feste Ebene fallen, und durch die Eulerschen Winkel φ, ϑ, ψ, welche die Lage eines von dem Kugelmittelpunkt ausgehenden und gegen die Kugel festen Achsenkreuzes festlegen. Für die Verschiebungskomponenten eines beliebigen Punktes (x, y, z) der Kugel ergeben sich dann Ausdrücke von der Form

$$\delta x = \omega \sin\alpha \cdot z, \quad \delta y = -\omega \cos\alpha \cdot z, \quad \delta z = 0$$

und insbesondere für den Kugelmittelpunkt

$$\delta\xi = a\omega \sin\alpha, \quad \delta\eta = -a\omega \cos\alpha.$$

Es sind aber hier

$$p_1 = \omega \cos\alpha, \quad q_1 = \omega \sin\alpha, \quad r_1 = 0$$

die Komponenten der Drehung für drei im Raume feste Achsen, und führen wir hierfür die Ausdrücke (7) auf S. 164 ein, so ergeben die Gleichungen

$$\delta\xi - aq_1 = 0, \quad \delta\eta + ap_1 = 0, \quad r_1 = 0$$

sofort

$$\delta\xi - a\sin\psi\,\delta\vartheta + a\sin\vartheta\cos\psi\,\delta\psi = 0,$$
$$\delta\eta + a\cos\psi\,\delta\vartheta + a\sin\vartheta\sin\psi\,\delta\psi = 0,$$
$$\delta\psi + \sin\vartheta\,\delta\varphi = 0.$$

Diese drei Gleichungen bestehen zwischen den Variationen der fünf veränderlichen Parameter ξ, η, φ, ϑ, ψ, welche die Lage der Kugel fixieren. Von den drei Gleichungen ist aber, wie man sofort sieht, keine integrierbar, das System ist also anholonom.

3. Virtuelle Arbeit einer Kraft oder eines Kräftesystems. Man nennt virtuelle Arbeit einer Kraft F bei einer virtuellen Verschiebung δP ihres Angriffspunktes P das skalare Produkt $F \times \delta P$ des Kraftvektors F und des Verschiebungsvektors δP. Diese Arbeit ist sonach das Produkt der Maßzahl der Kraft und der Komponente der Verschiebung in der Richtung der Kraft. Jenachdem Kraft und Verschiebung einen spitzen, rechten oder stumpfen Winkel bilden, ist die virtuelle Arbeit positiv, null oder negativ.

Aus dieser Definition ergibt sich sofort, daß, wenn X, Y, Z die Komponenten der Kraft nach drei zueinander senkrechten Richtungen und δx, δy, δz die zugehörigen Verschiebungskomponenten sind, wir für den Ausdruck der virtuellen Arbeit finden:

$$F \times \delta P = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z.$$

Aus der Definition ist weiterhin zu ersehen, daß die Summe der Arbeitsausdrücke für mehrere an einem Punkte angreifende Kräfte bezüglich einer und derselben virtuellen Verschiebung gleich der virtuellen Arbeit der Resultante dieser Kräfte wird.

Wir betrachten jetzt ein irgendwelchen Bedingungen unterworfenes materielles System Σ und bilden für irgend eine virtuelle Verschiebung σ seiner Punkte P_i die Summe der virtuellen Arbeiten einer Reihe von Kräften F_i, die wir uns in den Punkten P_i angreifend denken, diese Summe ist dann das, was wir die virtuelle Arbeit des an dem materiellen System Σ

angreifenden Kräftesystems S bei der virtuellen Verschiebung σ nennen. Wir finden so den Arbeitsausdruck

$$\text{Arb.}\, S = \sum F_i \times \delta P_i = \sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i), \quad (5)$$

wenn X_i, Y_i, Z_i die Kräftekomponenten und δx_i, δy_i, δz_i die Komponenten der Verschiebungen δP_i bezeichnen. Die Summe kann wie ihre einzelnen Glieder positiv, null oder negativ sein.

4. Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Die Begriffe, welche wir entwickelt haben, gestatten, die Bedingungen für das Gleichgewicht eines beliebigen materiellen Systems in einer allgemeinen und äußerst einfachen Form auszusprechen, nämlich wie folgt:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Gleichgewicht eines beliebigen materiellen Systems besteht darin, daß die virtuelle Arbeit der an dem System angreifenden Kräfte für jede mögliche umkehrbare Verschiebung des Systems verschwindet und für jede nicht umkehrbare Verschiebung negativ ausfällt.

Dieser Satz wird als das Prinzip der virtuellen Verschiebungen oder Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten bezeichnet. Durch das Wort Prinzip will man ausdrücken, daß der Satz nicht im eigentlichen Sinne als ein Lehrsatz aufzufassen ist, vielmehr wird durch ihn vom rein theoretischen Standpunkte aus der Begriff des Gleichgewichtes erst festgelegt. Vom praktischen Standpunkte aus erscheint es aber wünschenswert, die sehr abstrakte Formulierung des Satzes mit den Erfahrungstatsachen in Einklang zu bringen, aus denen der Begriff des Gleichgewichtes hervorwächst. Man wird also an einfachen Beispielen, bei denen die Gleichgewichtsbedingungen bereits bekannt sind, zu zeigen haben, wie diese Bedingungen sich aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen ableiten lassen. Ein solcher Nachweis trägt einen wesentlich induktiven Charakter, und es ist jede Begründung des Prinzips im Grunde eine empirische. Selbst wenn man es auf eine Reihe axiomatischer Sätze zurückführt, aus denen es durch

rein logische Prozesse ableitbar ist, sind doch diese axiomatischen Sätze als reine Erfahrungstatsachen aufzufassen, und ob man sie oder das Prinzip selbst als den prägnantesten Ausdruck der aufgenommenen Erfahrungselemente ansehen will, bleibt immer dem Belieben überlassen.

Wir wollen hier die Betrachtung so führen, daß wir beginnen mit der elementaren Behandlung gewisser einfacher Fälle, welche geeignet sind, die Bedeutung des Prinzips klarzulegen.

a) Als erstes Beispiel nehmen wir den Fall eines einzigen Punktes und setzen ihn zunächst als frei beweglich voraus. Ist er dann im Gleichgewicht, so muß die Resultante der auf ihn wirkenden Kräfte verschwinden, und deswegen ist die virtuelle Arbeit für sie und damit auch für das auf den Punkt wirkende Kräftesystem bei einer beliebigen Verrückung null. Umgekehrt, wenn die Arbeit des Kräftesystems bei jeder beliebigen Verrückung des Punktes null ist, so ist auch die Arbeit der Resultante null, also verschwindet die Resultante und der Punkt ist im Gleichgewicht.

Ist der Punkt nicht frei, z. B. seine Bewegung durch die Oberfläche eines festen Körpers gehemmt, so möge $\mathfrak{F}$ die Resultante der wirkenden Kräfte bezeichnen. Die Fläche übt auf den Punkt, wenn er auf ihr liegt, eine gewisse Wirkung aus, die durch eine am Punkt angreifende und nach dem Äußeren des Körpers gerichtete Kraft $\mathfrak{N}$ repräsentiert wird (Postulat der Reaktionskraft); ist $\mathfrak{N}$ außerdem, wie wir es annehmen wollen, normal zu der Oberfläche, so sagen wir, es sei keine Reibung vorhanden oder die Oberfläche vollkommen glatt. Diese Reaktionskraft kann die bestehende Unfreiheit vollkommen ersetzen, und wenn wir sie hinzufügen, dürfen wir den Punkt als frei ansehen. Es ergibt sich also nach dem, was wir zuerst gesagt haben,

$$\text{Arb.}\, \mathfrak{F} + \text{Arb.}\, \mathfrak{N} = 0$$

für jede beliebige Verschiebung des Punktes. Es wird aber zufolge der über die Reaktionskraft gemachten Voraussetzung

$$\text{Arb.}\, \mathfrak{N} \gtreqless 0,$$

jenachdem die Verschiebung umkehrbar ist oder nicht. Also ergibt sich

$$\text{Arb.}\,\mathbf{F} \gtreqless 0,$$

wie es das Prinzip der virtuellen Verschiebungen verlangt. Die Bedeutung dieser Bedingung ist die, daß $\mathbf{F}$ senkrecht zu der Oberfläche und nach dem Innern des Körpers gerichtet ist. Umgekehrt folgt aus der vorstehenden Relation, daß sich an dem Punkte durch eine zur Oberfläche senkrechte und nach außen gerichtete Reaktionskraft absolutes Gleichgewicht herstellen läßt, daß er also auf der Oberfläche des festen Körpers im Gleichgewicht ist.

b) Wir betrachten jetzt ein starres System; dieses bestehe zunächst nur aus zwei Punkten A, B, die durch eine sehr dünne, starre Stange in unveränderlicher Entfernung voneinander gehalten werden.

Um analog vorzugehen wie vorhin, denken wir uns die Stange ersetzt durch zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte $\mathbf{N}$ und $\mathbf{N}'$, die in der Richtung der Stange wirken und von denen die eine in A, die andere in B angreift. Bei einer virtuellen Verschiebung gehe die Stange aus der Lage AB in die Lage $A'B'$ über. Wir projizieren A', B' auf AB in die Punkte $A_1 B_1$, dann haben wir



Fig. 81.

$$AB = A'B' = A_1 B_1,$$

mithin auch $AA_1 = BB_1$.

Außerdem greife in A eine Kraft $\mathbf{F}$, in B eine Kraft $\mathbf{F}'$ an, dann ergibt sich, da nun sowohl A wie B als ein freier Punkt zu behandeln ist,

$$\text{Arb.}\,\mathbf{F} + \text{Arb.}\,\mathbf{N} = 0, \quad \text{Arb.}\,\mathbf{F}' + \text{Arb.}\,\mathbf{N}' = 0.$$

Es ist aber

$$\text{Arb.}\,\mathbf{N} = \text{mod}\,\mathbf{N} \cdot AA_1, \quad \text{Arb.}\,\mathbf{N}' = -\,\text{mod}\,\mathbf{N} \cdot BB_1,$$

mithin ergibt sich durch Addition der beiden Gleichungen

$$\text{Arb.}\,\mathbf{F} + \text{Arb.}\,\mathbf{F}' = 0.$$

Ist umgekehrt diese Bedingung für jede virtuelle Verschiebung erfüllt, so wird, wenn wir den Punkt B festhalten,

$$\text{Arb.}\,\mathbf{F} = 0,$$

also $\mathbf{F}$ senkrecht zu AA', d.h. $\mathbf{F}$ fällt in die Richtung von AB. Das gleiche gilt für $\mathbf{F}'$, und wenn wir den Stab auch noch in seiner Richtung verschieben, so folgt $\mathbf{F} = -\mathbf{F}'$, die zwei Kräfte halten sich also das Gleichgewicht. —

Setzen wir nun das starre System aus drei, vier usw. paarweise starr verbundenen Punkten zusammen, so lassen sich dieselben Überlegungen anwenden. Derart schließen wir, daß, wenn irgend ein starres System im Gleichgewicht ist, die virtuelle Arbeit der wirkenden Kräfte für jede mögliche virtuelle Verschiebung verschwindet.

Der gleiche Schluß bleibt auch bestehen, wenn das System einen oder zwei feste Punkte hat. Sei O ein solcher, dann lassen wir in O eine Kraft $\mathbf{N}$ angreifen, welche die von dem festen Punkte auf das starre System ausgeübte Reaktion darstellt. Nach der Einführung dieser Reaktionskraft kann man das System als frei ansehen. Aber die Arbeit von $\mathbf{N}$ wird null, weil der Punkt O fest bleibt, also ist auch unmittelbar die Arbeit der wirkenden Kräfte gleich null. —

Wir nehmen nun an, der starre Körper sei mit einer festen Wand in Berührung. Ist der Körper gezwungen, auf dieser Wand (ohne Reibung) zu gleiten, so können wir die Wand weglassen, wenn wir in jedem Berührungspunkte des Körpers mit der Wand eine zu dieser senkrechte und nach dem Innern des Körpers zu gerichtete Kraft anbringen. Bei Einführung dieser Kräfte, deren Gesamtheit wir mit $\mathbf{N}$ bezeichnen, bleibt der Körper nach dem Fortnehmen der Wand im Gleichgewichte, wenn er es vorher war. Ist S das System der auf den Körper wirkenden Kräfte, so haben wir für jede beliebige virtuelle Verschiebung des Körpers

$$\text{Arb.}\,S + \text{Arb.}\,\mathbf{N} = 0.$$

Aber für alle umkehrbaren Verschiebungen (Drehungen um eine zu der Fläche der Wand senkrechte Achse oder Gleitungen

parallel zu dieser Wandfläche) wird Arb. $N = 0$, für die nicht umkehrbaren Verschiebungen (Translationen von der Wand weg) wird Arb. $N > 0$, also ist im Falle des Gleichgewichtes

$$\text{Arb.}\, S \lesseqgtr 0,$$

je nachdem es sich um eine umkehrbare oder nicht umkehrbare Verschiebung handelt.

Liegt der Körper nur in einem Punkte A auf der Wand auf, so kann er sich auch um eine beliebige durch A gehende Achse drehen. Hierbei verschwindet aber sicher die Arbeit der in A angreifenden Reaktionskraft N, da der Punkt A selbst an seiner Stelle bleibt.

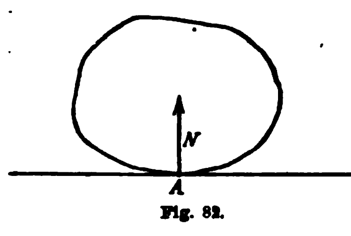


Fig. 82.

Wenn also ein freier oder auf die angegebenen Arten in seiner Bewegungsfreiheit beschränkter starrer Körper im Gleichgewicht ist, so wird die Arbeit der unmittelbar auf ihn wirkenden Kräfte null für die umkehrbaren und negativ für die nicht umkehrbaren virtuellen Verschiebungen.

c) Wir betrachten jetzt das System zweier starrer Körper C und C', die einander berühren. Nehmen wir zunächst an, daß sie sich nur in einem bestimmten Punkte A berühren. Wir können dann in der gewöhnlichen Weise C und C' als frei ansehen, wenn wir in A zwei Reaktionskräfte N und N' einführen, und finden für die freien und einzeln im Gleichgewicht befindlichen Körper C, C' die für jede umkehrbare Verschiebung geltenden Gleichungen

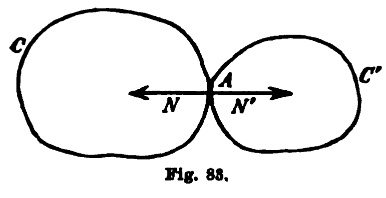


Fig. 83.

$$\text{Arb.}\, S + \text{Arb.}\, N = 0, \quad \text{Arb.}\, S' + \text{Arb.}\, N' = 0,$$

indem S, S' die auf die beiden Körper wirkenden Kräftesysteme bezeichnen. Die beiden Reaktionskräfte N, N' sind aber einander entgegengesetzt gleich anzunehmen, also wird, da die Berührung in A erhalten bleiben soll,

$$\text{Arb.}\, N + \text{Arb.}\, N' = 0$$

und damit

$$\text{Arb.}\, S + \text{Arb}\; S' = 0,$$

während für jede nicht umkehrbare Verschiebung (bei der sich die Körper voneinander entfernen)

$$\text{Arb.}\, S + \text{Arb.}\, S' < 0$$

wird. —

Wir setzen jetzt voraus, daß die Körper aufeinander gleiten können, und nennen V die Geschwindigkeit des zum Körper C gerechneten Punktes A, V' dagegen die Geschwindigkeit des Punktes A' von C', der augenblicklich mit A zusammenfällt. Die Differenz der Vektoren V' und V ist die Gleitgeschwindigkeit; da diese aber in der gemeinsamen Berührungsebene der beiden Körper enthalten sein muß, ergibt sich, daß die Normalkomponenten von V' und V gleich sind. Das Gleiche gilt sonach von den virtuellen Verschiebungen der Punkte A' und A, daraus folgt aber, weil die entgegengesetzt gleichen Reaktionskräfte N, N' senkrecht zu der gemeinsamen Berührungsebene der beiden Körper anzunehmen sind, sofort, daß wieder

$$\text{Arb.}\, N + \text{Arb.}\, N' = 0$$

wird, während für jede nicht umkehrbare Verschiebung, bei der sich der Körper C vom Körper C' entfernt,

$$\text{Arb.}\, N + \text{Arb.}\, N' > 0$$

ist. Mithin ergibt sich in diesen beiden Fällen wie vorhin

$$\text{Arb.}\, S + \text{Arb.}\, S' \overline{\gtrless}\, 0.$$

Nehmen wir an, die beiden Körper seien gezwungen, aufeinander zu rollen ohne zu gleiten, so dürfen wir nicht mehr voraussetzen, daß die Reaktionskräfte N und N' senkrecht zu der gemeinsamen Berührungsebene der beiden Körper sind. (Man kann vom technischen Standpunkte aus an eine hinzutretende, tangentiale Reibungskraft denken, die das Gleiten verhindert.) Dann wird aber die Gleitgeschwindigkeit null, die virtuellen Verschiebungen der beiden Punkte A und A' müssen

dieselben sein, und somit wird hier wieder Arb. N + Arb. $N' = 0$ und folglich ebenfalls wieder

$$\text{Arb.}\, S + \text{Arb.}\, S' = 0$$

für jede umkehrbare Verschiebung.

d) Wenn wir auf dieselbe Weise fortfahren, so gelingt es, zu zeigen, daß für jedes im Gleichgewicht befindliche System, welches sich aus starren Körpern mit oder ohne feste Punkte und Achsen zusammensetzt, wobei die einzelnen Körper sich aufeinander oder auf feste Wände stützen und auf diesen rollen oder gleiten können, die virtuelle Arbeit der auf das System wirkenden Kräfte null bei jeder umkehrbaren und negativ bei jeder nicht umkehrbaren virtuellen Verschiebung wird. —

Die Umkehrung des so gewonnenen Satzes ist aber nur dann einwandfrei zu beweisen, wenn wir wieder auf die mathematische Form der dem System auferlegten Bedingungen eingehen. Hierzu führt ein Weg, der an andere mechanische Vorstellungen als die bisher benutzten anknüpft und zuerst von Lagrange eingeschlagen ist. Wir wollen uns hierbei zunächst auf die umkehrbaren Verschiebungen beschränken.

Der Zweck, die allgemeine Bedingungsgleichung (1), auf die wir nun zurückgreifen, durch eine materielle Verknüpfung zu ersetzen, wird durch eine Flaschenzugkonstruktion erreicht, die in folgendem besteht.

Wir gehen davon aus, daß mit beliebiger Annäherung

$$\sqrt{A_i^2 + B_i^2 + C_i^2} = 2\,\frac{m_i}{m} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

gesetzt werden kann, wenn wir mit $m, m_1, m_2, m_3, \ldots$ ganze Zahlen bezeichnen. Dann läßt sich aber weiter

$$A_i = 2\,\frac{m_i}{m}\cos\alpha_i, \quad B_i = 2\,\frac{m_i}{m}\cos\beta_i, \quad C_i = 2\,\frac{m_i}{m}\cos\gamma_i$$

setzen, indem wir mit $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ die Winkel, die eine bestimmte Richtung ν_i mit den Koordinatenachsen bildet, bezeichnen.

Auf diese Weise geht die Gleichung (1) über in die Form

$$\sum 2 m_i (\cos\alpha_i\,\delta x_i + \cos\beta_i\,\delta y_i + \cos\gamma_i\,\delta z_i) = 0.$$

Die Klammergröße in dieser Gleichung läßt sich geometrisch deuten, wenn wir in der Richtung ν_i vom Punkte P_i aus, um

die beliebige Strecke l_i entfernt, einen als fest betrachteten Punkt Q_i annehmen. Dann können wir

$$\cos \alpha_i \delta x_i + \cos \beta_i \delta y_i + \cos \gamma_i \delta z_i = -\delta l_i$$

setzen, indem δl_i die Veränderung der Entfernung $P_i Q_i$ bei der Verschiebung des Punktes P_i bezeichnet. So wird die transformierte Bedingungsgleichung einfach

$$\sum 2 m_i \delta l_i = 0$$

oder

$$\sum 2 m_i l_i = c, \tag{6}$$

wenn c eine Konstante bedeutet.

Die letzte Gleichung gewinnt nun aber eine einfache Bedeutung. Gehen wir vom Punkte Q_1 aus und legen um ihn und den Punkt P_1 einen Faden m_1-mal herum, führen wir diesen Faden dann zum Punkte Q_2 und legen ihn um diesen Punkt und den Punkt P_2 m_2-mal herum, und fahren wir so fort, bis wir den Faden, nachdem wir ihn um das letzte Punktepaar P_n, Q_n m_n-mal herumgeführt haben, in dem Punkte Q_n befestigen, dann bedeutet die angeschriebene Gleichung, daß bei jeder möglichen Verschiebung der Punkte P_i die Länge des Fadens ungeändert bleiben soll. Sehen wir also den Faden als unausdehnbar an, so bedeutet die ausgeführte Konstruktion eine mechanische Verwirklichung der allgemeinen Bedingungsgleichung. Diese Verwirklichung erscheint als eine direkte Verallgemeinerung des schon besprochenen sehr speziellen Falles, wo das System sich auf einen einzigen Punkt reduziert und dieser an einen festen Punkt durch einen unausdehnbaren Faden gebunden ist.

Gewöhnlich denkt man sich der größeren Anschaulichkeit halber die Punkte P_i, Q_i durch zwei sehr kleine Blöcke von je m_i Scheiben ersetzt, so daß die Punktepaare mit dem herumgeführten Faden sich in wirkliche Flaschenzüge verwandeln. Diese Flaschenzüge gehören zu den einfachen mechanischen Elementen, und auf solche Elemente ist sonach die allgemeinste Bedingungsgleichung zurückgeführt.

Bei einer Belastung des beweglichen Blockes stellt sich in dem Seil eine bestimmte Spannung her, und diese Spannung wird angegeben durch die Kraft S, mit der an dem freien Ende des Seiles gezogen wird. An dem beweglichen Block liefert die Spannung ebensoviel Kräfte von der Größe S als das Seil nach diesem Block hin und von ihm weg läuft, mithin doppelt soviel als der Block Scheiben besitzt. Wir erhalten also hier an dem Punkte P_i eine durch die Seilspannung gelieferte Kraft von der Größe $2m_i S$, die nach dem Punkte Q_i hin gerichtet ist, d. h. die Richtung ν_i hat. Die Komponenten dieser Kraft werden

$$2m_i S\cos\alpha_i,\quad 2m_i S\cos\beta_i,\quad 2m_i S\cos\gamma_i$$

oder

$$\lambda A_i,\quad \lambda B_i,\quad \lambda C_i,$$

wenn wir $S = m\lambda$ setzen. Die dem System auferlegte Bedingung läßt sich also ersetzen durch ein System von Kräften, die an den Punkten des Systems angreifen, und deren Komponenten die vorstehenden Werte haben, wobei der gemeinsame Faktor λ unbestimmt bleibt. Diese Kräfte wollen wir als die Reaktionskräfte des Systems bezeichnen.

Sind weitere Bedingungsgleichungen vorhanden, so treten noch weitere Reaktionskräfte hinzu, deren Komponenten wir wie folgt bezeichnen wollen:

$$\lambda' A_i',\ \lambda' B_i',\ \lambda' C_i';\quad \lambda'' A_i'',\ \lambda'' B_i'',\ \lambda'' C_i'';\ \cdots.$$

Führen wir diese Reaktionskräfte aber ein, so besteht an jedem Punkte des Systems für sich genommen Gleichgewicht, und wir erhalten also die folgenden Gleichungen als die Bedingungen des Gleichgewichts, indem wir mit X_i, Y_i, Z_i die Komponenten der am Punkte P_i wirkenden Kraft bezeichnen:

$$\left.\begin{aligned} X_i + \lambda A_i + \lambda' A_i' + \lambda'' A_i'' + \cdots &= 0,\\ Y_i + \lambda B_i + \lambda' B_i' + \lambda'' B_i'' + \cdots &= 0,\\ Z_i + \lambda C_i + \lambda' C_i' + \lambda'' C_i'' + \cdots &= 0,\end{aligned}\right\}\qquad (7)$$

$$\text{für } i = 1, 2, \ldots n.$$

Wenn wir diese $3n$ Gleichungen der Reihe nach mit den Verschiebungskomponenten $\delta x_1,\ \delta y_1,\ \delta z_1;\ \delta x_2,\ \delta y_2,\ \delta z_2;\ \ldots$

multiplizieren und addieren, so erhalten wir, da zufolge der bestehenden Bedingungen des Systems

$$\sum(A_i\,\delta x_i + B_i\,\delta y_i + C_i\,\delta z_i) = 0,$$
$$\sum(A_i'\delta x_i + B_i'\delta y_i + C_i'\delta z_i) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ist, sofort die Gleichung

$$\sum(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) = 0, \tag{8}$$

welche den analytischen Ausdruck des zu erweisenden Prinzips bildet, da ihre linke Seite in der Tat die Arbeit der wirkenden Kräfte bei der virtuellen Verschiebung des Systems ergibt.

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen ist also eine notwendige Bedingung des durch die vorangehenden Gleichungen ausgedrückten Gleichgewichts, es ist aber leicht zu zeigen, daß es auch die hinreichende Bedingung dieses Gleichgewichts bedeutet. Multiplizieren wir nämlich die Bedingungsgleichungen der Reihe nach mit $\lambda, \lambda', \ldots$ und addieren sie zueinander und zu der vorstehenden Gleichung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen, so erhalten wir

$$\sum[(X_i + \lambda A_i + \lambda' A_i' + \cdots)\,\delta x_i + (Y_i + \lambda B_i + \lambda' B_i' + \cdots)\,\delta y_i$$
$$+ (Z_i + \lambda C_i + \lambda' C_i' + \cdots)\,\delta z_i] = 0.$$

Sei nun die Zahl der Bedingungsgleichungen r, so beachten wir zuerst, daß wir von den $3n$ Verschiebungskomponenten $3n - r - 1$ gleich 0 annehmen und die übrigen immer noch den r Bedingungsgleichungen genügen lassen können. Andererseits können wir aber die Parameter $\lambda, \lambda', \ldots$ so bestimmen, daß von den $3n$ Klammergrößen in der vorstehenden Gleichung r verschwinden. Dies ist nämlich immer möglich, wenn unter den r linearen Bedingungsgleichungen keine durch lineare Kombination aus den übrigen folgt, sie also alle voneinander unabhängig sind. Indem wir dann von den $3n - r$ Verschiebungskomponenten, die in der Gleichung stehen bleiben, alle bis auf irgend eine gleich 0 annehmen — und dies dürfen wir, wie wir gesehen haben —, finden wir, daß auch die eine dann übrig bleibende Klammergröße verschwindet, daß mithin alle

Klammergrößen verschwinden, mit anderen Worten, daß die $3n$ Gleichungen

$$X_i + \lambda A_i + \lambda' A_i' + \cdots = 0,$$
$$Y_i + \lambda B_i + \lambda' B_i' + \cdots = 0,$$
$$Z_i + \lambda C_i + \lambda' C_i' + \cdots = 0$$

erfüllt sein müssen, w. z. b. w.

Bis jetzt haben wir nur die umkehrbaren Verschiebungen berücksichtigt, wir wollen nun auch auf die nicht umkehrbaren eingehen, indem wir darauf fußen, daß bei der Flaschenzugkonstruktion nicht umkehrbar eine solche Verschiebung ist, welche die Länge des Fadens verkürzt, oder was auf dasselbe hinauskommt, bei welcher der Faden sich an einer Stelle zusammenzieht, genau ebenso wie bei einem Punkte, der durch einen unausdehnbaren Faden an einen festen Punkt geknüpft ist, diejenigen Verschiebungen als nicht umkehrbare auftreten, bei denen der Faden sich krümmt. Es gilt daher für diese Verschiebungen die allgemeine Bedingung

$$\sum 2 m_i \delta l_i < 0$$

oder

$$\sum 2 m_i (\cos \alpha_i \delta x_i + \cos \beta_i \delta y_i + \cos \gamma_i \delta z_i) > 0.$$

Beachten wir nun, daß nach den getroffenen Festsetzungen $S > 0$ ist, so erkennen wir, daß wir die vorstehende Ungleichung auch mit S multiplizieren und sie dann schreiben können

$$\sum \lambda (A_i \delta x_i + B_i \delta y_i + C_i \delta z_i) \geqq 0,$$

indem wir den Grenzfall der Gleichheit mit einschließen. Entsprechend wird auch

$$\sum \lambda' (A_i' \delta x_i + B_i' \delta y_i + C_i' \delta z_i) \geqq 0 \quad \text{usw.}$$

sein. Multiplizieren wir nun unter Berücksichtigung dieser Ungleichungen die Gleichungen (7) mit δx_i, δy_i, δz_i und addieren sie, so ergibt sich sofort

$$\sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) \leqq 0. \tag{9}$$

Das Gleichheitszeichen entspricht hierbei den umkehrbaren Verschiebungen, da die so entstehende Gleichung erfüllt bleibt, wenn man die Vorzeichen von δx_i, δy_i, δz_i alle umkehrt. Also

gehört das Zeichen $<$ zu den nicht umkehrbaren Verschiebungen, und es ergibt sich so der zweite Teil der Aussage des Prinzips der virtuellen Verschiebungen.

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen hat eine lange Geschichte, die mit dem griechischen Altertum beginnt (vgl. Vailati, Il principio dei lavori virtuali da Aristotele ad Erone, Atti della R. Accad. di Torino, t. 32 (1897), p. 940). Galilei hat es bei allen einfachen Maschinen konsequent und richtig angewandt. In seiner allgemeinen Form wurde es zuerst von Joh. Bernoulli (1717) ausgesprochen in einem Briefe an Varignon, der diesen Brief in seiner Nouvelle Mécanique, vol. 2, p. 174 mitgeteilt und den Beweis und die Bestätigung des Prinzips in den einfachsten Fällen ausgeführt hat.

Als ein Postulat wurde es von Lagrange in der ersten Auflage seiner Mécanique analytique (1788) zur Grundlage der ganzen Mechanik gemacht. Den Beweis des Prinzips gab dann Fourier in einem Mémoire sur la statique contenant la démonstration du principe des vitesses virtuelles, Journal de l'école polytechnique, cah. 5 (1798), p. 20 (Œuvres t. 2, p. 477). Diesem Beweise sind wir oben gefolgt. In demselben Journalbande steht der Beweis von Lagrange (p. 115), den dieser in die späteren Auflagen der Mécanique analytique aufnahm, und ein Beweis von Prony (p. 191). Seinen ersten Beweis hat Lagrange in seiner Théorie des fonctions, 2. éd., Paris 1813, p. 352 (Œuvres t. 10), durch den vorstehend wiedergegebenen, vollkommeneren ersetzt. Er berücksichtigt aber nur die umkehrbaren Verschiebungen.

Die Fourierschen Ideen wurden wieder aufgegriffen von A. Cournot, Extension du principe des vitesses virtuelles au cas où les conditions de liaison du système sont exprimées par des inégalités, Bulletin de Férussac, t. 8 (1827), p. 165; zu denselben Vorstellungen gelangte auch Gauß im Jahre 1829 (vgl. einen Brief an Moebius vom Jahre 1837, Werke, Bd. 5, S. 27 ff.), Gauß schlug die Bezeichnung *fakultative Verrückungen* vor. Man vgl. dazu auch eine Arbeit von Ostrogradsky vom Jahre 1834, Mémoires de l'Acad. de St. Pétersbourg (6), t. 1 (1838), p. 129.

Unter den Beweisen des Prinzips nennen wir noch die von Poinsot, Journal de l'école polyt., cah. 13, 1806, p. 206, von Ampère, ebenda p. 247, und von C. Neumann, Berichte der sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, Math. Klasse, Bd. 31 (1879), S. 53 und Math. Annalen, Bd. 27 (1886), S. 502. Vgl. dazu Lindt, Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, Abhandl. zur Geschichte der math. Wissensch., Bd. 18 (1904), S. 147; Duhem, Les origines de la statique, vol. I, Paris 1905.

5. Stabilität des Gleichgewichts. In dem Falle, wo die Verschiebungskomponenten sich durch die Variationen bestimmter unabhängiger Parameter $q_1, q_2, \ldots$ ausdrücken, wo also

$$\delta x_i = a_1^{(i)}\delta q_1 + a_2^{(i)}\delta q_2 + \cdots,$$
$$\delta y_i = b_1^{(i)}\delta q_1 + b_2^{(i)}\delta q_2 + \cdots,$$
$$\delta z_i = c_1^{(i)}\delta q_1 + c_2^{(i)}\delta q_2 + \cdots$$

ist, geht die Gleichung (8) über in eine Gleichung von folgender Form

$$Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \cdots = 0.$$

Es ist hierbei

$$Q_k = \sum_i (X_i a_k^{(i)} + Y_i b_k^{(i)} + Z_i c_k^{(i)}).$$

Die Variationen $\delta q_1, \delta q_2, \ldots$ sind aber völlig willkürlich und die gefundene Gleichung löst sich deshalb auf in die folgenden:

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \cdots. \tag{10}$$

Diesen Gleichungen läßt sich eine sehr einfache Deutung geben, wenn eine Funktion U der Variabelen $q_1, q_2, \ldots$ existiert von der Eigenschaft, daß

$$Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k}$$

wird. Eine solche Funktion Q_k heißt eine Kräftefunktion. Dann drücken die Gleichungen (10) aus, daß U ein Extremum ist. Sie lassen sich in der einen Gleichung vereinigen

$$\delta U = 0.$$

Es ist hierbei U als Funktion von $q_1, q_2, \ldots$ anzusehen und das Extremum ist ein absolutes, d. h. es verschwinden alle Derivierten der Funktion U.

Es kann aber auch sein, daß direkt eine skalare Funktion U der Punkte des Systems vorhanden ist derart, daß die am Punkte P_i des Systems angreifende Kraft

$$F_i = \operatorname{grad}_{P_i} U$$

wird, indem der an den Gradient angehängte Index P_i bedeutet, daß bei der Bildung des Gradienten nur der Punkt P_i als variabel anzusehen ist. Eine solche Funktion U bezeichnen wir als ein Potential.

Dann folgt aus der Gleichung $\sum F_i \times \delta P_i = 0$, die das Prinzip der virtuellen Verschiebungen ausdrückt, daß

$$\sum \operatorname{grad}_{P_i} U \times \delta P_i = 0 \quad \text{oder} \quad \sum \delta_{P_i} U = 0$$

wird, es wird also

$$\delta U = 0,$$

wenn die Variation auf die mit den Bedingungen des Systems verträglichen, umkehrbaren Verschiebungen beschränkt bleibt.

Das Extremum der Funktion U, die jetzt als eine Funktion der $3n$ Koordinaten aller Punkte des Systems angesehen werden muß, ist hier nur ein relatives, d. h. es verschwindet die Variation der Funktion nur dann, wenn sie zu einer mit den Bedingungen vereinbaren Verschiebung des Systems gehört.

Ist das Extremum ein Maximum, so bedeutet dies, daß der Arbeitsausdruck in der zweiten Annäherung immer negativ ausfällt. Das heißt: wenn das System aus seiner Gleichgewichtslage sehr wenig entfernt ist und es wird noch weiter von seiner Gleichgewichtslage weggebracht, so ist hierbei die Arbeit der wirkenden Kräfte immer negativ, gleichgültig, in welcher der möglichen Arten die weitere Entfernung aus der Gleichgewichtslage erfolgt. Unter dieser Bedingung heißt das Gleichgewicht stabil. Die genauere Bedeutung dieses Begriffes werden wir noch in der Dynamik erkennen.

Tritt der Fall ein, daß auch für jede beliebige endliche Entfernung des Systems aus seiner Gleichgewichtslage der Arbeitsausdruck verschwindet, d. h. daß das System im Gleichgewicht bleibt, wenn es aus seiner anfänglichen Gleichgewichtslage auf irgend eine mit den Bedingungen des Systems verträgliche Weise, aber nicht über gewisse Grenzen hinaus entfernt wird, so nennt man das Gleichgewicht indifferent. In allen anderen Fällen heißt es labil. Eine schwere Kugel, die sich reibungslos auf einer horizontalen Ebene bewegen kann, bietet ein einfaches Beispiel für indifferentes Gleichgewicht dar, ein auf die Ebene gestellter gerader Kreiszylinder gibt ein Beispiel für stabiles und ein auf seine Spitze gestellter gerader Kreiskegel liefert ein Beispiel für labiles Gleichgewicht.

Handelt es sich um ein irgendwie beschaffenes schweres Massensystem, so kann man, wenn v ein vertikal aufwärts gerichteter Einheitsvektor ist,

$$F_i = -G_i v$$

setzen, wobei G_i das Gewicht der einzelnen Massenpunkte bedeutet. Es wird sonach, wenn wir die z-Achse vertikal aufwärts gerichtet annehmen,

$$F_i = -G_i \operatorname{grad} z_i = -\operatorname{grad} G_i z_i,$$

und wir können

$$U = -\sum G_i z_i \quad .$$

setzen. Dieser Ausdruck ist aber nichts anderes wie die mit dem Faktor $\sum G_i$, d. h. mit dem negativen Gesamtgewicht multiplizierte Höhe ζ des Schwerpunktes. Demnach ist das Gleichgewicht stabil, wenn ζ ein Minimum ist, also der Schwerpunkt die tiefst mögliche Lage hat. In jedem Falle wird, wenn Gleichgewicht vorhanden ist,

$$\delta \zeta = 0,$$

und dies ist das Prinzip von Torricelli.[1])

6. Herleitung der Gleichgewichtsbedingungen eines starren Körpers aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Ist das materielle System ein starres System, so haben wir die Verschiebungskomponenten eines Punktes des Körpers in der Form anzusetzen

$$\delta x = (u - ry + qz)\tau,$$
$$\delta y = (v - pz + rx)\tau,$$
$$\delta z = (w - qx + py)\tau,$$

indem wir mit τ einen unendlich kleinen Faktor bezeichnen. Sind also x_i, y_i, z_i die Koordinaten der Angriffspunkte und X_i, Y_i, Z_i die Komponenten der Kräfte, wobei $i = 1, 2, \ldots n$, so liefert das Prinzip der virtuellen Verschiebungen die Gleichung

1) Torricelli, Opera geometrica: De Motu, lib. I, p. 99, Florentiae 1644. Vgl. Duhem, Les origines de la statique, vol. II, Paris 1906.

$$\sum(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) = 0$$

oder

$$uR_x + vR_y + wR_z + pM_x + qM_y + rM_z = 0,$$

indem wir setzen

$$R_x = \sum X_i, \quad R_y = \sum Y_i, \quad R_z = \sum Z_i,$$

$$M_x = \sum(Z_i y_i - Y_i z_i), \quad M_y = \sum(X_i z_i - Z_i x_i), \quad M_z = \sum(Y_i x_i - X_i y_i).$$

Ist der starre Körper nicht frei, so sind die Größen u, v, w, p, q, r nicht unabhängig voneinander, sondern durch Relationen von folgender Form miteinander verbunden:

$$Au + Bv + Cw + Dp + Eq + Fr = 0,$$
$$A'u + B'v + C'w + D'p + E'q + F'r = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Methode der unbestimmten Koeffizienten liefert dann die Gleichungen:

$$R_x + \lambda A + \lambda' A' + \cdots = 0, \quad M_x + \lambda D + \lambda' D' + \cdots = 0,$$
$$R_y + \lambda B + \lambda' B' + \cdots = 0, \quad M_y + \lambda E + \lambda' E' + \cdots = 0,$$
$$R_z + \lambda C + \lambda' C' + \cdots = 0, \quad M_z + \lambda F + \lambda' F' + \cdots = 0.$$

Ist insbesondere der Koordinatenursprung ein fester Punkt, so muß $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ sein, und es ergibt sich aus der Gleichung

$$pM_x + qM_y + rM_z = 0,$$

die für alle Werte p, q, r bestehen soll,

$$M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = 0,$$

d. h. das Vektormoment des Kräftesystems für den festen Punkt muß verschwinden.

Ist die z-Achse fest, so muß $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, $p = 0$, $q = 0$ sein und es ergibt sich

$$M_z = 0,$$

d. h. das Moment des Kräftesystems für die feste Achse muß verschwinden.

Ist der Körper völlig frei, so bleiben u, v, w, p, q, r völlig willkürlich, und es ergeben sich die sechs Gleichungen

$$R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad R_z = 0, \quad M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = 0.$$

Wir wollen noch den besonderen Fall betrachten, wo der Körper mit einer Anzahl Punkten, die nicht einer Geraden angehören, auf eine Ebene, für die wir die xy-Ebene nehmen, aufgestützt ist. Es muß dann für jede umkehrbare Verschiebung $\delta z = 0$ werden, d. h. es verschwinden w, q und p, und infolge der Gleichung

$$uR_x + vR_y + rM_z = 0$$

auch R_x, R_y und M_z. Das Kräftesystem ist somit einer der z-Achse parallelen Einzelkraft von der Größe $R = R_z$ äquivalent, von deren Angriffspunkt die Koordinaten durch die Gleichungen bestimmt werden können

$$-R\xi = M_y, \quad R\eta = M_x, \quad \zeta = 0.$$

Um auch die nicht umkehrbaren Verschiebungen in Betracht zu ziehen, bezeichnen wir mit $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2; \ldots \xi_r, \eta_r$ die Koordinaten der Stützpunkte in der xy-Ebene, dann ergeben sich für die Größen u, v, w, p, q, r, die eine nicht umkehrbare Verschiebung bestimmen, die Ungleichungen

$$w - q\xi_\varrho + p\eta_\varrho \geqq 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots r).$$

Ferner wird die Bedingung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen für die gefundene Resultante

$$R(w - q\xi + p\eta) < 0$$

und zwar ist, wenn der Körper nach der Seite der positiven z zu liegt, $R < 0$ anzunehmen. Dies sieht man sofort, wenn man dem Körper eine Verschiebung von der Größe ε in der Richtung der positiven z-Achse erteilt, denn dann muß $R\varepsilon < 0$ sein, also ist $R < 0$. Demnach wird

$$w - q\xi + p\eta > 0,$$

sowie die Bedingungen

$$w - q\xi_\varrho + p\eta_\varrho > 0$$

erfüllt sind. Deutet man dies geometrisch, indem man von der Gleichung $w - qx + py = 0$, die eine gerade Linie in der xy-Ebene darstellt, ausgeht, so ergibt sich, daß, wenn die Stützpunkte alle auf derselben Seite irgend einer Geraden in der xy-Ebene liegen, auch der Angriffspunkt der resultierenden

Kraft auf derselben Seite der Geraden liegen muß. Dies aber läßt sich so umdeuten: Man zeichne das konvexe Polygon, dessen Ecken aus lauter Stützpunkten bestehen und das alle Stützpunkte teils auf dem Rande, teils im Innern enthält, dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung des Gleichgewichts die, daß auch der Angriffspunkt der resultierenden Kraft im Innern dieses Polygons liegt, und die Kraft selbst senkrecht ist zu der Ebene, auf welcher der Körper ruht.

Übungsbeispiele.

1. Aufgabe. *Ein schwerer Punkt P ruht auf einer Ellipse mit vertikaler kleiner Achse. Seine Gleichgewichtslage zu bestimmen, wenn er von der kleinen Achse proportional zu seiner Entfernung von ihr abgestoßen wird, wie es z. B. der Fall ist, wenn die Ellipse um ihre kleine Achse mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit ω rotiert.*

Auflösung. Die auf den Punkt P wirkenden Kräfte sind, wenn wir die Masse von P gleich 1 annehmen, von der Form

$$X = \omega^2 x, \quad Y = -g$$

Fig. 84.

und den Hauptachsen der Ellipse, die wir zu Koordinatenachsen wählen, beziehentlich parallel. Eine virtuelle Verschiebung von P muß, wenn $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ die Ellipsengleichung ist, der Bedingung genügen

$$\frac{x}{a^2}\,\delta x + \frac{y}{b^2}\,\delta y = 0;$$

das Prinzip der virtuellen Verschiebungen fordert

$$\omega^2 x\,\delta x - g\,\delta y = 0.$$

Hieraus folgt durch Elimination von δx oder δy

$$x\left(\omega^2 + \frac{b^2}{a^2}\,\frac{g}{y}\right) = 0.$$

Die Lösung $x = 0$ dieser Gleichung ergibt zwei Gleichgewichtslagen in den Endpunkten der kleinen Achse. Der Wert $y = -\frac{b^2}{a^2}\,\frac{g}{\omega^2}$ liefert eine mögliche Lösung nur dann, wenn dieser Wert dem absoluten Betrage nach $< b$ ist, wenn also

$$\frac{b}{a^2}\,\frac{g}{\omega^2} < 1$$

ist. Wir wollen zeigen, daß im anderen Falle, wenn also $\frac{b}{a^2}\frac{g}{\omega^2} > 1$ ist, die Lage in einem Endpunkte E der kleinen Achse eine Lage stabilen Gleichgewichtes ist und das Gleichgewicht labil wird, wenn derselbe Wert > 1 ist.

Zu dem Zwecke denken wir uns den Punkt aus E sehr wenig in eine Lage E' entfernt, was durch eine Drehung durch den sehr kleinen Winkel α um den Krümmungsmittelpunkt C der Ellipse für den Punkt E geschehen kann. Ist

$$\varrho = \frac{a^2}{b}$$

der Krümmungsradius, so wird die Abstoßungskraft $\omega^2 \varrho \sin\alpha$, und diese können wir auch als die Komponente der Kraft nach der Tangente der Ellipse in E' nehmen, während die Komponente der Schwere nach dieser Tangente gleich $g \sin\alpha$ wird. Ist nun die erstere Kraft kleiner als die letztere Kraft, die nach der kleinen Ellipsenachse hin gerichtet ist, so ist das Gleichgewicht stabil, dazu muß also

$$\omega^2 \varrho \sin\alpha < g \sin\alpha \quad \text{oder} \quad \frac{g}{\omega^2 \varrho} > 1, \quad \text{d. h.} \quad \frac{b}{a^2}\frac{g}{\omega^2} > 1$$

sein, w. z. b. w.

2. Aufgabe. *Von dem Gelenkparallelogramm $ABB'A'$ sind von den Seiten AB und $A'B'$ zwei Punkte C und C' (die von A und A' gleiche Abstände haben) um zwei feste Punkte in einer Vertikalen*

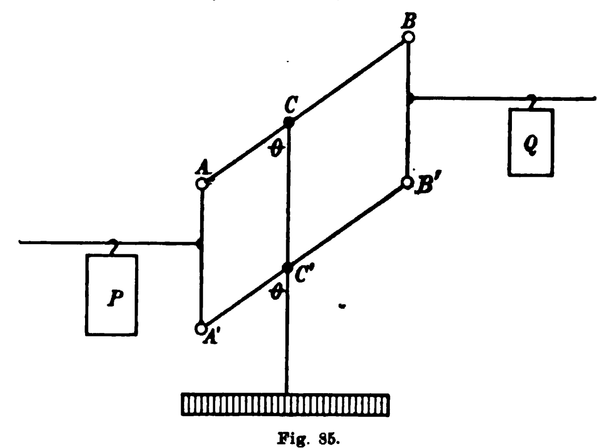


Fig. 85.

drehbar, so daß die Seiten AA' und BB' immer vertikal bleiben. An diesen Seiten sind zwei horizontale Stangen befestigt, die Gewichte P und Q tragen. Die Gleichgewichtsbedingungen zu finden. (Robervalsche Wage.)

Auflösung. Man nenne θ den Winkel, den die Stangen AB und $A'B'$ mit der Vertikalen bilden und lasse diesen Winkel um $\delta\theta$ wachsen. Dann heben sich die Punkte A, A' um $AC \cdot \sin\theta \cdot \delta\theta$, und um ebensoviel hebt sich die Last P. Die Punkte B, B' senken sich um $BC \cdot \sin\theta \cdot \delta\theta$ und um ebensoviel senkt sich die Last Q. Das Gleichgewicht fordert also

$$(P \cdot AC - Q \cdot BC) \sin\theta \cdot \delta\theta = 0,$$

oder

$$P \cdot AC = Q \cdot BC;$$

es ist also unabhängig von der Größe des Winkels θ, d. h. indifferent und unabhängig auch davon, an welcher Stelle der horizontalen Stangen die Gewichte aufgehängt sind.

3. Aufgabe. *Ein schwerer Kreisbogen AB vom Radius a trägt an seinem einen Ende A noch ein besonderes Gewicht P und ist durch die gewichtlosen starren Stangen MA und MB um seinen Mittelpunkt M drehbar befestigt. An dem Radius MA ist unter einem bestimmten Winkel γ, der größer ist als der Winkel α des Kreissektors, ein Arm MC befestigt, dessen Endpunkt C ein Gewicht Q trägt (Briefwage). Bei welcher Stellung ist Gleichgewicht vorhanden?*

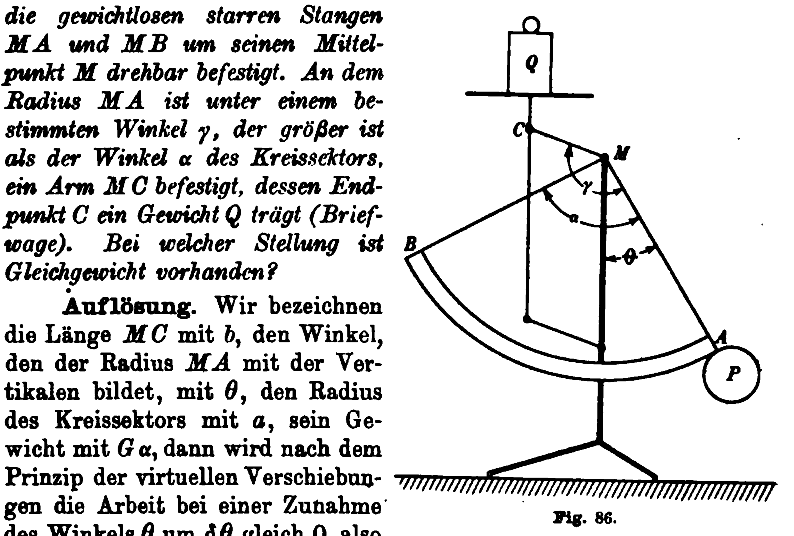


Fig. 86.

Auflösung. Wir bezeichnen die Länge MC mit b, den Winkel, den der Radius MA mit der Vertikalen bildet, mit θ, den Radius des Kreissektors mit a, sein Gewicht mit $G\alpha$, dann wird nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen die Arbeit bei einer Zunahme des Winkels θ um $\delta\theta$ gleich 0, also

$$\left[Pa \sin\theta + Ga\alpha \sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) - Qb \sin(\gamma - \theta)\right] \delta\theta = 0$$

und daraus

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{Ga\alpha \sin\frac{\alpha}{2} + Qb \sin\gamma}{Pa + Ga\alpha \cos\frac{\alpha}{2} + Qb \cos\gamma}.$$

Dieser Wert ist von der Form

$$\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\gamma \cdot \frac{A + Q}{B + Q}.$$

Zur Bestimmung der Konstanten A, B sind zwei Beobachtungen nötig, etwa für die Lasten $Q = 0$ und $Q = 100$ g. Dann ist die Berechnung der Teilung des Kreisbogens, d. h. die Markierung der Werte von θ, den verschiedenen Gewichten Q entsprechend durch logarithmische Rechnung leicht auszuführen. Es würde eine gute Übung sein, dies für einen praktischen Fall wirklich zu tun und das Resultat mit der Erfahrung zu vergleichen.

4. **Aufgabe.** *Die Gleichgewichtsbedingungen eines biegsamen und unausdehnbaren Fadens zu finden, an dem in gewissen Punkten $A_0, A_1, \ldots A_n$ bestimmte Kräfte $F_0, F_1, \ldots F_n$ angreifen (Seilpolygon).*

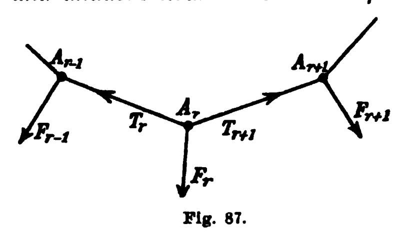


Fig. 87.

Auflösung. Die Bedingungsgleichungen können wir, wenn wir uns auf umkehrbare Verschiebungen beschränken und mit $l_1, l_2, \ldots l_n$ die Längen der einzelnen Teile des Seiles bezeichnen, in vektorieller Form schreiben

$$(A_1 - A_0)^2 = l_1^2, \ (A_2 - A_1)^2 = l_2^2, \ldots$$
$$\ldots (A_r - A_{r-1})^2 = l_r^2, \ldots (A_n - A_{n-1})^2 = l_n^2.$$

Bei der Variation werden sie

$$(A_1 - A_0)\times(\delta A_1 - \delta A_0) = 0, \ldots (A_r - A_{r-1})\times(\delta A_r - \delta A_{r-1}) = 0, \ldots$$

Demnach finden wir hier für das Prinzip der virtuellen Verschiebungen den Ausdruck

$$[F_0 - \lambda_1(A_1 - A_0)]\times\delta A_0 + [F_1 + \lambda_1(A_1 - A_0) - \lambda_2(A_2 - A_1)]\times\delta A_1 + \cdots = 0$$

oder

$$F_0 - \lambda_1(A_1 - A_0) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_r + \lambda_r(A_r - A_{r-1}) - \lambda_{r+1}(A_{r+1} - A_r) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_n + \lambda_n(A_n - A_{n-1}) = 0.$$

Diese Gleichungen drücken zunächst aus, daß jede der Kräfte mit den beiden angrenzenden Seiten des Seilpolygons in einer Ebene liegt. Ziehen wir auch die nicht umkehrbaren Verschiebungen in Betracht, bei denen $(A_r - A_{r-1})\times(\delta A_r - \delta A_{r-1}) < 0$, so ergibt sich, daß die unbestimmten Koeffizienten λ_r alle < 0 sind. Wir können demnach setzen

$$\lambda_r = - T_r : l_r, \quad T_r > 0,$$

und indem wir $A_r - A_{r-1} = l_r a_r$ machen, also a_r einen Einheitsvektor in der r^{ten} Seilpolygonseite nennen, ergibt sich

$$F_{r-1} - T_{r-1} a_{r-1} + T_r a_r = 0,$$
$$F_r - T_r a_r + T_{r+1} a_{r+1} = 0,$$

Diese Gleichungen drücken aus, daß an jedem Eckpunkte A_r das Gleichgewicht hergestellt wird durch zwei Kräfte, die in den zwei angrenzenden Seilpolygonseiten wirken. Jede dieser Kräfte T_r tritt dabei, den zwei Endpunkten der Seite entsprechend, zweimal mit entgegengesetzten Richtungen auf, und diese beiden Kräfte sind, da $T_r > 0$, aufeinander zu gerichtet, was eine Zugspannung in dem betreffenden Seilstück bedeutet.

Für die Kräfte an den Endpunkten A_0, A_n ergibt sich

$$F_0 = -T_1 a_1, \quad F_n = T_n a_n.$$

Diese Kräfte fallen selbst in die Richtung der ersten und letzten Seilpolygonseite und sind den dort herrschenden Spannungskräften entgegengesetzt gleich.

Addiert man alle die gefundenen Gleichungen, so findet man

$$F_0 + F_1 + \cdots + F_n = 0,$$

d. h. die Kräfte schließen sich zu einem (im allgemeinen windschiefen) Polygon, sie sind also, wenn man sie alle an denselben Punkt verlegt, im Gleichgewicht.

Sind umgekehrt die Kräfte gegeben derart, daß sie als Kräfte an einem Punkte im Gleichgewichte sind, und man sucht ein zugehöriges Seilpolygon, so ergibt sich sofort

$$T_r a_r = -(F_0 + F_1 + \cdots + F_{r-1}),$$

es sind also die Richtungen der Seileckpolygonseiten eindeutig bestimmt, und zwar so, daß sie den Strahlen, die von der ersten Ecke des durch die Kräfte gebildeten Polygons nach den übrigen Ecken hinlaufen, parallel werden.

5. Aufgabe. *Die Gleichgewichtsbedingungen für ein ebenes Gelenkpolygon zu finden, dessen Seiten in einem ihrer Punkte von einer bestimmten Kraft angegriffen werden.*

Auflösung. Wir nennen $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}, A_0$ die Eckpunkte des Polygons, $B_1, B_2, \ldots B_n$ die Angriffspunkte der Kräfte, $F_1, F_2, \ldots F_n$ die Kräfte selbst. Da B_r auf der Seite $A_{r-1}A_r$ liegen soll, wird dann

$$B_r = A_{r-1} + \alpha_r (A_r - A_{r-1}). \qquad \text{(a)}$$

A_{r-1} B_r A_r F_r

Fig. 88.

Die Verschiebung δA_r des Punktes A_r denken

wir uns nun hergestellt durch eine Verschiebung δA_0 des Punktes A_0, die eine Parallelverschiebung des ganzen Polygons im Gefolge hat, durch eine Drehung durch den Winkel $\delta\omega_0$ um den Punkt A_0, durch eine Drehung $\delta\omega_1$ um den Punkt A_1 usw. Die Verschiebung des Punktes A_r bei der ersten Drehung wird $\delta\omega_0 \boldsymbol{i} \wedge (A_r - A_0)$, wenn $\boldsymbol{i}$ einen zur Ebene des Polygons senkrechten Einheitsvektor bezeichnet, und analog für jede andere Drehung. Wir finden also

$$\delta A_r = \delta A_0 + \boldsymbol{i} \wedge (A_r - A_0)\,\delta\omega_0 + \boldsymbol{i} \wedge (A_r - A_1)\,\delta\omega_1 + \cdots$$
$$+ \boldsymbol{i} \wedge (A_r - A_{r-1})\,\delta\omega_{r-1}.$$

Rechnen wir aber so, indem wir über $n - 1$ hinaus noch einen Schritt weiter gehen, die Verschiebung des Punktes A_0 aus, so ergibt sich die Bedingung

$$\boldsymbol{i} \wedge (A_0 - A_1)\,\delta\omega_1 + \cdots + \boldsymbol{i} \wedge (A_0 - A_{n-1})\,\delta\omega_{n-1} = 0$$

oder, da $\boldsymbol{i}$ zu allen Vektoren der Ebene senkrecht ist,

$$(A_0 - A_1)\,\delta\omega_1 + \cdots + (A_0 - A_{n-1})\,\delta\omega_{n-1} = 0. \tag{b}$$

Auf Grund von (a) finden wir aber aus der Gleichung für δA_r

$$\delta B_r = \delta A_0 + \boldsymbol{i} \wedge (B_r - A_0)\,\delta\omega_0 + \cdots + \boldsymbol{i} \wedge (B_r - A_{r-1})\,\delta\omega_{r-1}.$$

Setzen wir dies in die Gleichung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen

$$\boldsymbol{F}_1 \times \delta B_1 + \cdots + \boldsymbol{F}_n \times \delta B_n = 0$$

ein, indem wir die Gleichung (b) mit einem unbestimmten Vektor $\boldsymbol{l}$ skalar multipliziert dazu addieren, und machen dann die Koeffizienten von $\delta A_0, \delta\omega_0, \ldots \delta\omega_{n-1}$ der Reihe nach gleich Null, so ergibt sich zunächst durch Nullsetzen der Koeffizienten von δA_0 und $\delta\omega_0$

$$\sum \boldsymbol{F}_r = 0, \quad \sum \boldsymbol{i} \wedge (B_r - A_0) \times \boldsymbol{F}_r = 0 \quad \text{oder} \quad \sum (B_r - A_0) \wedge \boldsymbol{F}_r = 0, \tag{c}$$

die Kräfte sind also als Kräfte am starren Körper, d. h. wenn alle Gelenke versteift werden, im Gleichgewicht. Durch Nullsetzen des Faktors von $\delta\omega_s$ erhalten wir, wenn wir

$$K_s = \sum_{r=s+1}^{n} \boldsymbol{i} \wedge (B_r - A_s) \times \boldsymbol{F}_r \qquad (s = 1, 2, \ldots n - 1)$$

machen,

$$K_s + \boldsymbol{l} \times (A_0 - A_s) = 0. \tag{d}$$

Aus je dreien dieser Gleichungen kann man $\boldsymbol{l}$ eliminieren. Diese Elimination beruht auf folgenden Bemerkungen:

Es seien $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ drei Vektoren, die in einer Ebene liegen, a_1, a_2, a_3 ihre Moduln, (23), (31), (12) die Winkel zwischen ihnen.

Multipliziert man diese Vektoren der Reihe nach mit den Zahlfaktoren

$$a_2 a_3 \sin(23), \quad a_3 a_1 \sin(31), \quad a_1 a_2 \sin(12),$$

so verhalten ihre Längen sich wie die Sinus der Winkel, die jedesmal zwischen den beiden anderen Vektoren liegen. Diese drei neuen Vektoren lassen sich also zu einem Dreiecke schließen, oder ihre Summe ist Null. Die Zahlfaktoren, mit denen man multiplizieren soll, sind nun nichts anderes wie die mit bestimmten Vorzeichen versehenen Moduln der Vektorprodukte $\mathfrak{a}_2 \wedge \mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_3 \wedge \mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1 \wedge \mathfrak{a}_2$, und so ergibt sich eine Identität:

$$\mathfrak{a}_1 \bmod(\mathfrak{a}_2 \wedge \mathfrak{a}_3) \pm \mathfrak{a}_2 \bmod(\mathfrak{a}_3 \wedge \mathfrak{a}_1) \pm \mathfrak{a}_3 \bmod(\mathfrak{a}_1 \wedge \mathfrak{a}_2) = 0.$$

Wenden wir dies jetzt auf die drei Gleichungen

$$K_s + \mathfrak{l} \times (A_0 - A_s) = 0, \; K_t + \mathfrak{l} \times (A_0 - A_t) = 0, \; K_u + \mathfrak{l} \times (A_0 - A_u) = 0$$

an, so haben wir sie mit den mit bestimmten Vorzeichen genommenen Moduln der Vektoren

$$(A_0 - A_t) \wedge (A_0 - A_u), \; (A_0 - A_u) \wedge (A_0 - A_s), \; (A_0 - A_s) \wedge (A_0 - A_t)$$

zu multiplizieren und zu addieren, dann wird der Faktor von $\mathfrak{l}$ und damit auch das skalare Produkt null und wir erhalten

$$\begin{aligned} K_s \bmod[(A_0 - A_t) \wedge (A_0 - A_u)] \pm K_t \bmod[(A_0 - A_u) \wedge (A_0 - A_s)] \\ \pm K_u \bmod[(A_0 - A_s) \wedge (A_0 - A_t)] = 0. \end{aligned} \qquad \text{(e)}$$

Dies sind somit die gesuchten Bedingungen des Gleichgewichts.

6. Aufgabe. *Das Problem der vorigen Aufgabe soll so spezialisiert werden, daß die Kräfte in den Mitten der Seiten des Gelenkpolygons angreifen, diesen Seiten der Größe nach proportional und der Richtung nach zu ihnen senkrecht sind.*

Auflösung. Es ist eine gute Übung, die Lösung dieser Aufgabe aus der des allgemeinen Problems herzuleiten, sie kann aber auch leicht unabhängig gefunden werden. Zu dem Zwecke beachten wir, daß die Reaktionskräfte, die zwei benachbarte Seiten des Polygons aufeinander ausüben, entgegengesetzt gleich sind. Seien nun R, R' die Reaktionskräfte, die auf eine Seite AB des Polygons von den angrenzenden Seiten ausgeübt werden, so müssen sie der auf diese Seite wirkenden äußeren Kraft P das Gleichgewicht halten, sich also auf der Wirkungslinie dieser

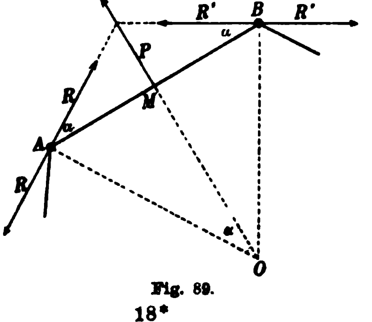


Fig. 89.

Kraft schneiden. Die Wirkungslinie ist aber die Mittelsenkrechte von AB, also bilden die Reaktionskräfte R, R' mit der Seite AB dieselben Winkel. Daraus aber folgt weiter $R = R'$, d. h. alle Reaktionskräfte sind gleich, und es wird $P = 2R \sin\alpha$. Anderseits ist P von der Form $k \cdot AB$, also wird $R = k \cdot MA : \sin\alpha$. Errichtet man nun in A das Lot auf der Linie der Kraft R, das die Wirkungslinie von P in O schneide, so wird $BO = AO = R : k$. Derselbe Wert ergibt sich aber, da die Reaktionskraft R bei allen Seiten dieselbe ist, auch für den Abstand des Punktes O von allen anderen Ecken des Polygons. Das Polygon ist also ein Kreispolygon, und die auf seine Seiten wirkenden Kräfte sind nach dem Mittelpunkte O des Kreises hin gerichtet.

7. **Aufgabe.** *Ein um A drehbarer Stab AB vom Gewicht P ist in seinem Schwerpunkt M an einem Seile befestigt, das Seil läuft bei C über eine Rolle, die vertikal über A steht, und trägt in dem Punkte D ein Gewicht Q. Außerdem ist $AM = AC$; die Gleichgewichtslage zu finden.*

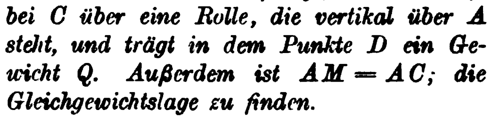


Fig. 90.

Auflösung. Wir nennen θ den Winkel AMC und lassen diesen Winkel um $\delta\theta$ variieren. Dann ergibt sich für den Arbeitsausdruck, wenn $AM = a$ gesetzt wird, da die Verkürzung der Strecke MC gleich $2a \sin\theta \cdot \delta\theta$ und die Erhebung des Punktes M gleich $2a \sin 2\theta \cdot \delta\theta$ wird,

$$2a[Q \sin\theta - P \sin 2\theta]\,\delta\theta.$$

Dieser Ausdruck verschwindet für $\theta = 0$ und für $\cos\theta = \frac{Q}{2P}$. Was zunächst die erste Lösung betrifft, so wird, wenn wir für θ einen sehr kleinen Wert θ' nehmen, die Arbeit bei einer Vermehrung dieses Winkels θ' um $\delta\theta'$

$$2a[Q - 2P]\,\theta'\delta\theta',$$

sie erhält also bei ständig zunehmendem θ' einen negativen Wert, solange $Q < 2P$, und dann ist das Gleichgewicht stabil. Die zweite Gleichgewichtslage ist von vornherein nur dann möglich, wenn $Q < 2P$; bezieht sich auf sie ein Wert θ_0, und nimmt man $\theta = \theta_0 + \theta'$, wo θ' sehr klein ist, so erhält man für den Arbeitsausdruck, wenn θ' sich noch um $\delta\theta'$ vermehrt,

$$4aP \sin^2\theta_0\,\theta'\delta\theta',$$

also einen Wert, der stets dasselbe Vorzeichen hat wie $\delta\theta'$, mithin ist dies Gleichgewicht stets labil. Also ist nur die Gleichgewichts-

lage stabil, bei welcher der Stab senkrecht herunterhängt. Wird $Q > 2P$, so ist keine der Gleichgewichtslagen stabil; der Stab springt herauf, indem er sich um A dreht, bis er an die Rolle anstößt.

8. Aufgabe. *Ein starrer Stab liegt in einer hohlen Halbkugel, so daß er sich in einer Meridianebene der Kugel befindet und sich auf den Boden der Halbkugel in einem Punkte A, auf den horizontalen Rand in einem Punkte B aufstützt. Seine Gleichgewichtslage zu finden.*

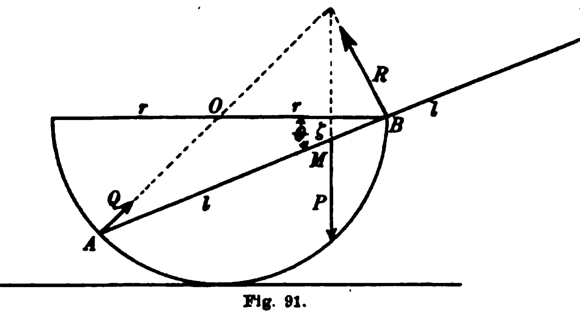


Fig. 91.

Auflösung. Man lege den Meridianschnitt durch den Stab, $2l$ sei seine Länge, r der Kugelradius, θ die Neigung des Stabes gegen den Horizont. Dann wird die Senkung seines Schwerpunktes M, der in seiner Mitte liegt, unter die Ebene des Kugelrandes

$$\zeta = (2r\cos\theta - l)\sin\theta.$$

Für die Gleichgewichtslage muß $\delta\zeta = 0$ sein oder

$$2r\cos 2\theta - l\cos\theta = 0.$$

Diese Gleichung geht für $\cos\theta = x$, $\frac{l}{2r} = a$ über in

$$2x^2 - ax - 1 = 0.$$

Es muß aber θ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegen, die Wurzel x also zwischen 0 und $+1$; ferner muß $AB < 2l$ sein, also $x < 2a$. Nun wird eine Wurzel der Gleichung immer negativ und ihre linke Seite ist

$$\text{für } x = 0{:}\ -1, \quad \text{für } x = 2a{:}\ 6a^2 - 1, \quad \text{für } x = 1{:}\ 1 - a.$$

Damit die Wurzel in dem richtigen Intervall existiert, muß der zweite Wert > 0 und auch der dritte Wert > 0 sein. Es ergeben sich so für a die Grenzen

$$\sqrt{\tfrac{1}{6}} < a < 1.$$

Daß immer $x > a$ ist, also $2r\cos\theta > l$, mithin der Schwerpunkt in die Kugel fällt, ist leicht zu sehen, denn es ist $2x^2 = ax + 1$, und setzt man für 1 den kleineren Wert ax ein, so ergibt sich $2x^2 > 2ax$ oder $x > a$.

Was die Reaktionskräfte betrifft, so geht die Kraft Q in A, weil sie zur Kugeloberfläche normal sein soll, durch den Kugelmittelpunkt O. Die Gleichung der Momente für den Punkt B liefert also

$$2Qr\cos\theta\cdot\sin\theta = P\zeta\operatorname{ctg}\theta = P(2r\cos\theta - l)\cos\theta$$
$$= 2Pr\sin^2\theta$$

oder

$$Q = P\operatorname{tang}\theta.$$

Daraus ergeben sich die horizontale und vertikale Komponente der Reaktionskraft R in B

$$R\sin\varphi = Q\cos 2\theta \qquad = P\cos 2\theta\operatorname{tang}\theta,$$
$$R\cos\varphi = P - Q\sin 2\theta = P\cos 2\theta.$$

Der Winkel φ, den die Kraft mit der Vertikalen bildet, wird also gleich θ, d. h. die Kraft ist senkrecht zu dem Stab, und ihre Größe wird

$$R = P\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta} = P\frac{l}{2r}.$$

9. Aufgabe. *Ein geradliniger schwerer Stab stützt sich auf eine horizontale Stange C und wird mit dem einen Ende A gegen eine vertikale und zu der Stange C parallele Wand gestemmt. Die Gleichgewichtslage und die Reaktionskräfte zu finden.*

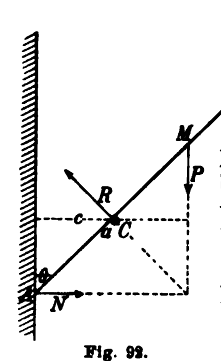


Fig. 92.

Auflösung. Es sei M der Schwerpunkt und P das in ihm angreifende Gewicht des Stabes, $AM = a$ und c der Abstand der Stange C von der vertikalen Wand. Wir nennen θ den Winkel, den der Stab mit der Wand bildet. Dann ergibt sich für die Höhe von M über dem Niveau von C

$$\zeta = a\cos\theta - c\operatorname{ctg}\theta.$$

Besteht Gleichgewicht, so muß $\delta\zeta = 0$ sein oder

$$a\sin\theta - \frac{c}{\sin\theta^2} = 0,$$

also

$$\sin\theta = \sqrt[3]{\frac{c}{a}}.$$

Die Reaktionskraft N in A folgt aus der Gleichheit der Momente von N und P für die Achse C:

$$Nc \operatorname{ctg} \theta = P(a \sin \theta - c)$$

oder

$$N = P \operatorname{ctg} \theta.$$

Für die Komponenten der Reaktionskraft R in C ergibt sich dann

$$R \cos \varphi = N = P \operatorname{ctg} \theta, \quad R \sin \varphi = P.$$

Daraus folgt $\varphi = \theta$, d. h. R wirkt senkrecht zu dem Stab, und es wird

$$R = \frac{P}{\sin \theta}.$$

Rechnen wir die zweite Variation aus, d. h. setzen wir in dem Arbeitsausdruck

$$P\left(a \sin \theta - \frac{c}{\sin^2 \theta}\right) \delta \theta$$

von dem Gleichgewichtswert θ_0 ausgehend $\theta_0 + \theta'$ (wobei θ' sehr klein) für θ ein, so ergibt sich

$$\left(a + \frac{2c}{\sin^3 \theta_0}\right) \cos \theta_0 \cdot \theta' \delta \theta'.$$

Der Faktor von θ' ist für einen spitzen Winkel θ_0 immer positiv, das Gleichgewicht ist also labil, und der Stab ist in dieser Lage nur unter dem Einfluß einer reibenden Kraft, die in A wirkt, zu halten.

10. Aufgabe. *Ein geradliniger schwerer Stab AB kann sich in einer vertikalen Ebene um seinen einen Endpunkt A drehen. Sein anderer Endpunkt B ist an einem Seil befestigt und dieses über eine Rolle C geführt, die vertikal über A im Abstande $AC = AB$ liegt, während der Endpunkt E des Seiles ein Gewicht Q trägt und gezwungen ist, auf einer gewissen Kurve zu bleiben. Welches muß das Gewicht Q und die Gestalt dieser Kurve sein, damit bei jeder Lage des Punktes E Gleichgewicht herrscht? (De l'Hôpitals Zugbrücke.)*

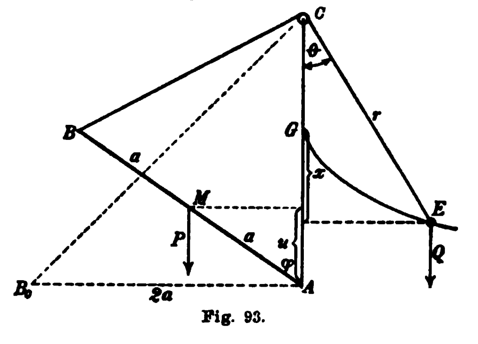


Fig. 93.

Auflösung. Ist der Stab in horizontaler Lage AB_0, so möge der Endpunkt E des Seiles eine Lage G in der Vertikalen AC haben. Ist dann l die Länge des Seiles, $2a$ die Länge des Stabes, so ergibt sich

$$CG = b = l - 2\sqrt{2}a. \tag{a}$$

Ferner folgt, wenn wir die Momente der an dem Stab angreifenden Kräfte für den Punkt A zusammen gleich 0 setzen:

$$aP = \sqrt{2}aQ. \tag{b}$$

Wir nehmen nun an, der Schwerpunkt M des Stabes befinde sich in der Höhe u über A, der Punkt E in der Tiefe x unter G, dann erfordert das Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$P\delta u = Q\delta x. \tag{c}$$

Machen wir $CE = r$, den Winkel $ACE = \theta$, den Winkel $BAC = \varphi$, so wird diese Gleichung

$$Pa\,\delta\cos\varphi = -Q\,\delta(r\cos\varphi).$$

Aus dem Dreieck BAC folgt aber, da $AB = AC = 2a$,

$$8a^2 - 8a^2\cos\varphi = (l-r)^2,$$

mithin

$$a\,\delta\cos\varphi = \frac{l-r}{4a}\delta r,$$

und demnach wird, da $\sqrt{2}\,Q = P$,

$$\sqrt{2}\,\frac{l-r}{4a}\delta r = -\delta(r\cos\theta).$$

Integrieren wir, so finden wir

$$(2l-r)r = -4\sqrt{2}ar\cos\theta + c$$

oder

$$r^2 = 2(l + 2\sqrt{2}a\cos\theta)r + c.$$

Die Konstante c ist daraus zu bestimmen, daß für $\theta = 0$ $r = b$ wird. Nehmen wir insbesondere $b = 0$, d. h. $l = 2\sqrt{2}a$, so wird die Kurvengleichung einfach

$$r = 2l(1+\cos\theta)$$

oder in kartesischen Koordinaten

$$(x^2 + y^2 - 2lx)^2 = 4l^2(x^2+y^2).$$

Dies ist eine sog. Pascalsche Schnecke (Limaçon). Vgl. Loria, Spezielle ebene Kurven, 1902, S. 137.

11. Aufgabe. *Ein homogener schwerer Stab ist an seinen Enden A, B durch Fäden von gleicher Länge mit den Enden C, D eines festen, horizontalen Stabes verbunden und wird von einem horizontal wirkenden Kräftepaar angegriffen (bifilare Aufhängung). Die Gleichgewichtslage zu finden.*

Auflösung. Es ist zunächst leicht zu sehen, daß in der Gleichgewichtslage die Mitten der beiden Stäbe in einer Vertikalen liegen müssen. Wir bezeichnen dann den Winkel, um welchen der aufgehängte Stab gegen den anderen in der Gleichgewichtslage gedreht ist, mit θ, mit h die vertikale Entfernung der beiden Stäbe, mit $2a$ die Länge des festen Stabes, mit $2b$ die Länge des aufgehängten Stabes, mit l die Länge der Fäden. Fällen wir dann z. B. aus C auf die horizontale Ebene des Stabes AB das Lot CE, so wird in dem rechtwinkligen Dreieck CEA

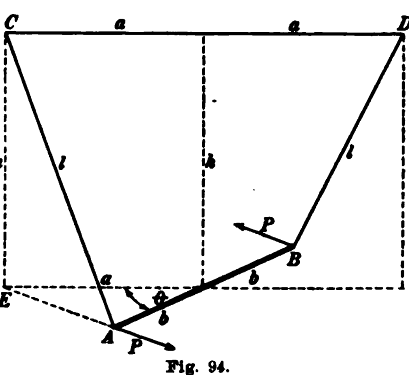


Fig. 94.

$$AE = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta} = \sqrt{(a-b)^2 + 4ab\sin^2\tfrac{1}{2}\theta},$$

$$CA = l, \quad CE = h,$$

und somit finden wir

$$h = \sqrt{l^2 - (a-b)^2 - 4ab\sin^2\tfrac{1}{2}\theta}.$$

Wir denken uns nun das Kräftepaar gegeben durch zwei Kräfte von der Größe P, die in A und B angreifen und senkrecht zu der Stabrichtung wirken. Das Gewicht des Stabes sei ferner G, dann liefert das Prinzip der virtuellen Verschiebung für eine Lagenänderung des Stabes, die einer Zunahme von θ um $\delta\theta$ und einer Abnahme von h um δh entspricht, die Gleichung

$$2Pa\delta\theta = G\delta h,$$

das Moment des Kräftepaares wird aber der Größe nach

$$M = 2Pa$$

und es ergibt sich

$$\delta h = \frac{ab\sin\theta}{\sqrt{l^2 - (a-b)^2 - 4ab\sin^2\frac{1}{2}\theta}}\,\delta\theta.$$

Daraus folgt

$$M = \frac{Gab\sin\theta}{\sqrt{l^2 - (a-b)^2 - 4ab\sin^2\frac{1}{2}\theta}}.$$

Auf Grund dieser Formel dient die beschriebene Vorrichtung zur wirklichen Messung eines Kräftepaares, insbesondere des auf einen Magneten ausgeübten.

12. Aufgabe. *Die Stabilität des Gleichgewichtes eines schweren Körpers, der auf einer festen Fläche ruht, zu untersuchen.*

Auflösung. Wir setzen der Einfachheit halber voraus, daß der Körper eine Symmetrieebene besitzt, die dann den Schwerpunkt S enthält und den Körper in einer Kurve Γ', die feste Fläche in einer Kurve Γ schneide. Die Ebene dieser Kurve Γ sei auch eine Symmetrieebene der festen Fläche oder ein senkrechter Querschnitt des von ihr begrenzten Körpers, wenn wir uns diesen zylindrisch denken. Ist C der Berührungspunkt und sind die beiden Flächen vollkommen glatt, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung des Gleichgewichtes die, daß die Linie CS vertikal und auf den beiden Kurven Γ und Γ' senkrecht ist, ferner die Richtung der Schwerkraft von C aus in das Innere von Γ geht. Sind die beiden Flächen absolut rauh, so genügt es, daß CS vertikal nach aufwärts gerichtet ist.

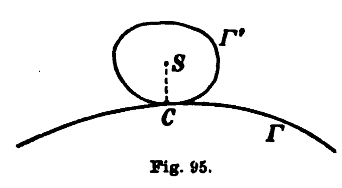


Fig. 95.

Denken wir uns aber den Körper unendlich wenig aus seiner Gleichgewichtslage verrückt oder Γ' auf Γ verschoben, so wird das Gleichgewicht stabil oder instabil, jenachdem die Bahn von S dem Punkte C die konvexe oder konkave Seite zukehrt. Betrachten wir nun die Kurven Γ und Γ' als Polbahnen und konstruieren den Wendekreis, so können wir die Stabilitätsbedingung so formulieren, daß wir sagen, das Gleichgewicht ist stabil, wenn S innerhalb des Wendekreises fällt, und instabil im entgegengesetzten Falle. Deshalb heißt dieser Kreis auch Stabilitätskreis.

Wenn z. B. eine Halbkugel vom Radius R' in C auf dem höchsten Punkte einer Kugel vom Radius R ruht, ist die Bedingung des Gleichgewichtes sicher erfüllt. Der Stabilitätskreis hat den Radius $RR' : (R + R')$, der Schwerpunkt S ist von C um $\frac{3}{8}R'$ entfernt. Also ist Stabilität vorhanden, wenn

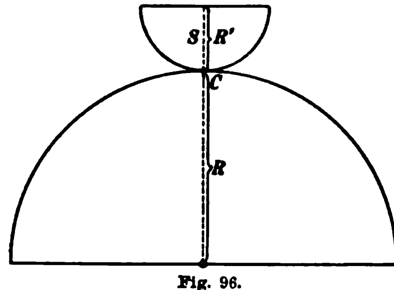


Fig. 96.

$$\tfrac{3}{8}R' < \frac{RR'}{R+R'},$$

mithin

$$R' < \tfrac{5}{3}R$$

ist. Wenn die Halbkugel im tiefsten Punkte einer Hohlkugel aufliegt, ist das Gleichgewicht immer stabil. Vgl. Thomson u. Tait, vol. 2, p. 111; Routh, Analytical Statics, vol. 1, p. 172 sq.

Drittes Kapitel.

Gleichgewicht der Seilkurven.

1. Die Gleichungen des Gleichgewichts. Wir betrachten einen biegsamen, unausdehnbaren Faden mit verschwindenden Querdimensionen. Ein Element ds dieses Fadens sei einer Kraft unterworfen, die von derselben Ordnung des Unendlichkleinen ist und mit $\boldsymbol{F}ds$ bezeichnet werde, so daß $\boldsymbol{F}$ ein endlicher Vektor ist. Dasselbe setzen wir für alle die unendlich kleinen Elemente voraus, in die sich der Faden zerlegen läßt. Die Fadenenden können frei oder fest sein oder gezwungen auf bestimmten Kurven oder Oberflächen zu bleiben usw.; in allen Fällen aber können wir sie als frei annehmen, wenn wir an ihnen bestimmte Kräfte $\boldsymbol{F}_0$ und $\boldsymbol{F}_1$ angreifen lassen, die nötigenfalls die bestehenden Bedingungen ersetzen.

Die Gleichgewichtsfigur des Fadens wird im allgemeinen eine Kurve sein, daher der Name Seilkurve. Wir wollen nun auf Grund des Prinzips der virtuellen Verschiebungen die Bedingungen des Gleichgewichts aufstellen und ihren Zusammenhang mit der Gestalt der Seilkurve ableiten.

Der Faden erfahre eine beliebige virtuelle Verschiebung, wobei der Punkt P des Fadenelementes ds in den Punkt $P + \delta P$ übergehe. Die virtuellen Arbeiten der längs des Fadens verteilten Kräfte ergeben dann die Summe

$$\int \boldsymbol{F} \times \delta P \cdot ds,$$

wobei das Integral zwischen 0 und l, der Länge des Fadens, zu nehmen ist. Es ergibt sich also, da man auch die Variationen der Endpunkte P_0 und P_1 des Fadens zu berücksichtigen hat, die Gleichung

$$\boldsymbol{F}_0 \times \delta P_0 + \boldsymbol{F}_1 \times \delta P_1 + \int \boldsymbol{F} \times \delta P \cdot ds = 0, \qquad (1)$$

wenn wir uns auf die umkehrbaren Verschiebungen beschränken.

Nun ist das Linienelement

$$ds = \operatorname{mod}(dP),$$

nach der Verschiebung wird es also gleich dem Modul von $dP + \delta dP$ oder $dP + d\delta P$ werden. Aber für die umkehrbaren Verschiebungen muß die Länge des Fadenelementes ungeändert bleiben. Es ergibt sich also die Bedingung

$$(dP + d\delta P)^2 = dP^2$$

oder

$$2dP \times d\delta P + (d\delta P)^2 = 0.$$

Dividieren wir diese Gleichung durch ds^2 und vernachlässigen darauf die unendlich kleinen Größen, so wird

$$\frac{dP}{ds} \times \frac{d\delta P}{ds} = 0$$

oder, wenn t den Einheitsvektor auf der Tangente bezeichnet,

$$t \times \frac{d\delta P}{ds} = 0. \tag{2}$$

Diese Gleichung gilt für jedes Fadenelement; multiplizieren wir die verschiedenen sich so ergebenden Gleichungen alle mit einem unbestimmten Faktor λ, d. h. mit einer zunächst willkürlichen Funktion der Bogenlänge s, und summieren, d. h. integrieren die sich so ergebenden Gleichungen über die ganze Ausdehnung des Fadens, so finden wir

$$\int \lambda t \times \frac{d\delta P}{ds}\, ds = 0$$

oder nach partieller Integration

$$\lambda_1 t_1 \times \delta P_1 - \lambda_0 t_0 \times \delta P_0 - \int \frac{d(\lambda t)}{ds} \times \delta P \cdot ds = 0,$$

indem wir durch die Indizes 0 und 1 die Werte, die sich auf die Enden des Fadens beziehen, kennzeichnen.

Addieren wir diese Gleichung schließlich zu (1), so ergibt sich

$$(F_0 - \lambda_0 t_0) \times \delta P_0 + (F_1 + \lambda_1 t_1) \times \delta P_1 + \int \left(F - \frac{d(\lambda t)}{ds}\right) \times \delta P \cdot ds = 0.$$

Nach der allgemeinen Methode haben wir nun in dieser mit den unbestimmten Faktoren behafteten Gleichung die Verschiebungen als völlig willkürlich anzusehen und müssen deshalb

$$\mathbf{F} - \frac{d(\lambda \mathbf{t})}{ds} = 0, \tag{3}$$

$$\mathbf{F}_0 - \lambda_0 \mathbf{t}_0 = 0, \quad \mathbf{F}_1 + \lambda_1 \mathbf{t}_1 = 0 \tag{4}$$

annehmen, wenn wir uns die Funktion λ jetzt in geeigneter Weise bestimmt denken. Es ist also diese Funktion als endlich, von Null verschieden und eindeutig bestimmt in dem Intervall von 0 bis l anzusehen. Die Gleichung (3) heißt die unbestimmte Gleichung, sie ist für jeden Punkt des Fadens zwischen P_0 und P_1 erfüllt; die Gleichungen (4) heißen die Grenzbedingungen der Seilkurve.

Im Falle nicht umkehrbarer Verschiebungen ergibt sich, daß die linke Seite der Gleichung (2) nicht Null, sondern beständig negativ sein muß, denn die so entstehende Ungleichung geht aus der für alle nicht umkehrbaren Verschiebungen geltenden Ungleichung

$$(dP + d\delta P)^2 < dP^2$$

hervor, die ausdrückt, daß bei diesen Verschiebungen die Fadenlänge verringert wird. Es wird gleichzeitig dann die linke Seite der Gleichung (1) negativ, und da die Beziehungen (3) und (4) entstehen, indem man die mit λ multiplizierte und integrierte linke Seite von (2) zu der linken Seite von (1) addiert und die Summe für alle möglichen Verschiebungen gleich Null setzt, muß, damit sie erfüllt sein können, das Produkt der linken Seite von (2) und der Funktion λ beständig einen positiven Wert ergeben, es muß also λ beständig negativ sein.

Da weiter $\mathbf{t}$ allgemein den Tangentialvektor in dem Sinne, der von P_0 nach P_1 führt, bezeichnet, ergeben die Gleichungen (4), daß die Kraft $\mathbf{F}_0$ in P_0 dem Tangentenvektor $\mathbf{t}_0$ entgegengesetzt und die Kraft $\mathbf{F}_1$ in P_1 dem Tangentenvektor $\mathbf{t}_1$ gleichgerichtet ist. Um die allgemeine Bedeutung von λ zu ermitteln, schneide man den Faden im Punkte P durch und nenne $\mathbf{T}$ die Kraft, die man in P anbringen muß, um an dem Stücke des Fadens zwischen P_0 und P das Gleichgewicht wiederherzustellen. Da dann die Summe aller an dem Fadenstück wirkenden Kräfte verschwinden muß, ergibt sich

$$\boldsymbol{F}_0 + \int \boldsymbol{F} ds + \boldsymbol{T} = 0,$$

das Integral von P_0 bis P erstreckt. Aus den Gleichungen (3) und (4) folgt aber

$$\boldsymbol{F}_0 = \lambda_0 \boldsymbol{t}_0, \quad \int \boldsymbol{F} ds = \lambda \boldsymbol{t} - \lambda_0 \boldsymbol{t}_0,$$

also wird

$$\boldsymbol{T} = -\lambda \boldsymbol{t},$$

die Kraft $\boldsymbol{T}$ fällt also in die Tangente der Seilkurve, ihre Größe $\tau = \operatorname{mod} \boldsymbol{T}$ heißt die Spannung in diesem Punkte, und zwar wird $\tau = -\lambda$.

Nehmen wir statt des Stückes $P_0 P$ das Stück PP_1 und bringen es durch eine in P angreifende Kraft $\boldsymbol{T}'$ ins Gleichgewicht, so ergibt sich $\boldsymbol{T}' = +\lambda \boldsymbol{t}$, also $= -\boldsymbol{T}$. In jedem Punkte des Fadens muß man sich demnach zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte wirkend denken, die in die Tangente der Seilkurve an der betreffenden Stelle fallen.

Es nehmen nun, wenn wir noch entsprechend $\tau_0 = -\lambda_0$, $\tau_1 = -\lambda_1$ setzen, die Gleichungen (3) und (4) die Form an

$$\boldsymbol{F} + \frac{d}{ds}(\tau \boldsymbol{t}) = 0, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{F}_0 + \tau_0 \boldsymbol{t}_0 = 0, \quad \boldsymbol{F}_1 - \tau_1 \boldsymbol{t}_1 = 0. \tag{6}$$

Wie leicht zu verifizieren ist, schließen diese Gleichungen alle Gleichgewichtsbedingungen für den erstarrt gedachten Faden ein. In der Tat, integriert man die Gleichung (5) und führt die Werte für $\tau_1 \boldsymbol{t}_1$ und $\tau_0 \boldsymbol{t}_0$ aus (6) ein, so ergibt sich

$$\int_0^l \boldsymbol{F} ds + \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_0 = 0,$$

d. h. die Summe aller wirkenden Kräfte verschwindet. Außerdem wird

$$\frac{d}{ds}[(P - O) \wedge \tau \boldsymbol{t}] = (P - O) \wedge \frac{d(\tau \boldsymbol{t})}{ds},$$

weil $\frac{d(P-O)}{ds} = \boldsymbol{t}$ ist, und es folgt sonach aus (5) mit Rücksicht auf (6)

$$\int (P - O) \wedge \boldsymbol{F} ds + (P_1 - O) \wedge \boldsymbol{F}_1 + (P_0 - O) \wedge \boldsymbol{F}_0 = 0,$$

d. h. das Moment der Kräfte für einen beliebigen Punkt O verschwindet. Dies aber sind die beiden Bedingungen für das Gleichgewicht an einem starren Körper.

Lehnt sich der Faden an eine vollkommen glatte Oberfläche an, so können wir den Faden als frei schwebend voraussetzen, wenn wir nur noch in seinen verschiedenen Elementen ds Kräfte von der Form $R\boldsymbol{n}_1 ds$ anbringen, welche zu der Oberfläche senkrecht sind und deren Reaktion darstellen; $\boldsymbol{n}_1$ soll hierbei einen Einheitsvektor in der Flächennormale bezeichnen. So ergibt sich statt (5) die Gleichung

$$\boldsymbol{F} + R\boldsymbol{n}_1 + \frac{d(\tau \boldsymbol{t})}{ds} = 0. \tag{7}$$

2. Kartesische und natürliche Gleichungen. Wenn wir in bezug auf das Fundamentalsystem $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ die Komponenten der Kraft $\boldsymbol{F}$ mit X, Y, Z bezeichnen, so liefern die Gleichungen (5) und (6) das kartesische Gleichungssystem

$$X + \frac{d}{ds}\left(\tau \frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad Y + \frac{d}{ds}\left(\tau \frac{dy}{ds}\right) = 0, \quad Z + \frac{d}{ds}\left(\tau \frac{dz}{ds}\right) = 0 \tag{8}$$

und die Grenzbedingungen

$$X_0 + \tau_0 \left(\frac{dx}{ds}\right)_0 = 0, \quad X_1 - \tau_1 \left(\frac{dx}{ds}\right)_1 = 0 \tag{9}$$

samt den analogen Gleichungen für die y- und z-Richtung.

Im Falle des auf der Fläche

$$f(x, y, z) = 0$$

ruhenden Fadens erhalten wir, da die Komponenten des Vektors $\boldsymbol{n}_1$ den partiellen Derivierten der Funktion f proportional sind, aus (7)

$$X + \mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d}{ds}\left(\tau \frac{dx}{ds}\right) = 0 \tag{10}$$

und zwei analoge Gleichungen.

Um die natürlichen Gleichungen der Seilkurve zu finden, führen wir die Differentiation des Produkts in (5) aus und beachten, daß $\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \frac{1}{\varrho}\boldsymbol{n}$ ist. Dann ergibt sich

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{t}\frac{d\tau}{ds} + \boldsymbol{n}\frac{\tau}{\varrho} = 0;$$

bezeichnen wir also mit Θ, N, B die Komponenten des Kraftvektors $\boldsymbol{F}$ nach den Vektoren $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$, so haben wir

$$\Theta + \frac{d\tau}{ds} = 0, \quad \mathsf{N} + \frac{\tau}{\varrho} = 0, \quad \mathsf{B} = 0. \tag{11}$$

Dies sind die gesuchten Gleichungen.

Die erste dieser Gleichungen bleibt auch bestehen, wenn der Faden auf einer Fläche ruht. In der Tat verschwindet die Tangentialkomponente der Reaktionskraft, da diese zur Seilkurve senkrecht ist, und es bleibt für die auf das Fadenelement ds wirkenden Kräfte allein die Komponente Θ der äußeren Kräfte übrig.

Aus den Gleichungen (11) folgert man, daß die Kraft, die auf das Element ds wirkt, in der Schmiegungsebene der Seilkurve enthalten ist und ihre Normalkomponente in die negative Richtung der Hauptnormale fällt. Ist der Faden (gleichgültig, ob er frei hängt oder auf einer Fläche ruht) nur den an seinen Enden wirkenden Kräften unterworfen, so wird $\Theta = 0$, mithin $\tau =$ konst., die Spannung im Innern des Fadens ist also konstant. Unter dieser Voraussetzung muß die Normalkomponente N, wenn der Faden über eine Fläche gespannt ist, allein von der Reaktion dieser Fläche herrühren: die Hauptnormale der Kurve fällt dann mit der Flächennormale zusammen und der Faden bildet auf der Fläche eine kürzeste (geodätische) Linie. —

Wir können uns nun allgemein folgende zwei Aufgaben stellen:

1. Wenn die Gestalt des Fadens gegeben ist, die Verteilung der wirkenden Kräfte zu finden, für die Gleichgewicht besteht.

2. Wenn die Verteilung der Kräfte gegeben ist, die Gleichgewichtsfigur des Fadens zu bestimmen.

Die Lösung dieser beiden Aufgaben wollen wir im folgenden versuchen.

3. Auflösung der ersten Aufgabe. Man kann die erste Aufgabe so lösen, daß man verlangt, die Gleichungen (11) sollen bei gegebener Seilkurve für geeignete Wahl der Funk-

tion τ erfüllt sein. Eliminiert man aber aus den beiden ersten Gleichungen τ, so erhält man

$$\Theta = \frac{d(\mathsf{N}\varrho)}{ds}.$$

Wenn diese Gleichung für gegebene Gestalt des Fadens erfüllt sein soll, so kann man in der Schmiegungsebene die Normalkomponente der an der betreffenden Fadenstelle ds wirkenden Kraft noch beliebig annehmen; durch die Normalkomponenten werden dann die Tangentialkomponenten mit Hilfe der vorstehenden Gleichung eindeutig bestimmt, und die Spannung ergibt sich aus der Gleichung

$$\tau = \mathsf{N}\varrho,$$

auch für die Enden des Fadens, wo sie die dort wirkenden Kräfte liefert.

4. Auflösung der zweiten Aufgabe. Wenn die Endpunkte des Fadens befestigt sind, so können die wirkenden Kräfte über den Faden beliebig verteilt sein, der Faden wird unter ihrer Einwirkung eine bestimmte Gestalt annehmen und die Kräfte, die auf ihn durch die Befestigungspunkte ausgeübt werden, werden derart sein, daß sie den anderen auf den Faden wirkenden Kräfte wie Kräfte an einem starren Körper das Gleichgewicht halten.

Wir wollen die abkürzenden Bezeichnungen

$$\tau' = \frac{d\tau}{ds}, \quad x' = \frac{dx}{ds}, \quad x'' = \frac{d^2x}{ds^2} \quad \text{usw.}$$

anwenden und können dann die Gleichungen (8), indem wir die Differentiation des Produktes ausführen, schreiben wie folgt

$$X + \tau'x' + \tau x'' = 0,$$
$$Y + \tau'y' + \tau y'' = 0,$$
$$Z + \tau'z' + \tau z'' = 0,$$

wozu noch die Gleichung kommt

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Diese Gleichungen sind als vier Differentialgleichungen für die vier unbekannten Funktionen τ, x, y, z von s anzusehen, während X, Y, Z als Funktionen von s allein oder, um

einen allgemeineren Fall zu nehmen, von s, x, y, z, x', y', z' gegeben sind.

Die Auflösung der Gleichungen kann nun wie folgt geschehen: Man differenziere die ersten drei Gleichungen viermal nach s, die letzte fünfmal nach s, dann erhält man im ganzen 21 Gleichungen, in denen außer s die Koordinaten x, y, z mit ihren sechs ersten und die Spannung τ mit ihren fünf ersten Derivierten vorkommt. Man kann aus den 21 Gleichungen 20 von diesen 28 Größen eliminieren, z. B. y, z und τ mit allen ihren Derivierten, dann erhält man als Eliminationsresultat eine Gleichung von der Form

$$\varphi(x, x', \dots x^{\mathrm{VI}}, s) = 0.$$

Auf die Integration dieser gewöhnlichen Differentialgleichung sechster Ordnung für x als Funktion von s kann man sonach das Problem zurückführen. Ihre allgemeine Lösung hängt von sechs willkürlichen Konstanten $c_1, c_2, \dots c_6$ ab, ist also von der Form

$$x = \psi(s, c_1, c_2, \dots c_6).$$

Die sukzessiven Derivierten von x sind dann sofort zu finden.

Eliminiert man aus 20 der 21 Gleichungen dieselben Größen wie vorhin, nur mit Ausnahme von y, z oder τ selbst, so erhält man drei Gleichungen von folgender Form

$$\varphi_1(y, x, x', \dots x^{\mathrm{VI}}, s) = 0,$$
$$\varphi_2(z, x, x', \dots x^{\mathrm{VI}}, s) = 0,$$
$$\varphi_3(\tau, x, x', \dots x^{\mathrm{VI}}, s) = 0.$$

Setzt man hierin die gefundenen Werte für x und seine Derivierten ein und berechnet aus ihnen die in ihnen enthaltenen Größen y, z, τ, die sich so als Funktionen von s ergeben, so ist die Aufgabe gelöst. Weitere Integrationen sind zu ihrer Lösung also nicht erforderlich.

Die sechs Konstanten $c_1, c_2, \dots c_6$ werden sofort dadurch bestimmt, daß die Endpunkte des Fadens fest sein, also bestimmt gegebene Koordinatenwerte besitzen sollen. In der Tat ergeben sich so sechs unabhängige Gleichungen, die gestatten $c_1, c_2, \dots c_6$ zu bestimmen.

Auf ähnliche Weise ergibt sich, wenn der Faden auf einer Fläche aufliegt, also für die Koordinaten x, y, z seiner Punkte von vornherein eine endliche Gleichung

$$f(x, y, z) = 0$$

gegeben ist, daß die Bestimmung der Gleichgewichtsfigur von der Integration einer Differentialgleichung *vierter* Ordnung abhängt. Die vier willkürlichen Konstanten, die ihre allgemeine Lösung enthält, bestimmen sich dadurch, daß die Endpunkte des Fadens auf der Fläche gegeben sind. So ergeben sich in der Tat vier unabhängige Bedingungen für diese Konstanten.

5. Besondere Fälle der Seilkurve. Die wirkliche Ausführung des in dem vorigen Paragraphen dem Prinzip nach angegebenen Integrationsverfahrens unterliegt den größten Schwierigkeiten. Nur in einzelnen Fällen, die aber noch immer hinlänglich allgemein sind, können wir gewisse Integrale der Gleichgewichtsgleichungen angeben und sie benutzen, um entweder direkt die Lösung der Aufgabe zu finden oder wenigstens die Ordnung der aufzulösenden Differentialgleichung herabzudrücken.

a) Wir beginnen mit der Bemerkung, daß, im Falle die Kräfte Funktionen des Bogens allein sind, das Problem sich auf bloße Quadraturen zurückführen läßt. In der Tat ergibt sich in diesem Falle aus (5) durch Integration

$$\int \boldsymbol{F} ds + \tau \boldsymbol{t} = \boldsymbol{c},$$

wenn das Integral von P_0 bis P erstreckt wird und $\boldsymbol{c}$ einen konstanten Vektor bezeichnet. Aus dieser Gleichung finden wir $\tau \boldsymbol{t}$, und indem wir durch den Modul τ dieses Vektors dividieren, die Komponenten von $\boldsymbol{t}$ in der Form

$$x' = \varphi_1(s), \quad y' = \varphi_2(s), \quad z' = \varphi_3(s).$$

b) Die Kräfte besitzen ein Potential V, d. h. es existiert eine Funktion V der Koordinaten des Punktes P allein von der Art, daß

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} V$$

wird. Multiplizieren wir die Gleichung (5) oder (7) mit $dP = t ds$, so ergibt sich sofort

$$dV + d\tau = 0,$$

woraus

$$\tau = -V + h, \tag{12}$$

indem h eine Konstante bezeichnet. Dieses Integral, welches die Spannung bis auf eine Konstante liefert, bleibt unter den gleichen Voraussetzungen auch bestehen, wenn der Faden auf einer Fläche liegt.

c) Die Kräfte sind Zentralkräfte, d. h. konvergieren nach einem Punkte O. Wir haben dann

$$F \wedge (P - O) = 0.$$

Infolgedessen ergibt sich aus der Gleichung

$$F + \frac{d(\tau t)}{ds} = 0,$$

wenn wir sie vektoriell mit $P - O$ multiplizieren,

$$(P - O) \wedge \frac{d(\tau t)}{ds} = 0,$$

oder

$$\frac{d}{ds}[(P - O) \wedge \tau t] = 0,$$

denn es ist $t = \frac{d(P-O)}{ds}$ und somit $\frac{d(P-O)}{ds} \wedge \tau t = 0$. Aus der vorstehenden Gleichung folgt aber

$$(P - O) \wedge \tau t = g, \tag{13}$$

wenn g einen konstanten Vektor bezeichnet. Multiplizieren wir die letzte Gleichung skalar mit $P - O$, so ergibt sich links null und somit wird

$$g \times (P - O) = 0, \tag{14}$$

d. h. aber, P liegt in einer bestimmten (zu dem Vektor g senkrechten) Ebene durch den Punkt O, d. h. die ganze Seilkurve liegt in einer durch O gehenden Ebene.

d) Die Kräfte sind parallel und von der Bogenlänge unabhängig. Die Seilkurve muß dann nach dem soeben gewonnenen Resultat, indem wir nur den Punkt O in unendliche Entfernung rücken lassen, einer Ebene angehören,

die der Richtung der Kräfte parallel ist. Diese Ebene sei die xz-Ebene und die z-Achse sei den Kräften parallel. Dann wird für alle Punkte der Seilkurve $y = 0$, für die Kräfte $X = 0$, $Y = 0$ und die Gleichungen (8) liefern

$$\frac{d}{ds}\left(\tau \frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad Z + \frac{d}{ds}\left(\tau \frac{dz}{ds}\right) = 0.$$

Also wird zunächst

$$\tau \frac{dx}{ds} = c,$$

wobei wir die Konstante $c > 0$ voraussetzen können. Für die Punkte der Seilkurve ist z eine Funktion von x; setzen wir $p = \frac{dz}{dx}$, so ergibt sich

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Also wird

$$\tau = c\sqrt{1+p^2}$$

und

$$Z + \frac{c}{\sqrt{1+p^2}} \frac{dp}{dx} = 0. \tag{15}$$

Da aber Z, d. h. die Intensität der (auf die Längeneinheit des Fadens verrechneten) Kraft, nach Voraussetzung nur von x, z, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ abhängt, also von x, z, p, so ist die zuletzt gefundene Gleichung die Differentialgleichung zweiter Ordnung, auf deren Lösung sich das Problem reduziert. Ihr Integral

$$z = \varphi(x, c, c_1, c_2)$$

ist die Gleichung der Seilkurve. Die drei Konstanten in dieser Gleichung werden bestimmt, wenn wir die Endpunkte des Fadens in seiner Ebene und außerdem die Länge des Fadens vorschreiben.

Die Integration von (15) läßt sich in vielen Fällen ausführen und reduziert sich auf bloße Quadraturen, wenn Z nur von x, nur von z oder nur von p abhängt.

6. Die Kettenlinie. Wir nehmen an, daß Z nur von x abhängt. Dann wird die Gleichung (15) von der Form

$$F(x)\,dx + \frac{c\,dp}{\sqrt{1+p^2}} = 0.$$

Wir führen nun eine neue Variable u ein durch die Gleichung

$$p = \mathfrak{Sin}\, u,$$

indem wir mit $\mathfrak{Sin}\, u = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u})$ den hyperbolischen Sinus von u bezeichnen. Dann wird die Differentialgleichung

$$F(x)\, dx + c\, du = 0$$

und es folgt

$$u = \frac{1}{c}\left[c_1 - \int F(x)\, dx\right].$$

Diese Funktion von x, die eine neue Integrationskonstante c_1 enthält, wollen wir mit $f(x)$ bezeichnen. Es wird dann

$$p = \mathfrak{Sin}\, f(x)$$

und nach einer neuen Integration

$$z = c_2 + \int \mathfrak{Sin}\, f(x)\, dx.$$

Dies ist die Gleichung der Kurve; außerdem ergibt sich

$$ds = \sqrt{1 + p^2} \cdot dx = \mathfrak{Cof}\, f(x) \cdot dx.$$

Wir betrachten insbesondere den Fall, wo Z konstant ist, was z. B. eintritt, wenn es sich um einen homogenen, überall gleich dicken Faden (oder eine Kette) handelt und Z das Gewicht der Längeneinheit bedeutet. Wir wollen dies Gewicht mit P bezeichnen, wir finden dann, da $F(x) = -P$ ist,

$$u = f(x) = \frac{1}{c}(c_1 + Px) = \frac{P}{c}(x - x_0),$$

$$z = z_0 + \frac{c}{P}\int \mathfrak{Sin}\, u\, du = z_0 + \frac{c}{P}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{P}{c}(x - x_0),$$

wenn wir hier $c_1 = -Px_0$ und $c_2 = z_0$ setzen.

Verlegen wir durch Parallelverschiebung des Koordinatensystems den Ursprung in den Punkt $O_1(x_0, z_0)$, nennen x_1, z_1 die neuen Koordinaten, setzen also $x_1 = x - x_0$, $z_1 = z - z_0$ und ferner $c = Pa$, so finden wir

$$z_1 = a\,\mathfrak{Cof}\,\frac{x_1}{a}. \tag{16}$$

Dies ist die einfachste Gleichung der gewöhnlichen Kettenlinie (Catenaria). Die Kurve läßt sich sofort rektifizieren, da

$$ds = \mathfrak{Cof}\,\frac{x_1}{a}\,dx_1$$

wird. Es ergibt sich

$$s = s_0 + a\,\mathfrak{Sin}\,\frac{x_1}{a}. \tag{17}$$

Wir haben jetzt noch die drei Konstanten x_0, s_0, c durch die Aufhängepunkte und die Länge des Fadens festzulegen. Der anfängliche Ursprung O sei der niedrigere Aufhängepunkt, α, β die Koordinaten des anderen A. Dann folgt aus (16) und (17)

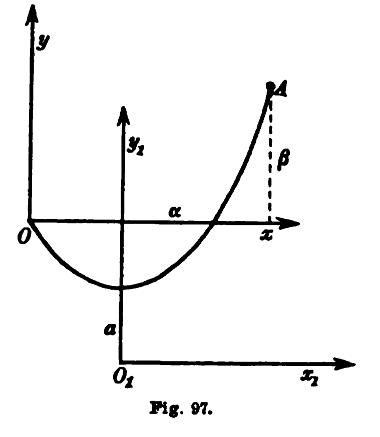


Fig. 97.

$$-s_0 = a\,\mathfrak{Cof}\,\frac{-x_0}{a},$$

$$\beta - s_0 = a\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\alpha - x_0}{a},$$

$$l = a\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\alpha - x_0}{a} - a\,\mathfrak{Sin}\,\frac{-x_0}{a},$$

oder

$$l = a\left(\mathfrak{Sin}\,\frac{\alpha - x_0}{a} + \mathfrak{Sin}\,\frac{x_0}{a}\right) = 2a\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\alpha}{2a}\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{\alpha}{2a} - \frac{x_0}{a}\right),$$

$$\beta = a\left(\mathfrak{Cof}\,\frac{\alpha - x_0}{a} - \mathfrak{Cof}\,\frac{x_0}{a}\right) = 2a\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\alpha}{2a}\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{\alpha}{2a} - \frac{x_0}{a}\right),$$

und daraus

$$l^2 - \beta^2 = 4a^2\,\mathfrak{Sin}^2\,\frac{\alpha}{2a}.$$

Demnach erhalten wir für $\xi = \alpha : 2a$ die transzendente Gleichung

$$\frac{\mathfrak{Sin}\,\xi}{\xi} = \frac{\sqrt{l^2 - \beta^2}}{\alpha}. \tag{18}$$

Haben wir deren Lösung gefunden, so ist a bestimmt. Wir finden dann x_0 oder zunächst $\frac{x_0}{a}$ aus einer der beiden Gleichungen für l und β oder auch aus der hieraus folgenden Gleichung

$$l \operatorname{Cof} \frac{\alpha}{2a} - \beta \operatorname{Sin} \frac{\alpha}{2a} = 2a \operatorname{Sin} \frac{\alpha}{2a} \operatorname{Cof} \frac{x_0}{a}.$$

Endlich haben wir

$$z_0 = -a \operatorname{Cof} \frac{x_0}{a}.$$

Die Gleichung (18) läßt sich auf graphischem Wege lösen, indem man in einer $\xi\eta$-Ebene die Kurve

$$\eta = \frac{\operatorname{Sin} \xi}{\xi}$$

mit der Geraden

$$\eta = \frac{\sqrt{l^2 - \beta^2}}{\alpha}$$

zum Schnitt bringt. Die Zeichnung der betreffenden Kurve läßt sich mit Hilfe einer Tafel der hyperbolischen Funktionen auf Millimeterpapier leicht ausführen. Die Kurve hat eine parabelähnliche Gestalt. Ihr Scheitel liegt auf der η-Achse und hat die Ordinate 1. Nach beiden Seiten steigt die Kurve vom Scheitel aus beständig an, und für $\xi = \pm \infty$ wird auch die Ordinate $\eta = \infty$.

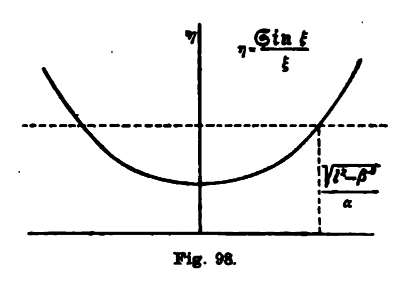


Fig. 98.

Die Gleichung (18) liefert daher nur dann eine Lösung, wenn die rechte Seite > 1, also

$$l^2 \geqq \alpha^2 + \beta^2$$

ist. Diese Bedingung sagt aus, daß die Länge des Fadens mindestens so groß sein muß wie die kürzeste Entfernung der Aufhängepunkte O und A, was an sich klar ist.

Mit einem Werte $+\xi$ ist auch der Wert $-\xi$ eine Lösung der Gleichung (18). Dieser negativen Lösung entspricht eine Kettenlinie, die ihre konkave Seite nach unten kehrt. Eine solche Gestalt des Fadens bedeutet aber eine labile Gleichgewichtsfigur, während im Fall der hängenden Kettenlinie das Gleichgewicht stabil ist.

Übungsbeispiele.

1. Aufgabe. *Ein Faden ist in zwei Punkten A und B an einer Geraden a befestigt und rotiert mit gleichförmiger Rotationsgeschwindigkeit ω um diese Gerade. Man soll die Gestalt bestimmen, die er annimmt.*

Auflösung. Die Zentrifugalkräfte, die auf den Faden wirken, sind, wenn y den Abstand eines Punktes des Fadens von der Achse a bedeutet, von der Größe $\omega^2 y$ und ihre Wirkungslinien treffen die Achse unter rechtem Winkel. Wir nennen $\boldsymbol{F}ds$ den Vektor dieser Kraft für das Element ds der Fadenkurve beim Punkte P, und haben dann die Grundgleichung

$$\boldsymbol{F} + \frac{d}{ds}(\tau \boldsymbol{t}) = 0.$$

Diese Gleichung multiplizieren wir vektoriell mit $P - A$ und finden, da $\tau \boldsymbol{t} \wedge \frac{d(P-A)}{ds} = 0$ wird,

$$\boldsymbol{F} \wedge (P - A) + \frac{d}{ds}[\tau \boldsymbol{t} \wedge (P - A)] = 0.$$

Diese neue Gleichung multiplizieren wir noch skalar mit $B - A$, dann wird nach der Voraussetzung über die Kraft $\boldsymbol{F}$

$$\boldsymbol{F} \wedge (P - A) \times (B - A) = 0,$$

also

$$\frac{d}{ds}[\tau \boldsymbol{t} \wedge (P - A) \times (B - A)] = 0$$

und daraus

$$\tau \boldsymbol{t} \wedge (P - A) \times (B - A) = 0,$$

denn die Integrationskonstante muß verschwinden, da die linke Seite für $P = A$ verschwindet. Die gefundene Gleichung sagt aber aus, daß die Tangente $\boldsymbol{t}$ mit den Punkten A, B, P in einer Ebene liegt, also liegt die ganze Kurve in einer Ebene durch die Achse.

Wir haben demnach nur mit zwei Koordinatenachsen x, y, von denen die erste in die Achse a fällt, zu operieren und finden aus der Grundgleichung

$$\frac{d}{ds}\left(\tau \frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad \omega^2 y + \frac{d}{ds}\left(\tau \frac{dy}{ds}\right) = 0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$\tau \frac{dx}{ds} = c.$$

Setzen wir entsprechend

$$\tau \frac{dy}{ds} = cy', \quad \text{also} \quad y' = \frac{dy}{dx},$$

so folgt
$$\tau = c\sqrt{1+y'^2}$$
und es wird die zweite Gleichung
$$\omega^2 y + c\frac{dy'}{ds} = 0 \quad \text{oder} \quad 2y\,dy + a^2\frac{y'dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$$
für $a^2 = \frac{2c}{\omega^2}$. Hieraus ergibt sich durch Integration
$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{b^2-y^2}{a^2},$$
wenn wir die Integrationskonstante mit b^2 bezeichnen. Damit y' für $y = 0$, d. h. für die Punkte A und B, reell ist, muß $b > a$ sein. Aus der vorstehenden Gleichung folgt
$$y'^2 = \frac{(b^2-y^2)^2-a^4}{a^4} = f(y)$$
und
$$x = \int\limits_0^y \frac{dy}{\sqrt{f(y)}}.$$

Dieses Integral ist ein elliptisches Integral erster Gattung. Setzen wir
$$y = \sqrt{b^2-a^2}\cdot\sin\varphi$$
und
$$\Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}$$
für $k^2 = \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2} > 0$, so ergibt sich
$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$
Man bezeichnet nach Jacobi φ als die Amplitude (am) dieses Integrals und hat dann
$$y = \sqrt{b^2-a^2}\cdot\sin\operatorname{am}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2}x.$$
Dies ist die Gleichung der gesuchten Kurve. Es ergibt sich sofort, daß der Maximalwert von $y = \sqrt{b^2-a^2}$ ist. Ferner ist a priori einzusehen, daß die Kurve symmetrisch sein wird, das Maximum also für die Mitte zwischen A und B erreicht wird. Der zugehörige Wert von φ ist $\frac{\pi}{2}$. So folgt für den Abstand c der beiden Punkte A und B
$$c = \frac{2a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Ferner ergibt sich für die Länge der ganzen Kurve, da

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx = \frac{b^2 - y^2}{a^2} dy$$

wird,

$$l = \frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b^2 - (b^2 - a^2) \sin \varphi^2}{\Delta \varphi} d\varphi .$$

Die hieraus folgende transzendente Gleichung für k^2

$$\frac{l - c}{l + c} = k^2 \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi^2 \, d\varphi}{\Delta \varphi}}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta \varphi \, d\varphi}$$

läßt sich mit Hilfe von Tabellen lösen. Es ist natürlich $l > c$, die linke Seite also ein positiver echter Bruch, und das gleiche gilt auch von k; die rechte Seite der Gleichung aber wächst von 0 bis 1, wenn k von 0 bis 1 geht, also ist stets eine Wurzel vorhanden.

Die gefundene Kurve wird als Springseilkurve (courbe à sauter) bezeichnet, da das von Mädchen zum Springen benutzte Seil ungefähr diese Form annimmt.

Vgl. Appell et Lacour, Principes de la théorie des fonctions elliptiques, 1897, p. 188; Greenhill, Applications of elliptic functions, 1892, p. 67; Loria, Spezielle ebene Kurven, S. 513; Marcolongo, Rendic. della R. Accad. di Napoli (2) vol. 7, 1892, p. 71.

2. Aufgabe. *Zu beweisen, daß, wenn die an dem Faden angreifenden Kräfte F Zentralkräfte sind und ein System von Polarkoordinaten r, θ auf das Attraktionszentrum O bezogen wird, die Gleichungen bestehen*

$$\tau r^2 \frac{d\theta}{ds} = c, \quad F = c \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 \sqrt{r^2 + r'^2}},$$

wobei F die Größe der auf die Längeneinheit verrechneten Kraft ist.

Auflösung. Nach Gleichung (13) ist

$$\tau r \sin \varphi = c,$$

wenn φ der Winkel zwischen der Tangente und dem Radiusvektor und c eine Konstante bezeichnet. Aus dem unendlich schmalen von O ausgehenden Dreieck, in dem zwei Seiten ds und r, und die gegen-

überliegenden Winkel $d\theta$ und φ sind, folgt aber sofort $\sin\varphi = r\frac{d\theta}{ds}$, also wird

$$\tau r^2 \frac{d\theta}{ds} = c.$$

Wir multiplizieren jetzt die Gleichung

$$\mathfrak{F} + \frac{d(\tau\mathfrak{t})}{ds} = 0$$

skalar mit $\mathfrak{t}\,ds$ und beachten, daß $\mathfrak{F} \times \mathfrak{t}\,ds = \mathfrak{F}\,d\mathfrak{r}$ wird und $\frac{d\mathfrak{t}}{ds} \times \mathfrak{t} = \frac{1}{2}\frac{d(\mathfrak{t}^2)}{ds} = 0$, weil $\mathfrak{t} \times \mathfrak{t} = \mathfrak{t}^2 = 1$. Wir finden dann

$$F dr + d\tau = 0.$$

Führen wir nun ein

$$\tau = \frac{c}{r^2}\cdot\frac{ds}{d\theta} = \frac{c}{r^2}\sqrt{r^2 + r'^2},$$

indem wir $r' = \frac{dr}{d\theta}$ setzen, so erhalten wir

$$F = -\frac{d\tau}{dr} = -\frac{c}{r'}\frac{d}{d\theta}\frac{\sqrt{r^2 + r'^2}}{r^2} = c\,\frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^3\sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

3. Aufgabe. *Unter den Voraussetzungen der vorigen Aufgabe die Größe F der Kraft zu finden, wenn die Seilkurve eine logarithmische Spirale ist.*

Auflösung. Wird $r = e^{m\theta}$, so ergibt sich

$$\tau = c\,\frac{\sqrt{r^2 + r'^2}}{r^2} = c\,\frac{\sqrt{1 + m^2}}{r}$$

und somit

$$F = \frac{c\sqrt{1 + m^2}}{r^2},$$

die Kraft ist also dem Quadrat des Abstandes umgekehrt proportional.

4. Aufgabe. *Die Gleichgewichtsfigur des Fadens zu finden, wenn die auf ihn wirkenden Zentralkräfte bloße Funktionen der Entfernung r sind.*

Auflösung. Ist $F = \varphi'(r)$, so ergibt die Gleichung $F dr + d\tau = 0$

$$\tau = h - \varphi(r),$$

wenn h eine Konstante bezeichnet. Dann aber folgt weiter aus $\tau^2 r^4 = c^2\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = c^2\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]$

$$d\theta = \frac{c\,dr}{r\sqrt{r^2[h - \varphi(r)]^2 - c^2}}.$$

Durch Integration findet man hieraus die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten.

Nehmen wir insbesondere

$$h = 0, \quad \varphi(r) = -kr, \quad \text{mithin} \quad \tau = kr,$$

so läßt sich, wenn wir

$$kr^2 = \frac{c}{u} = \frac{c}{\cos\varphi}$$

setzen, die Integration sofort ausführen. Es ergibt sich

$$\theta = -\tfrac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \tfrac{1}{2}\int d\varphi = \theta_0 + \tfrac{1}{2}\varphi,$$

wenn wir die Integrationskonstante θ_0 nennen. Setzen wir also

$$r\cos(\theta - \theta_0) = x, \quad r\sin(\theta - \theta_0) = y,$$

so folgt aus $kr^2\cos\varphi = c$ oder $kr^2\cos 2(\theta - \theta_0) = c$

$$x^2 - y^2 = \frac{c}{k}.$$

Die Kurve ist also eine gleichseitige Hyperbel.

5. Aufgabe. *Ein an zwei Punkten aufgehängter Faden ist parallelen Kräften unterworfen, die der Spannung proportional sind. Die Gleichgewichtsfigur zu finden.*

Auflösung. Wir haben in die Gleichung (15) einzusetzen

$$Z = \alpha\tau = \alpha c\sqrt{1 + p^2}$$

und erhalten

$$\frac{dp}{dx} = -\alpha(1 + p^2), \quad p = \frac{dz}{dx}.$$

Hieraus folgt

$$p = -\operatorname{tang}(\alpha x), \quad z = \frac{1}{\alpha}\log\cos(\alpha x).$$

Damit ist die Kurve gefunden (vgl. Fig. 99). Beachten wir noch, daß

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + p^2} = \frac{1}{\cos\alpha x},$$

so finden wir durch Integration

$$\mathfrak{Cof}(\alpha s) = \frac{1}{\cos(\alpha x)}.$$

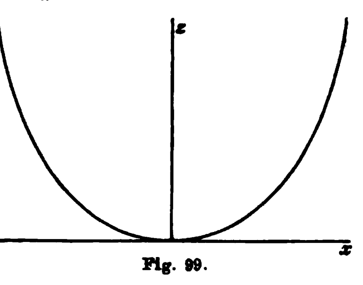


Fig. 99.

In der Tat folgt durch Differentiation dieser Gleichung

$$\mathfrak{Sin}(\alpha s)\,ds = \frac{\sin(\alpha x)}{\cos(\alpha x)^2}\,dx$$

und andererseits ergibt sich

$$\mathfrak{Sin}(\alpha s) = \operatorname{tang}(\alpha x);$$

so gelangt man wieder zu der vorhergehenden Gleichung. Daraus, daß der Winkel φ, den die Tangente mit der x-Achse bildet, gleich $-\alpha x$, also der Krümmungsradius

$$\varrho = -\frac{ds}{dx} : \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{\alpha \cos(\alpha x)}$$

wird, finden wir

$$\alpha\varrho = \mathfrak{Cof}(\alpha s).$$

Dies ist die natürliche Gleichung der Kurve, welche dieselbe Form hat wie die kartesische Gleichung der Kettenlinie.

Die vorausgesetzten Bedingungen sind bei einem homogenen schweren Seil verwirklicht, dessen Dicke von einem Punkte zum anderen proportional der Spannung variiert und deshalb in keinem Punkte eine größere Gefahr des Reißens darbietet als in einem anderen Punkte. Daher der Name Kettenlinie gleichen Widerstandes. Vgl. Davies Gilbert, On the mathematical Theory of Suspension bridges, Philos. Transact., part. III, p. 202 (1826); Coriolis, Journ. de Math., t. 1, p. 75 (1836); Loria, Spezielle ebene Kurven, S. 580. Die natürliche Gleichung der Kurve ist von Minchin in seinem Treatise on Statics (1872) gegeben worden.

6. Aufgabe. *Die Gleichgewichtsfigur eines Fadens zu bestimmen, wenn seine Teile von vertikalen Kräften angegriffen werden, die den horizontalen Projektionen der einzelnen Teile proportional sind.*

Auflösung. Es wird hier

$$Z\,ds = k^2 dx$$

und somit ergibt sich aus den Gleichungen unter § 5, d)

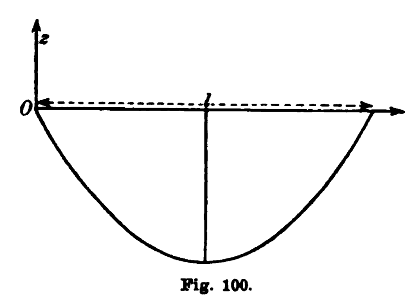


Fig. 100.

$$\tau\frac{dx}{ds} = c, \quad \tau\frac{dz}{ds} = k^2 x + ac,$$

wenn ac die Integrationskonstante bedeutet. Demnach wird

$$\frac{dz}{dx} = \frac{k^2}{c}x + a$$

und daraus folgt durch Integration

$$z = \frac{k^2}{2c}x^2 + ax + b.$$

Diese Kurve ist eine Parabel mit vertikaler Achse und wird als die Hängebrückenkurve bezeichnet.

Die Konstanten a, b kann man dadurch bestimmen, daß $z = 0$ sein soll für $x = 0$ und $x = l$. Dann wird die Kurvengleichung

$$z = -\frac{k^2}{2c}\, x\,(l - x).$$

Der Scheitel der Parabel gehört zu der Abszisse $x = \frac{l}{2}$. Da die Neigung φ der Parabel gegen die Abszissenachse vom Scheitel ausgehend nach beiden Seiten zunimmt und $\tau = \frac{c}{\cos\varphi}$ wird, ist die Spannung am größten an den Enden der Seilkurve.

7. **Aufgabe.** *Eine homogene Kette wird mit der konvexen unteren Fläche eines vertikal gestellten kreisförmigen Reifens in Kontakt erhalten durch zwei gleiche nach oben gerichtete Kräfte, die an den Enden A, B des horizontalen Durchmessers angreifen und gerade ausreichen, um die Kette anzudrücken. Man soll die Spannungen in der Kette finden.*

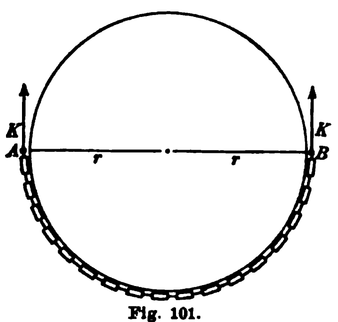


Fig. 101.

Auflösung. Wir denken uns die Kette in einem Punkte P durchschnitten und an dem Stück AP das Gleichgewicht in derselben Lage erhalten durch die an der durchschnittenen Stelle angreifende Spannungskraft τ, die mit der Vertikalen den Winkel θ bilde; K sei die in A angreifende Kraft, r der Radius des Reifens, $\varkappa g$ das Gewicht der Längeneinheit der Kette, dann werden die Tangential- und die Normalkomponente der auf ein Element ds der Kette wirkenden Spannungskräfte, auf die Längeneinheit verrechnet,

$$\Theta = \frac{d\tau}{ds}, \quad \mathsf{N} = \frac{\tau}{r}$$

und es ergibt sich die Gleichung

$$\tau - K = \int \frac{d\tau}{ds}\, ds = -\varkappa g r \int_0^\theta \cos\theta\, d\theta, \quad \text{also} \quad \tau = K - \varkappa g r \sin\theta.$$

Ferner wird

$$\mathsf{N} = \frac{\tau}{r} = R + \varkappa g \sin\theta,$$

wenn R den Druck des Reifens auf die Kette bedeutet. Daraus folgt

$$R = \frac{\tau}{r} - \varkappa g \sin\theta = \frac{K}{r} - 2\varkappa g \sin\theta.$$

Für $\theta = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich insbesondere die Reaktionskraft im tiefsten Punkte

$$R_0 = \frac{K}{r} - 2\varkappa g.$$

Reichen die Kräfte K aber nur eben hin, um die Kette anzudrücken, so muß $R_0 = 0$ sein, also

$$K = 2\varkappa g r.$$

Dann ergibt sich

$$\tau = \varkappa g r (2 - \sin\theta),$$

insbesondere im tiefsten Punkte

$$\tau = \varkappa g r.$$

(Andrew Gray, Lehrbuch der Physik, deutsch von Auerbach, 1. Band, 1904, S. 367.)

8. Aufgabe. *Die homogene Kettenlinie auf einer geneigten Ebene zu finden.*

Auflösung. Gehen wir von der Gleichung (8) aus und lösen die Vektoren in ihre rechtwinkligen Komponenten auf, indem wir die geneigte Ebene zur xy-Ebene wählen, so werden die Komponenten der wirkenden Kraft F

$$0, \quad -P\sin\alpha, \quad -P\cos\alpha,$$

wobei α die Neigung der Ebene gegen den Horizont bedeutet. Die Reaktionskraft R der Ebene fällt in die Vertikale der Ebene, d. h. in die z-Achse. Beachten wir noch, daß $\frac{dz}{ds} = 0$ ist, so folgen die Gleichungen

$$\frac{d}{ds}\left(\tau\frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad -P\sin\alpha + \frac{d}{ds}\left(\tau\frac{dy}{ds}\right) = 0,$$
$$-P\cos\alpha + R = 0.$$

Die ersten beiden Gleichungen sind aber dieselben wie bei dem Problem der vertikalen Kettenlinie, nur daß P durch $P\sin\alpha$ ersetzt ist. Wir erhalten also auch hier eine gewöhnliche Kettenlinie.

9. Aufgabe. *Die Gleichgewichtsfigur eines auf einer Kugel ruhenden homogenen schweren Fadens zu finden.*

Auflösung. Es existiert hier ein Potential der wirkenden Kräfte

$$V = -\varkappa g z,$$

daher wird nach (12)

$$\tau = h + \varkappa g z. \tag{a}$$

Die Flächennormale n_1 fällt mit dem Radius der Kugel $P-M$ zusammen. Deshalb wird die Gleichung des Gleichgewichts (7)

$$-\varkappa g v + \varrho(P-M) + \frac{d(\tau t)}{ds} = 0,$$

wenn v den vertikalen Einheitsvektor bezeichnet. Diese Gleichung behandeln wir genau so wie die Gleichung in der 1. Aufgabe. Wir multiplizieren sie zuerst vektoriell mit $P-M$ und dann skalar mit v. Bei der ersteren Operation fällt das zweite Glied, bei der letzteren das erste Glied weg, und wir erhalten

$$\frac{d}{ds}[\tau t \wedge (P-M) \times v] = 0$$

oder

$$\tau t \wedge (P-M) \times v = c.$$

Wir führen nun ein

$$P - M = x e_1 + y e_2 + z e_3, \quad t = x' e_1 + y' e_2 + z' e_3$$

und $v = e_3$, dann wird die vorhergehende Gleichung

$$\tau(xy' - yx') = c. \tag{b}$$

Um diese Gleichung umzuformen, gehen wir aus von der Identität

$$(xy' - yx')^2 = (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) - (xx' + yy')^2$$

und beachten noch, daß

$$(P-M) \times t = 0 \quad \text{oder} \quad xx' + yy' + zz' = 0,$$

ferner $(P-M)^2 = a^2$, $t^2 = 1$ oder

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

ist, wenn a den Kugelradius bezeichnet. Daraus folgt

$$(xy' - yx')^2 = (a^2 - z^2)(1 - z'^2) - z^2 z'^2$$
$$= a^2 - z^2 - a^2 z'^2$$

und sonach erhält man aus (b)

$$a z' = a\frac{dz}{ds} = \frac{1}{\tau}\sqrt{f(z)} \quad \text{für} \quad f(z) = (a^2 - z^2)\tau^2 - c^2, \tag{c}$$

wobei der Wert (a) für τ einzusetzen ist. Da ferner

$$xy' - yx' = x^2 \frac{d}{ds}\left(\frac{y}{x}\right) = (x^2 + y^2)\frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

ist, ergibt sich aus (b) und $x^2 + y^2 = a^2 - z^2$

$$\frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{c}{(a^2 - z^2)\tau}. \tag{d}$$

Führt man nun auf der Kugel die geographischen Koordinaten φ, λ ein durch die Gleichungen

$$x = a \cos\varphi \cos\lambda, \quad y = a \cos\varphi \sin\lambda, \quad z = a \sin\varphi,$$

so wird die Gleichung (d), da $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \lambda$,

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{c}{\tau a^2 \cos\varphi^2}.$$

Ferner ist

$$a\frac{dz}{ds} = a^2 \cos\varphi \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\tau} \sqrt{a^2 \cos\varphi^2 (a\varkappa g \sin\varphi + h)^2 - c^2}$$

und sonach wird

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{c}{\cos\varphi \sqrt{a^2 \cos\varphi^2 (a\varkappa g \sin\varphi + h)^2 - c^2}}.$$

Dies ist die Gleichung der sphärischen Kettenlinie. Vgl. Greenhill, The spherical catenary, Proceedings of the London Math. Society, vol. 27, 1896.

10. Aufgabe. *In die Gleichgewichtsgleichungen für einen auf einer Fläche ruhenden Faden die Krümmungsgrößen der Fläche einzuführen.*

Auflösung. Wenn wir in die Gleichung (7) die natürlichen Koordinaten der Kurve einführen, geht sie über (vgl. Formel (11) auf S. 32) in

$$\boldsymbol{F} + \frac{d\tau}{ds}\boldsymbol{t} + \frac{\tau}{\varrho}\boldsymbol{n} + R\boldsymbol{n}_1 = 0.$$

Wir bezeichnen nun mit $\boldsymbol{t}_1$ einen zu $\boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{n}_1$ senkrechten Einheitsvektor und können dann, da $\boldsymbol{n}$ zu $\boldsymbol{t}$ senkrecht ist, also in die Ebene von $\boldsymbol{t}_1$ und $\boldsymbol{n}_1$ fällt, setzen

$$\boldsymbol{F} = F(\cos\gamma \cos\alpha \cdot \boldsymbol{t} + \cos\gamma \sin\alpha \cdot \boldsymbol{t}_1 + \sin\gamma \cdot \boldsymbol{n}_1),$$
$$\boldsymbol{n} = \cos\theta \cdot \boldsymbol{t}_1 + \sin\theta \cdot \boldsymbol{n}_1.$$

Danach zerfällt die Vektorgleichung des Gleichgewichts in die drei Zahlengleichungen

$$\frac{d\tau}{ds} + F\cos\gamma\cos\alpha = 0, \quad \frac{\tau}{\varrho}\cos\theta + F\cos\gamma\sin\alpha = 0,$$
$$R + \frac{\tau}{\varrho}\sin\theta + F\sin\gamma = 0.$$

Ist aber ϱ_1 der Radius der geodätischen Krümmung der Kurve, ϱ_0 der Krümmungsradius des Normalschnittes mit derselben Tangente, so ist nach dem Meusnierschen Theorem

$$\varrho_1 = \frac{\varrho}{\cos\theta}, \quad \varrho_0 = \frac{\varrho}{\sin\theta},$$

und damit werden die vorhergehenden Gleichungen

$$\frac{d\tau}{ds} + F \cos\gamma \cos\alpha = 0, \quad \frac{\tau}{\varrho_1} + F \cos\gamma \sin\alpha = 0,$$

$$R + \frac{\tau}{\varrho_0} + F \sin\gamma = 0.$$

Zu beachten ist, daß die ersten beiden Gleichungen allein die Gestalt der Fadenkurve bestimmen und diese nur von der Projektion $F \cos\gamma$ der wirkenden Kräfte auf die Tangentialebene der Fläche in den betreffenden Punkten und von den Größen s, ϱ_1, also den geodätischen Elementen der Kurve abhängt. (Die dritte Gleichung dient bloß dazu, die Reaktion der Fläche zu bestimmen.)

Wir können daraus eine wichtige Folgerung ziehen. Ist die Fläche eine abwickelbare Regelfläche und wirken die Kräfte in ihren Erzeugenden, so ändert der Faden seine Lage auf der Fläche nicht, wenn wir die Fläche auf eine Ebene abwickeln. So geht die Kettenlinie auf einem Zylinder aus der Kettenlinie in einer Ebene durch einfache Aufwickelung der Ebene auf den Zylinder hervor.

Wickelt man einen geraden Kreiskegel mit vertikaler Achse ab, so geht eine auf ihm liegende Kettenlinie in die Seilkurve über, die sich für Zentralkräfte ergibt, und zwar laufen die Wirkungslinien aller dieser Kräfte nach dem Punkte hin, der sich bei der Abwicklung des Kegels aus dessen Spitze ergibt.

11. Aufgabe. *Die Tangente an die Kettenlinie in einem gegebenen Punkte zu finden.*

Auflösung. Wir gehen aus von den Gleichungen der Kettenlinie

$$y = c \operatorname{Cof} \frac{x}{c} \quad \text{und} \quad s = c \operatorname{Sin} \frac{x}{c},$$

wobei die Bogenlänge s vom tiefsten Punkte aus gerechnet wird. Daraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{Sin} \frac{x}{c} = \frac{s}{c},$$

$$\frac{ds}{dx} = \operatorname{Cof} \frac{x}{c} = \frac{y}{c}.$$

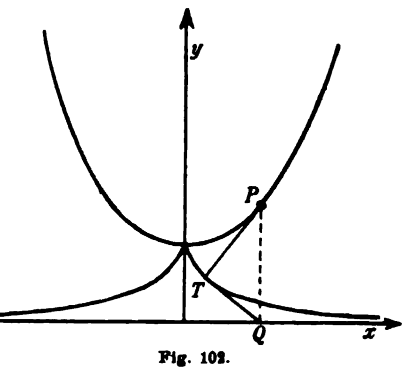


Fig. 102.

Fällen wir nun von einem Punkte P der Kettenlinie das Lot $PQ = y$ auf die x-Achse, und beschreiben über diesem Lot als Durchmesser einen Kreis, aus dem die Tangente der Kurve in P noch einen Punkt T ausschneide, dann wird

$$PT = y \cdot \frac{dy}{ds} = y \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = y \cdot \frac{s}{c} \cdot \frac{c}{y} = s,$$

$$QT = y \cdot \frac{dx}{ds} = y \cdot \frac{c}{y} = c.$$

Der Punkt T ist also ein Punkt auf der Evolvente der Kettenlinie, TQ ist die Tangente dieser Evolvente. Wie man sieht, ist das Stück dieser Tangente bis zur x-Achse konstant gleich c, die Evolvente ist also eine Traktorie.

12. Aufgabe. *Zu beweisen, daß unter allen Kurven, die zwischen zwei festen Punkten A und B verlaufen und dieselbe Länge l haben, der Schwerpunkt bei der hängenden Kettenlinie die tiefste Lage hat, woraus sofort die Stabilität des Gleichgewichtes bei dieser Kettenlinie folgt.*

Auflösung. Der Ausdruck, der zu einem Minimum werden soll (die Ordinate des Schwerpunktes) ist

$$\int z\,ds : \int ds$$

und die Bedingung lautet

$$\int ds = l.$$

Man hat also die Variation δu des Ausdruckes

$$u = \int (z + \lambda)\,ds$$

gleich Null zu setzen. Es ergibt sich hierbei aus $ds^2 = dx^2 + dz^2$

$$\delta ds = \frac{dx}{ds}\,\delta dx + \frac{dz}{ds}\,\delta dz = \frac{dx}{ds}\,d\,\delta x + \frac{dz}{ds}\,d\,\delta z$$

und dann durch partielle Integration

$$\int_0^l (z + \lambda)\frac{dx}{ds}\,d\delta x = \left[(z + \lambda)\frac{dx}{ds}\,\delta x\right]_0^l - \int_0^l \frac{d}{ds}\left[(z + \lambda)\frac{dx}{ds}\right]\delta x\,ds.$$

Auf der rechten Seite bleibt nur das Integral übrig, da die Endpunkte A, B fest sind, die Variationen an den Grenzen also verschwinden müssen. Setzt man nun die Faktoren von δx und δz unter dem Integralzeichen einzeln gleich 0, so ergibt sich

$$\frac{d}{ds}\left[(z + \lambda)\frac{dx}{ds}\right] = 0, \quad \frac{d}{ds}\left[(z + \lambda)\frac{dz}{ds}\right] - 1 = 0.$$

Diese Gleichungen gehen für $z + \lambda = \frac{\tau}{g}$ über in

$$\frac{d}{ds}\left(\tau\frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad \frac{d}{ds}\left(\tau\frac{dz}{ds}\right) - g = 0.$$

Das aber sind die Gleichungen § 5, d) für $Z = -g$, also die Differentialgleichungen der Kettenlinie. Vgl. Mayer, Math. Annalen, Bd. 13, 1878, S. 65; Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung, 1900, S. 142. Daß das so ermittelte Extremum ein wirkliches Minimum ist, wenn wir die Form der hängenden Kettenlinie nehmen, scheint an sich einleuchtend, denn es muß eine tiefste Lage für den Schwerpunkt vorhanden sein, die sicher um weniger unter dem höheren Aufhängepunkt liegt, als die halbe Länge des Fadens beträgt, denn dies wird die Höhe des Schwerpunktes, wenn wir den Faden an dem tieferen Aufhängepunkt abschneiden, so daß er herunterfällt und an dem anderen Aufhängepunkt frei hängt, wobei sein Schwerpunkt notwendig sinken muß. Der exakte analytische Nachweis erfordert die Untersuchung der zweiten Variation. Die hier in Betracht kommenden Theorien findet man in dem Kneserschen Buche und in dem neuen Werke von Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, ausführlich erörtert.

13. Aufgabe. *Die Gleichgewichtsbedingungen eines ausdehnbaren Fadens aufzustellen.*

Auflösung. Wir setzen das Hookesche Gesetz voraus, nach dem ein Stück des Fadens von der Länge l_0 unter dem Einfluß einer auf den senkrechten Querschnitt σ des Fadens wirkenden Spannung τ die durch die folgende Gleichung gegebene Länge l annimmt

$$\frac{\tau}{\sigma} = E\frac{l - l_0}{l_0},$$

indem E eine Konstante bezeichnet. Berechnen wir aus dieser Gleichung l, so ergibt sich

$$l = l_0\left(1 + \frac{\tau}{\lambda}\right),$$

$\lambda = E\sigma$ ist dann der Elastizitätsmodul. Insbesondere wird ein Linienelement ds_0 durch die Spannung vergrößert zu

$$ds = ds_0\left(1 + \frac{\tau}{\lambda}\right).$$

Es wirkt nun auf das Massenelement μds eine Kraft, die wir mit $\mu F ds$ bezeichnen, indem wir

$$\mu ds = \mu_0 ds_0$$

annehmen (Konstanz der Masse). Die Gleichgewichtsbedingung nimmt dann die etwas kompliziertere Form an

$$\mu F + \frac{d(\tau t)}{ds} = 0.$$

Im Falle konstanter Kräfte wird

$$\boldsymbol{F}\mu_0 ds_0 + d(\tau \boldsymbol{t}) = 0,$$

woraus durch Integration folgt

$$\boldsymbol{F}\int \mu_0 ds_0 + \tau \boldsymbol{t} = \boldsymbol{a},$$

wenn $\boldsymbol{a}$ einen konstanten Vektor bezeichnet. Hieraus erhalten wir τ in der Form

$$\tau = \operatorname{mod}\left\{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{F}\int \mu_0 ds_0\right\},$$

indem μ_0 als Funktion von s_0 bekannt sein muß. Das Resultat ist also von der Form

$$\tau = f(s_0)$$

und demnach wird

$$ds = \left(1 + \frac{f(s_0)}{\lambda}\right) ds_0,$$

woraus sich durch eine neue Integration s als Funktion von s_0 ergibt. Wollen wir die kartesischen Koordinaten der Kurvenpunkte finden, so leiten wir z. B. aus der Gleichung

$$\tau \frac{dx}{ds} = a_1 - X\int \mu_0 ds_0$$

die folgende ab

$$dx = \left(a_1 - X\int \mu_0 ds_0\right)\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{f(s_0)}\right) ds_0$$

usw. Im Falle eines nur der Schwere unterworfenen Fadens lassen sich die Integrationen leicht ausführen. Vgl. Minchin, A Treatise on Statics, vol. 1, p. 383.

Viertes Kapitel.

Hydrostatik.

1. Gleichgewichtsbedingungen der Flüssigkeiten. Wo uns bis jetzt kontinuierlich ausgebreitete Massen begegnet sind, handelte es sich um starre Körper, d. h. um Körper, deren Teile gegeneinander keine Verschiebung erleiden können. Wir wollen nun auch die Flüssigkeiten in Betracht ziehen, d. h. solche Körper, bei denen die Entfernung zweier Teilchen voneinander beliebig vergrößert oder verringert werden kann.

Für die Behandlung der Flüssigkeiten grundlegend ist der Begriff des Druckes. Wir haben bei einem Seil oder Faden von Spannung gesprochen und gesehen, daß wir darunter zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte zu verstehen haben, die an jeder Stelle des Fadens tangential zu der Linie, die er bildet, also normal zu seinem senkrechten Querschnitte wirken. Lassen wir diese Kräfte an einem unendlich kurzen Stückchen des Fadens angreifen, so sind sie stets voneinander weg gerichtet, sie ziehen das kleine Stückchen des Fadens auseinander und man redet deshalb von einer Zugspannung. Eine Druckspannung erhält man in genau entsprechender Weise z. B. bei einem vertikalen Pfeiler, der ein Gebäude trägt. Um die Analogie mit dem Faden vollständig zu machen, müßte man sich freilich den Pfeiler unendlich dünn denken. An irgend einem sehr kurzen Stück des Pfeilers wirken dann in der Vertikalen, also normal zu dem Querschnitte zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte, die eine an der oberen, die andere an der unteren Begrenzungsfläche des Pfeilerstückes. Die Kraft an der oberen Fläche ist nach abwärts, die Kraft an der unteren Fläche nach aufwärts gerichtet, die Kräfte wirken also aufeinander zu, und deshalb redet man von einer Druckspannung.

In einer Flüssigkeit, die nach allen Seiten hin ausgedehnt ist, haben wir keine bestimmt orientierten Querschnitte, wir können eine sehr kleine Probefläche, die wir uns materiell denken dürfen, an eine gewisse Stelle in der Flüssigkeit bringen und dort auf alle mögliche Weise orientieren. Die beiden Seiten der Fläche erfahren dann von der Flüssigkeit einen Druck, d. h. zwei entgegengesetzt gleiche und zu der Fläche normale Kräfte, die aufeinander zu gerichtet sind, und es gilt der wichtige von Blaise Pascal entdeckte Erfahrungssatz, das die Größe dieser Druckkräfte von der Orientierung der Fläche unabhängig, d. h. nach allen Richtungen dieselbe ist. Ferner werden wir annehmen dürfen, daß die Druckkräfte sich nur unendlich wenig ändern, wenn man die Probefläche unendlich wenig verschiebt, d. h. daß der Druck eine stetige Funktion des Ortes ist.

Die ursprüngliche Bedeutung der Spannungskräfte war die, daß man einen Faden an einer beliebigen Stelle durchschneiden kann, ohne das Gleichgewicht zu stören, wenn man nur an dieser Stelle eine der Spannungskraft gleiche Kraft anbringt. Ebenso kann man bei dem Pfeiler den unteren Teil entfernen, wenn man nur die durch diesen unteren Teil ausgeübte Druckkraft auf andere Weise ersetzt, wie man es tatsächlich tut, wenn man z. B. den schadhaft gewordenen unteren Teil einer Säule herausnehmen und erneuern will.

Das gleiche muß nun auch für eine Flüssigkeit gelten. Man kann irgend ein Stück aus der Flüssigkeit herausgreifen. War die Flüssigkeit im Gleichgewichte, so muß auch das herausgegriffene Stück im Gleichgewichte sein, wenn man die auf seine Oberfläche wirkenden Druckkräfte hinzufügt.

Aus diesem Prinzip sind die Gleichgewichtsbedingungen der Flüssigkeiten leicht abzuleiten. Zunächst beachten wir, daß der Druck auf eine sehr kleine Fläche, etwa ein sehr kleines Rechteck, der Größe dieser Fläche proportional ist. Denn zerlegen wir die Fläche in eine Anzahl kongruenter Teile, so wird der Druck für alle diese Teile derselbe, und somit

wird der Gesamtdruck der Anzahl der Teile proportional. Wir werden daher die auf ein Oberflächenelement wirkende Druckkraft mit $p d\sigma$ bezeichnen können und p heißt dann einfach der an der betreffenden Stelle herrschende Druck.

Wir greifen nun aus der Flüssigkeit ein Stück τ heraus und benutzen das Axiom 1 auf S. 190, wonach, wenn Gleichgewicht besteht, dies Gleichgewicht dadurch nicht gestört wird, daß wir das ganze Stück τ der Flüssigkeit erstarren lassen. Wir werden also die Bedingungen für das Gleichgewicht der Flüssigkeit finden, indem wir das beliebige Stück τ als einen starren Körper behandeln und dafür die Gleichgewichtsbedingungen aufstellen.

Wir haben uns dabei irgend ein Element $d\tau$ des Stückes τ unter der Einwirkung einer Kraft $\mu \boldsymbol{F} d\tau$ zu denken, wenn wir mit μ die Dichtigkeit an der betreffenden Stelle bezeichnen und die Kraft auf die Masseneinheit verrechnen. Zu diesen „Volumkräften" kommen die „Flächenkräfte" $p d\sigma$ hinzu, welche den Druck auf die einzelnen Elemente $d\sigma$ der Oberfläche σ des Raumstückes τ repräsentieren. Diese Druckkräfte haben die Richtung der nach innen gehenden Normalen; bezeichnen wir daher den nach innen gehenden Einheitsvektor auf der Normalen mit $\boldsymbol{n}$, so wird der Vektor der Druckkraft $p \boldsymbol{n} d\sigma$.

Die erste Gleichgewichtsbedingung ist nun die, daß die Resultante aller wirkenden Kräfte verschwindet, also die Vektorgleichung

$$\int_\tau \mu \boldsymbol{F} d\tau + \int_\sigma p \boldsymbol{n} d\sigma = 0. \tag{1}$$

Diese Gleichung genügt, um das Gleichgewicht der Flüssigkeiten darzustellen. Um sie aus der Integralform in die Differentialform überzuführen, verwandeln wir das Oberflächenintegral in ein Raumintegral mit Hilfe der Formel (vgl. Formel (34) auf S. 40)

$$\int_\sigma \boldsymbol{n} p d\sigma = -\int_\tau \operatorname{grad} p d\tau.$$

Es ergibt sich also

$$\int_\tau (\mu \boldsymbol{F} - \operatorname{grad} p)\, d\tau = 0$$

für jedes Stück der Flüssigkeit; daher muß der Integrand selbst verschwinden, und wir finden

$$\mu F = \operatorname{grad} p \tag{2}$$

als die allgemeine Gleichgewichtsbedingung, die übrigens nicht bloß für ideale, sondern auch für viskose Flüssigkeiten gilt, d. h. für Flüssigkeiten, die von Reibung nicht frei sind. Nennen wir X, Y, Z die Komponenten von F nach den Koordinatenachsen, so können wir (2) ersetzen durch die kartesischen Gleichungen

$$\mu X = \frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \mu Y = \frac{\partial p}{\partial y}, \qquad \mu Z = \frac{\partial p}{\partial z}. \tag{3}$$

Aus der Gleichung (2) ist die Momentengleichung für jedes Stück τ der Flüssigkeit unschwer abzuleiten, und hierin besteht die zweite Bedingung für das Gleichgewicht des als starrer Körper behandelten Stückes. Wir multiplizieren zu dem Zwecke die Gleichung (2) vektoriell mit $P - O$, wenn P den variablen Punkt von τ und O einen beliebigen festen Punkt bezeichnet. Wir benutzen dann die Formel [(22) auf S. 36]

$$\operatorname{rot} p u = p \operatorname{rot} u + \operatorname{grad} p \wedge u,$$

wobei $u = P - O$ zu setzen ist. Nach der Definition der Rotation ist aber

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(P-O) \times dP \wedge \delta P &= d(P-O) \times \delta P - \delta(P-O) \times dP \\ &= dP \times \delta P - \delta P \times dP = 0,\end{aligned}$$

also wird $\operatorname{rot}(P - O) = \operatorname{rot} u = 0$,

$$\operatorname{rot} p (P-O) = \operatorname{grad} p \wedge (P-O)$$

und somit

$$\mu F \wedge (P - O) = \operatorname{rot} p (P - O).$$

Wir integrieren nun über den Raum τ und benutzen die Integralformel [(35) auf S. 41]

$$\int_\tau \operatorname{rot} p u \, d\tau = -\int_\sigma n \wedge p u \, d\sigma.$$

Es folgt dann

$$\int_\tau (P - O) \wedge \mu F d\tau + \int_\sigma (P - O) \wedge p n \, d\sigma = 0, \tag{4}$$

dies aber ist in der Tat die gesuchte Momentengleichung.

Wenn nun die Gleichgewichtsbedingungen für jedes Stück der Flüssigkeit als starren Körper erfüllt sind, so sind sie auch für die Flüssigkeit selbst erfüllt, denn wir können sie in so kleine Stücke zerlegen, daß wir die möglichen Verschiebungen der Teile eines solchen Stückes gegeneinander vernachlässigen können, da sie unendlich kleine Größen zweiter Ordnung darstellen.

2. Niveauflächen. Aus der Gleichung (2) folgt, da allgemein die Rotation eines Gradienten verschwindet,

$$\operatorname{rot}(\mu \boldsymbol{F}) = 0. \tag{5}$$

Es wird aber nach (22) in Kap. II

$$\operatorname{rot}(\mu \boldsymbol{F}) = \mu \operatorname{rot} \boldsymbol{F} + \operatorname{grad} \mu \wedge \boldsymbol{F},$$

also folgt, wenn wir diese Gleichung skalar mit $\boldsymbol{F}$ multiplizieren, aus (5)

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{F} = 0. \tag{6}$$

Dies ist die Relation, welche die wirkenden Kräfte erfüllen müssen. Aus ihr folgt rückwärts wieder, daß $\boldsymbol{F}$ von der Form ist

$$\boldsymbol{F} = m \cdot \operatorname{grad} p,$$

wenn m und p zwei skalare Funktionen des Ortes bezeichnen. Um dies mit den gewöhnlichen Methoden der Differentialrechnung zu beweisen, beachten wir zunächst, daß aus (6) auch folgt

$$\operatorname{rot}(\varrho \boldsymbol{F}) \times (\varrho \boldsymbol{F}) = 0,$$

welches auch die skalare Funktion ϱ sei. Die vorstehende Gleichung schreiben wir nun, indem wir mit $\xi = \varrho X$, $\eta = \varrho Y$, $\zeta = \varrho Z$ die Komponenten des Vektors $\varrho \boldsymbol{F}$ bezeichnen,

$$\xi\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\right) + \eta\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + \zeta\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) = 0. \tag{6a}$$

Wir nehmen dann die Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x, y

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\xi}{\eta} = -\frac{X}{Y}$$

und denken sie uns aufgelöst. Das Integral ist von der Form

$$f(x, y, z) = \varphi(z),$$

wobei f eine bestimmte, φ eine willkürliche Funktion der dahinter stehenden Argumente bedeutet. Da $\xi = \varrho X$ noch die willkürliche Funktion ϱ als Faktor enthält, können wir für diesen Faktor den Wert nehmen

$$\varrho = \frac{1}{X}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \text{so daß} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \xi$$

wird. Da aber weiter

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \text{also} \quad \frac{1}{\xi}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial f}{\partial y}$$

wird, ergibt sich auch

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \eta$$

und somit

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0.$$

Demnach folgt aus der Gleichung (6a), von der wir ausgehen,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \zeta\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \zeta\right)\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Hierbei ist y als eine durch die Gleichung $f(x, y, z) - \varphi(z) = 0$ definierte Funktion von x und z anzusehen. Die vorstehende Gleichung zeigt, daß der Ausdruck

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \zeta$$

auch von x unabhängig, also eine Funktion $\psi(z)$ von z allein ist. Differenziert man aber die Gleichung $f(x, y, z) - \varphi(z) = 0$ unter Voraussetzung eines konstanten x nach z, so ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} - \varphi'(z) = 0.$$

Nehmen wir jetzt $\varphi'(z) = \psi(z)$ und bestimmen so die noch willkürliche Funktion $\varphi(z)$ bis auf eine Konstante, so folgt

$$\zeta = -\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\zeta}{\eta}$$

und demnach wird

$$\xi dx + \eta dy + \zeta dz = \varrho(X dx + Y dy + Z dz) = 0$$

oder

$$\varrho \mathbf{F} \times d\mathbf{P} = 0,$$

wenn dP eine Differentiation auf der Fläche $f(x,y,z) - \varphi(z) = 0$ bedeutet. Allgemein wird, wenn der Differentialvektor dP eine beliebige Richtung hat,

$$\varrho\,(X dx + Y dy + Z dz) = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = dp,$$

indem wir $p = f(x, y, z) - \varphi(z)$ setzen, also

$$\varrho F \times dP = dp$$

oder

$$\varrho F = \operatorname{grad} p.$$

Machen wir $\varrho = \mu$, so gelangen wir zu der Gleichung (2) zurück.

Die Flächen

$$p = \text{konst.}$$

heißen Flächen gleichen Druckes oder isobarische Flächen; gewöhnlich werden sie schlechthin als die **Niveauflächen** der Flüssigkeit bezeichnet. Es ist nach der Bedeutung dieser Flächen, da an jeder Stelle ein bestimmter Druck herrschen muß, klar, daß zwei Niveauflächen sich innerhalb der Flüssigkeit nicht schneiden können, daß vielmehr durch jeden Punkt nur eine einzige Niveaufläche geht.

Der Gradient von p und damit auch die Kraft F steht senkrecht auf der durch den betreffenden Punkt P gehenden Niveaufläche, also haben die Niveauflächen überall eine bestimmte Normale, sind also frei von singulären Punkten und können sich insbesondere auch nicht selbst durchschneiden. Die orthogonalen Trajektorien der Niveauflächen liefern die **Kraftlinien**. Man bezeichnet ein solches Kraftfeld, bei dem die Kraftlinien die orthogonalen Trajektorien einer Flächenschar sind, als ein **lamellares Feld**.

Ein spezieller Fall des lamellaren Kraftfeldes ist das **potentielle Feld**, bei dem die Kräfte ein Potential U besitzen, für welches also

$$F = \operatorname{grad} U$$

ist. Dann wird in der Tat $\operatorname{rot} F = 0$ und damit ist die Gleichung (6) erfüllt. Die Gleichung (2) wird in diesem Falle

$$\mu \operatorname{grad} U = \operatorname{grad} p.$$

In dem besonderen Falle, wo μ konstant, die Flüssigkeit also homogen ist, folgt daraus

$$\mu U - p = c, \tag{7}$$

wenn c eine Konstante bedeutet.

Sind nun zwei homogene Flüssigkeiten, die aneinander grenzen, im Gleichgewichte unter der Einwirkung von Kräften, die ein Potential besitzen, so müssen für alle Elemente $d\sigma$ der Trennungsfläche die aus (7) folgenden Gleichungen bestehen

$$\mu_1 U - p = c_1, \quad \mu_2 U - p = c_2;$$

hierbei sind die Werte, die sich auf die erste und zweite Flüssigkeit beziehen, durch die Indizes 1 und 2 unterschieden, und wir haben zu beachten, daß der Druck auf die Trennungsfläche von beiden Seiten her gleich sein muß. Somit finden wir für die Trennungsfläche

$$U = \frac{c_1}{\mu_1} - \frac{c_2}{\mu_2},$$

also ist U konstant, da μ_1 und μ_2 nach Voraussetzung konstant sind: Die Trennungsfläche ist eine Niveaufläche.

Im Falle zweier schwerer Flüssigkeiten wird $F = -g\mathfrak{v}$, wenn $\mathfrak{v}$ einen vertikal nach aufwärts gerichteten Einheitsvektor bezeichnet, und sonach

$$U = -gz,$$

wenn z die Höhe über einem Normalniveau bezeichnet. Die Gleichung $U =$ konst. verwandelt sich daher in eine Gleichung

$$z = \text{konst.},$$

d. h. die Trennungsfläche wird eine horizontale Ebene. Dies gilt auch dann, wenn die beiden Flüssigkeiten in einer irgendwie gestalteten Röhre enthalten sind: in allen Teilen dieser Röhre muß sich das gleiche Niveau einstellen, so daß alle Teile der Trennungsfläche einer horizontalen Ebene angehören. Dies ist das Prinzip der kommunizierenden Röhren.

Bestimmt man die Konstante c in (7) durch den Druck p_0, der in einer bestimmten Höhe z_0 herrscht, so ergibt sich aus den Gleichungen

$$\mu g z - p = c, \quad \mu g z_0 - p_0 = c$$

durch Elimination von c

$$\mu g (z - z_0) = p - p_0.$$

Die Niveaudifferenz $z - z_0$ gibt sonach ein Maß für die Druckdifferenz $p_0 - p$. Dies ist das Prinzip des Barometers.

3. Kompressible und inkompressible Flüssigkeiten. Im vorstehenden ist die Dichtigkeit μ zunächst als eine unabhängige Funktion des Ortes behandelt worden. In Wirklichkeit ist sie aber — und dies ist als ein neu hinzutretender Erfahrungssatz anzusehen — eine Funktion des Druckes p. Nun folgt aus (2) nach der Definition des Gradienten

$$\mu F \times dP = dp. \tag{8}$$

Ist μ hierin eine Funktion von p, so ergibt sich, wenn wir die Gleichung durch μ dividieren, auf der rechten Seite ein exaktes Differential

$$\frac{dp}{\mu} = dU \tag{9}$$

und somit wird

$$F \times dP = dU,$$

also

$$F = \operatorname{grad} U, \tag{10}$$

d. h. es ist in diesem Falle das Kraftfeld notwendig ein potentielles.

Ist μ überhaupt konstant, so kann man

$$U = \frac{p}{\mu} \tag{11}$$

wählen, dann fallen die Flächen gleichen Druckes mit den Flächen gleichen Potentials der äußeren Kräfte zusammen. Die Flüssigkeit heißt dann inkompressibel, und in jedem anderen Falle kompressibel.

Die tropfbaren Flüssigkeiten sind annähernd inkompressibel. Für die sogenannten vollkommenen Gase wird

$$a\mu = p, \tag{12}$$

wenn a eine Konstante bezeichnet, es ergibt sich demnach hier

$$a\frac{dp}{p} = dU, \quad \text{also} \quad U = a \log \frac{p}{p_0}, \tag{13}$$

wenn p_0 wieder eine Konstante bezeichnet.

Wollten wir auch die Veränderung der Temperatur in Rücksicht ziehen, womit wir freilich das Gebiet der Mechanik verlassen würden, so hätten wir a nicht als konstant, sondern $a = a_0(1 + \alpha t)$ vorauszusetzen, wo a_0 von der Natur des Gases abhängt, t die Temperatur in Grad Celsius und α die Zahl $1:273$ bedeutet.

Betrachten wir eine schwere Flüssigkeit, die ein vollkommenes Gas bildet, etwa die Erdatmosphäre, so wird wieder

$$U = -gz,$$

die Höhe z über dem Meeresniveau genommen; nach der obenstehenden Formel ergibt sich also

$$z = \frac{a}{g} \log \frac{p_0}{p}, \tag{14}$$

und man sieht sofort, daß für $p = p_0$

$$z = 0$$

wird, p_0 bedeutet also den Luftdruck auf Meeresniveau reduziert. Ist $z = z_1$ für $p = p_1$, also $z_1 = \frac{a}{g} \log \frac{p_0}{p_1}$, so folgt

$$z - z_1 = \frac{a}{g} \log \frac{p_1}{p}. \tag{15}$$

Diese Formel bildet die Grundlage der barometrischen Höhenmessung.

4. Das Archimedische Prinzip. Wenn eine Flüssigkeit mit einem festen Körper in Berührung steht, so erfordert das Gleichgewicht, daß der Druck, den an einer Berührungsstelle der feste Körper auf die Flüssigkeit ausübt, zu der Berührungsfläche normal und dem in der Flüssigkeit an der betreffenden Stelle herrschenden Druck gleich ist. Wenn daher ein fester Körper in eine Flüssigkeit eingetaucht ist, so sind die Druckkräfte, die auf seine Oberfläche wirken, genau dieselben, die wirken würden, wenn man den festen Körper durch Flüssigkeit ersetzen würde, und die entgegengesetzt gleichen Kräfte übt der feste Körper auf die umgebende Flüssigkeit aus. Dies ist sofort klar, da wir ja davon ausgingen, daß wir uns einen Teil der Flüssigkeit erstarrt dachten, und dann die Gleichgewichtsbedingungen für diesen festen Körper hinschrieben.

Dieselben Gleichungen (1) und (4) haben wir uns hier wiederholt zu denken, nur wollen wir die Resultante $\boldsymbol{R}$ der auf den festen Körper wirkenden Kräfte und ihr Moment $\boldsymbol{M}$ für einen beliebigen festen Punkt O als direkt gegeben annehmen. Wir erhalten dann die Gleichungen in der Form

$$\boldsymbol{R} = \int_\sigma p\boldsymbol{n}\,d\sigma, \quad \boldsymbol{M} = \int_\sigma (P - O) \wedge p\boldsymbol{n}\,d\sigma, \tag{16}$$

wenn σ die eingetauchte Oberfläche des festen Körpers, $d\sigma$ ihr Element und $\boldsymbol{n}$ den nach außen, d. h. in das Innere der Flüssigkeit gehenden Einheitsvektor in der Normalen dieses Flächenelementes bedeutet. Die Oberflächenintegrale können wir aber auch durch Raumintegrale ersetzen, die über den von dem festen Körper verdrängten Raum zu erstrecken sind, und die Gleichungen dann schreiben

$$\boldsymbol{R} = \int_\tau \operatorname{grad} p\,d\tau, \quad \boldsymbol{M} = -\int_\tau \operatorname{rot} p\,(P - O)\,d\tau. \tag{17}$$

Denken wir uns nun den Körper wieder ersetzt durch die verdrängte Flüssigkeitsmenge und führen die äußeren Kräfte ein, die auf diese wirken, so ergibt sich [vgl. die zu den Gleichungen (1) und (4) gehörenden Entwicklungen]

$$\boldsymbol{R} = \int_\tau \mu \boldsymbol{F}\,d\tau, \quad \boldsymbol{M} = \int_\tau (P - O) \wedge \mu \boldsymbol{F}\,d\tau: \tag{18}$$

das System der auf den festen Körper tatsächlich wirkenden Kräfte ist äquivalent dem Kräftesystem, das auf die verdrängte Flüssigkeitsmenge wirken würde. Diesem Kräftesystem hält das System der Druckkräfte, die der feste Körper erfährt, das Gleichgewicht.

Ebenso würde auch umgekehrt, wenn ein fester hohler Körper ganz mit Flüssigkeit gefüllt ist, also der feste Körper die Flüssigkeit umschließt, das System der von dem Körper auf die Flüssigkeit ausgeübten Druckkräfte dem System der auf die Flüssigkeit wirkenden äußeren Kräfte das Gleichgewicht halten.

Handelt es sich insbesondere um eine schwere Flüssigkeit, so ist

$$\boldsymbol{F} = -g\boldsymbol{v}$$

zu setzen, wenn $\boldsymbol{v}$ einen vertikal nach aufwärts gerichteten Einheitsvektor bezeichnet, und es ergibt sich, wenn m die Gesamtmasse der verdrängten Flüssigkeit bedeutet,

$$\boldsymbol{R} = -mg\boldsymbol{v}, \tag{19}$$

d. h. **die Resultante der auf den eingetauchten Körper wirkenden Kräfte muß vertikal nach abwärts gerichtet und gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeitsmenge sein.** Eine Vertikalkraft, die diesem letzteren Gewicht entgegengesetzt gleich ist, nennt man den **Auftrieb**, den der Körper erfährt.

Handelt es sich also um zwei homogene Flüssigkeiten von den Dichtigkeiten μ_1, μ_2, wobei $\mu_1 > \mu_2$, und steht der eingetauchte Körper nur unter der Einwirkung seiner Schwere G, so wird Gleichgewicht nur dann bestehen können, wenn das Volumen τ des Körpers der Bedingung genügt

$$\mu_1\tau \geqq G \geqq \mu_2\tau.$$

Im Falle der Gleichheitszeichen wird der eingetauchte Körper ganz innerhalb der einen oder anderen Flüssigkeit bleiben. Ist aber

$$\mu_1\tau > G > \mu_2\tau,$$

so wird der Körper auf der unteren, schwereren Flüssigkeit schwimmen, und die horizontale Trennungsfläche wird das Volumen des Körpers derart in zwei Teile τ_1, τ_2 teilen, daß

$$\tau_1 + \tau_2 = \tau, \quad \mu_1\tau_1 + \mu_2\tau_2 = \frac{G}{g} = M$$

wird, also

$$\tau_1 = \frac{M - \mu_2\tau}{\mu_1 - \mu_2}, \quad \tau_2 = \frac{\mu_1\tau - M}{\mu_1 - \mu_2}.$$

Denkt man sich einen völlig eingetauchten Körper, dessen Gewicht G größer ist als das Gewicht mg der verdrängten Flüssigkeitsmenge, an das eine Ende des Wagbalkens einer Wage gehängt und an das andere ein Gewicht G', das das Gleichgewicht herstellt, so wird nach (19)

$$G - G' = mg, \quad \text{also} \quad G' = G - mg,$$

d. h. jeder Körper verliert in einer Flüssigkeit so viel an Gewicht, als das Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeitsmenge beträgt. Dies ist das Archimedische Prinzip.

Aus der zweiten Gleichung (18) ergibt sich, wenn wir $\boldsymbol{F} = -g\boldsymbol{v}$ einführen,

$$\boldsymbol{M} = \int (P - O) \wedge \mu \boldsymbol{F} d\tau = g\boldsymbol{v} \wedge \int (P - O) \mu d\tau.$$

Ist aber S der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeitsmenge, m die Gesamtmasse, so wird

$$m(S - O) = \int (P - O) \mu d\tau$$

und demnach

$$\boldsymbol{M} = mg\boldsymbol{v} \wedge (S - O),$$

d. h. wegen (19)

$$\boldsymbol{M} = -\boldsymbol{R} \wedge (S - O).$$

Mithin ist das Moment dasselbe wie das einer Vertikalkraft $\boldsymbol{R}$, die in dem Schwerpunkt S angreift, und diese Vertikalkraft ergibt sich als die Resultante des wirkenden Kräftesystems.

Ist daher die Schwere die einzige auf den Körper wirkende Kraft, so zeigt sich: Der Schwerpunkt des eingetauchten Körpers muß in derselben Vertikalen liegen wie der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeitsmenge.

Lassen wir in diesem Punkte die Auftriebkraft angreifen, so können wir auch sagen: Der Auftrieb muß an dem festen Körper der Schwere das Gleichgewicht halten.

5. Stabilität schwimmender Körper. Für einen schwimmenden, schweren Körper hat der Begriff der Stabilität eine eigentümliche Ausgestaltung erfahren, indem man mit diesem Worte nicht bloß eine Eigenschaft des Gleichgewichtes bezeichnet, sondern auch ein bestimmtes Maß für den Grad der Stabilität sucht. Der Wert dieser Betrachtungen liegt in ihrer praktischen Bedeutung für den Schiffbau.

Für den Begriff der Stabilität hatten wir als grundlegend den Begriff der Arbeit aufgestellt, die erforderlich ist, um den Körper auf eine bestimmte Weise aus seiner Gleichgewichtslage zu entfernen. Diese Arbeit wollen wir auch hier berechnen.

Zunächst ist klar, daß keine Arbeit erforderlich ist, um den Körper in horizontaler Richtung parallel zu verschieben oder ihn um eine vertikale Achse zu drehen. Denn die wirkenden Kräfte sind vertikal, also auch senkrecht zu den Verschiebungen, welche die Punkte bei diesen Bewegungen erfahren.

Wenn wir aber den Körper in vertikaler Richtung um eine sehr kleine Strecke δz verschieben, so geht eine zylindrische Schicht des Körpers von der Dicke δz aus der ersten in die zweite oder aus der zweiten in die erste Flüssigkeit über, es vermindert oder vermehrt sich also der Auftrieb $(\mu_1 \tau_1 + \mu_2 \tau_2) g$ um $(\mu_1 - \mu_2) g \sigma \delta z$, wenn σ die sogenannte Schwimmfläche des Körpers bezeichnet, nämlich die Fläche, welche der Körper von der horizontalen Trennungsfläche der beiden Flüssigkeiten, der Schwimmebene, fortnimmt. In allen Fällen ist die Arbeit, die sich aus der Veränderung des Auftriebes ergibt, ob die Verschiebung nach oben oder unten erfolgt, negativ, nämlich gleich $-\frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2) g \sigma \delta z^2$. Eine Entscheidung über die Stabilität des Gleichgewichts ist also hierdurch nicht möglich; das Gleichgewicht ist in dieser Hinsicht immer stabil.

Wir drehen jetzt den schwimmenden Körper um eine in seiner Schwimmebene liegende Achse. Dann geht ein prismatischer Teil des Körpers aus der zweiten in die erste und ein anderer aus der ersten in die zweite Flüssigkeit über. Wir bezeichnen mit y den Abstand eines Elementes $d\sigma$ der Schwimmfläche von der Drehachse, nach der einen Seite positiv, nach der anderen negativ gerechnet, mit ω den unendlich kleinen Drehwinkel. Dann wird die Änderung, welche der Auftrieb durch die Drehung erfährt, gleich dem Integralausdruck

$$(\mu_1 - \mu_2)\, \omega \int y\, d\sigma,$$

das Integral über die ganze Schwimmfläche erstreckt. Lassen wir aber die Drehachse durch den Schwerpunkt S der Schwimmfläche gehen, so wird

$$\int y\, d\sigma = 0,$$

der Auftrieb bleibt also ungeändert.

Wir wollen nun den Arbeitsausdruck berechnen, der sich ergibt, wenn wir die bereits ausgeführte Drehung um eine durch den Schwerpunkt der Schwimmfläche gehende Achse noch um $d\omega$ vermehren. Das Vorzeichen dieses Ausdruckes ist nach dem, was wir früher gesehen haben, in der Tat maßgebend für die Stabilität des Gleichgewichts. Der gesuchte Ausdruck wird aber gleich $\mathfrak{M} d\omega$, wenn $\mathfrak{M}$ das statische Moment der nach der ursprünglichen Drehung um den Winkel ω vorhandenen Kräfte für die Drehachse bedeutet. Die Drehachse wollen wir zur x-Achse des Koordinatensystems wählen und auch die y-Achse in der ursprünglichen Schwimmebene annehmen.

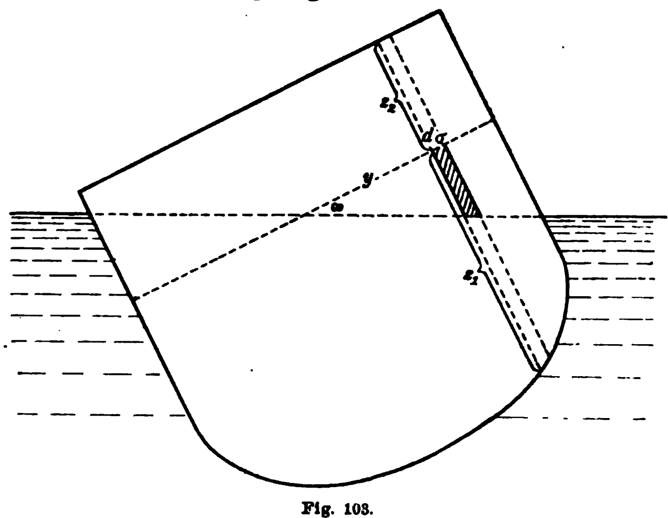


Fig. 103.

Um $\mathfrak{M}$ zu finden, berechnen wir zunächst das statische Moment der in dem Schwerpunkt E des schwimmenden Körpers angreifenden Schwerkraft G. Sind ξ, η, ζ die Koordinaten dieses Punktes E vor der Drehung, so wird nach der Drehung die zweite Koordinate

$$\eta_1 = \cos\omega \cdot \eta - \sin\omega \cdot \zeta$$

und somit der gesuchte Beitrag dieser Kraft zum statischen Moment für die x-Achse

$$-G \cdot \eta_1 = -G(\cos\omega \cdot \eta - \sin\omega \cdot \zeta).$$

Was nun das statische Moment des Auftriebes betrifft, so haben wir den ganzen Körper in unendlich schmale Prismen, deren Seitenlinien in der ursprünglichen Stellung des Körpers vertikal sind, zu zerlegen. Sei $d\sigma$ der senkrechte Querschnitt eines solchen Prismas, z_1 und z_2 die Teile seiner Höhe, die bei der ursprünglichen Lage des Körpers in die erste und zweite Flüssigkeit fallen, endlich x, y die Koordinaten der Stelle, in der es die Schwimmebene trifft, dann geht von ihm bei der Drehung ein Stück von der Länge $y \cdot \operatorname{tang} \omega$ aus der ersten in die zweite Flüssigkeit über oder umgekehrt, je nachdem y positiv oder negativ ist. Es wird nun nach der Drehung das statische Moment des Prismas für die x-Achse werden

$$\begin{aligned} &\mu_1(z_1 - y \operatorname{tang} \omega) g d\sigma [\cos \omega \cdot y - \tfrac{1}{2} \sin \omega (z_1 + y \operatorname{tang} \omega)] \\ &+ \mu_2(z_2 + y \operatorname{tang} \omega) g d\sigma [\cos \omega \cdot y + \tfrac{1}{2} \sin \omega (z_2 - y \operatorname{tang} \omega)], \end{aligned}$$

indem wir uns die Massen der Teile von gleicher Dichtigkeit in ihrem Schwerpunkt konzentriert denken. Der vorige Ausdruck wird aber (wenn wir die zweiten Potenzen von $\operatorname{tang} \omega$ vernachlässigen) angenähert gleich

$$g dm (\cos \omega \cdot y - \sin \omega \cdot z) - (\mu_1 - \mu_2) g \sin \omega \cdot y^2 d\sigma,$$

indem wir mit

$$dm = (\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2) d\sigma$$

die Masse des Prismas und mit $z = \frac{1}{2}(\mu_1 z_1^2 - \mu_2 z_2^2) : (\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2)$ die Ordinate seines Schwerpunktes bezeichnen. Führen wir nun die Integration über die ganze Schwimmfläche aus, so haben wir

$$\int y dm = m \cdot \eta', \quad \int z dm = m \cdot \zeta',$$

wenn m die verdrängte Flüssigkeitsmenge und ξ', η', ζ' die Koordinaten ihres Schwerpunktes bedeuten. Setzen wir noch

$$\int y^2 d\sigma = J,$$

so ergibt sich demnach

$$mg (\cos \omega \cdot \eta' - \sin \omega \cdot \zeta') - (\mu_1 - \mu_2) g \sin \omega \cdot J.$$

Vereinigen wir die beiden gefundenen Bestandteile von $\mathfrak{M}$, beachten dabei, daß $G = mg$, $\eta = \eta'$ ist und setzen

$$\zeta' - \zeta = \mathfrak{z},$$

so finden wir endlich

$$\mathfrak{M} = -[G \cdot \mathfrak{z} + (\mu_1 - \mu_2) g J] \sin \omega \tag{21}$$

oder $\mathfrak{M} = -\mathfrak{S} \cdot \sin \omega$, wenn wir

$$\mathfrak{S} = G \cdot \mathfrak{z} + (\mu_1 - \mu_2) g J \tag{22}$$

setzen. Es ist nun sofort zu sehen, daß solange $\mathfrak{S} > 0$ ist, das Moment $\mathfrak{M}$ das umgekehrte Vorzeichen hat wie $\sin \omega$. Der Wert der Arbeit bei einer Vergrößerung $d\omega$ des Ausschlages (wobei $d\omega$ das Vorzeichen von ω, d. h. auch von $\sin \omega$ hat) wird also immer negativ, und das Gleichgewicht ist nach der früheren Definition stabil. Mit dem Werte von $\mathfrak{S}$ wächst der Arbeitsausdruck, der, wie man sieht, außerdem dem Sinus des Ausschlagswinkels proportional ist. Der Wert von $\mathfrak{S}$ gibt also ein Maß für die Stabilität bei der betreffenden Achsenrichtung.

Das Integral $J = \int y^2 d\sigma$ liefert das Trägheitsmoment der Schwimmfläche für die betr. Achse durch ihren Schwerpunkt. Wie man sieht, steigt die Stabilität mit diesem Trägheitsmoment.

Wir haben nun noch die Drehachse alle möglichen Richtungen annehmen zu lassen. Es ist aber leicht zu sehen, daß das Trägheitsmoment für eine beliebig gerichtete Achse aus den Trägheitsmomenten für gewisse zwei zueinander senkrechte Achsen linear zusammengesetzt werden kann. Diese Achsen, die sogenannten Hauptträgheitsachsen, die wir im zweiten Bande noch weiter besprechen werden, müssen die Eigenschaft haben, daß, wenn man sie als Koordinaten zugrunde legt, die Gleichung besteht

$$\int xy\, d\sigma = 0.$$

Es ist dabei immer vorausgesetzt, daß die Achsen durch den zum Ursprung gewählten Schwerpunkt der Schwimmfläche hindurchgehen.

Der senkrechte Abstand eines beliebigen Punktes von einer solchen Achse, die mit der x-Achse den Winkel α bilden möge, wird $q = \cos \alpha \cdot x - \sin \alpha \cdot y$, also wird das zugehörige Trägheitsmoment

$$\int q^2 d\sigma = \int (\cos\alpha^2 \cdot x^2 + \sin\alpha^2 \cdot y^2 + 2\cos\alpha\sin\alpha \cdot xy)\,d\sigma$$
$$= \cos\alpha^2 \int x^2 d\sigma + \sin\alpha^2 \int y^2 d\sigma,$$

weil $\int xy\,d\sigma$ nach Voraussetzung null ist, und damit ist der Satz bewiesen. Setzen wir

$$\int x^2 d\sigma = K, \quad \int y^2 d\sigma = J,$$

so ergibt sich für $\mathfrak{S}$ der allgemeine Ausdruck

$$\mathfrak{S} = G \cdot \mathfrak{z} + (\mu_1 - \mu_2)\,g\,(K\cos\alpha^2 + J\sin\alpha^2). \tag{23}$$

Bei den in der Praxis vorkommenden schwimmenden Körpern besitzt die Schwimmebene fast immer eine Symmetrieachse. Diese ist dann auch eine Hauptträgheitsachse. Außerdem wird das Trägheitsmoment für die zweite Hauptträgheitsachse, die durch den Schwerpunkt senkrecht zur Symmetrieachse hindurchgeht, von vornherein infolge einer großen Längenausdehnung des Körpers verhältnismäßig groß. Man untersucht daher nur die Stabilität für die Symmetrieachse.

Dann vereinfacht man die gefundene Formel (22) noch weiter, indem man

$$\mathfrak{z}_0 = (\mu_1 - \mu_2)\,g\,\frac{J}{G} \tag{24}$$

macht. Dadurch wird

$$\mathfrak{S} = G(\mathfrak{z} + \mathfrak{z}_0). \tag{25}$$

Geht man nun von einer aufrecht schwimmenden, sehr dünnen Platte aus, für die nahezu $J = 0$ ist, so ergibt sich zuerst die Formel

$$\mathfrak{S} = G \cdot \mathfrak{z},$$

hierbei bedeutet $\mathfrak{z}$ die Entfernung, in der der Schwerpunkt der Platte unter dem Mittelpunkte des Auftriebes liegt. Die Formel (25) erhält man aus der vorstehenden, indem man $\mathfrak{z}$ durch

$$\mathfrak{z}' = \mathfrak{z} + \mathfrak{z}_0$$

ersetzt. Durch die Einführung dieser Größe wird also der Fall eines beliebigen schwimmenden Körpers auf den eines unendlich schmalen zurückgeführt, und der bei diesem sich

ergebende Abstand $\mathfrak{z}'$ zwischen dem Schwerpunkt und dem Auftriebsmittelpunkt gibt ein unmittelbares Maß für die Stabilität. Dieser Abstand $\mathfrak{z}'$ heißt die metazentrische Höhe, und wenn man sich den ideellen Auftriebsmittelpunkt vertikal über dem Schwerpunkt wirklich aufgezeichnet denkt, nennt man diesen Punkt, dessen Lage die Stabilität bestimmt, das Metazentrum des schwimmenden Körpers.

Übungsbeispiele.

1. Aufgabe. *Eine schwere Flüssigkeit rotiert in einem zylindrischen Gefäß um eine vertikale Achse. Ihre Gleichgewichtsfigur zu finden.*

Auflösung. Durch die Rotation treten Zentrifugalkräfte auf. Diese Kräfte sind auf die Masseneinheit verrechnet

$$= \omega^2 r,$$

wenn ω die Rotationsgeschwindigkeit, r den senkrechten Abstand des betreffenden Massenteilchens von der Rotationsachse bezeichnet, sie fallen in die Linie dieses Abstandes und sind von der Rotationsachse weg gerichtet. Daher haben sie ein Potential, das

$$= \tfrac{1}{2}\omega^2 r^2$$

wird. Bedeutet also U das Potential der wirkenden äußeren Kräfte, so muß für die Oberfläche

Fig. 104.

$$U + \tfrac{1}{2}\omega^2 r^2 = C$$

sein. Ist die einzig wirkende äußere Kraft die Schwere, so ist $U = -gz$, also wird, wenn wir die Rotationsachse selbst zur z-Achse des Koordinatensystems wählen und $C = -gc$ setzen,

$$gz - \tfrac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2) = cg$$

die Gleichung der Oberfläche. Dies ist ein Rotationsparaboloid.

Ist nun das Gefäß ein vertikal gestellter gerader Kreiszylinder, für dessen Boden $z = 0$ sei, ist dabei der Radius des Grundkreises a und die ursprüngliche Höhe der Flüssigkeit b, so liefert die Gleichheit des Volumens vor und bei der Rotation die Gleichung

$$\pi a^2 b = 2\pi \int_0^a z r\, dr = \pi \int_0^a \left(2c - \frac{\omega^2 r^2}{g}\right) r\, dr,$$

woraus

$$c = b - \frac{\omega^2 a^2}{4g}$$

und somit

$$z = b + \frac{\omega^2}{2g}\left(x^2 + y^2 - \frac{a^2}{2}\right)$$

folgt; c ist dabei die Höhe der Flüssigkeit an ihrer tiefsten Stelle $(r = 0)$. Am Rande, wo $x^2 + y^2 = a^2$, wird die Höhe

$$d = b + \frac{\omega^2 a^2}{4g}.$$

Also wird die Erhebung des Randes über die Mitte

$$d - c = \frac{\omega^2 a^2}{2g},$$

und b ist die mittlere Höhe zwischen der Höhe am Rande und in der Mitte.

2. Aufgabe. *Eine homogene Kugel übt auf eine sehr dünne Flüssigkeitsschicht an ihrer Oberfläche eine Anziehung gemäß dem Newtonschen Gesetze aus und ist in gleichförmiger Rotation begriffen. Die Gleichgewichtsfigur zu bestimmen.*

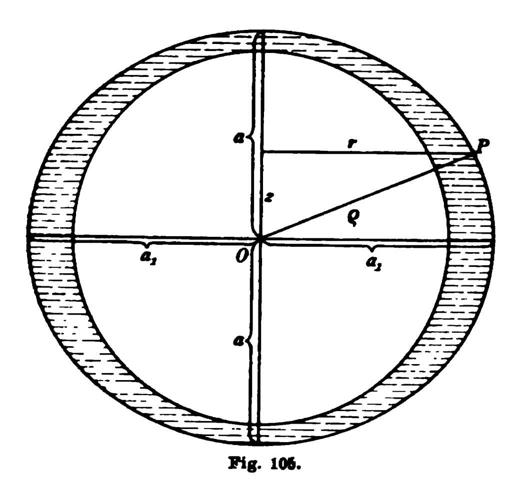


Fig. 106.

Auflösung. Das Potential für die Anziehung der Kugel ist $\frac{M}{\varrho}$, wenn M die Masse der Kugel und ϱ den Abstand des angezogenen Teilchens von ihrem Mittelpunkt bezeichnet. Wählen wir ein Koordinatensystem ähnlich wie in der vorigen Aufgabe, so wird für die Oberfläche

$$\frac{M}{\varrho} + \tfrac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) = c. \tag{a}$$

Haben die Punkte der Oberfläche, die auf der Rotationsachse $(x = 0, y = 0)$ liegen, von dem Kugelmittelpunkt den Abstand a, so wird $\frac{M}{a} = c$ und mithin, für $x^2 + y^2 = r^2$,

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{a\omega^2}{2M} r^2\right).$$

Hieraus folgt, da $\varrho^2 = r^2 + z^2$

$$r^2 + z^2 = a^2\left(1 - \frac{a\omega^2}{2M}r^2\right)^{-2}$$

und in erster Annäherung

$$r^2 + z^2 = a^2 + \frac{a^3\omega^2}{M}r^2.$$

Diese Gleichung können wir schreiben

$$\frac{x^2+y^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1, \tag{b}$$

wenn wir mit demselben Grade der Annäherung

$$a_1 = a\left(1 + \frac{a^3\omega^2}{2M}\right),$$

also

$$\gamma = \frac{a_1 - a}{a} = \frac{a^3\omega^2}{2M} = \frac{a\omega^2}{2g_0} \quad \text{für} \quad g_0 = \frac{M}{a^2}$$

setzen. Die gefundene Gleichung (b) ist die Gleichung eines abgeplatteten Sphäroids. Der berechnete Quotient γ ist die (sehr kleine) Abplattung.

Für irgendeinen Punkt der Oberfläche finden wir, da die linke Seite der Gleichung (a) das Potential V des angezogenen Punktes P darstellt, wenn wir noch

$$r = \varrho \cdot \cos\varphi$$

setzen und V nach ϱ differenzieren, die Größe der auf die Masseneinheit ausgeübten Kraft

$$g = \frac{M}{\varrho^2} - \omega^2\varrho\cos^2\varphi.$$

Setzt man auf der rechten Seite im ersten Gliede ein

$$\frac{M}{\varrho^2} = \frac{M}{a^2}\left(1 - \frac{a\omega^2}{M}r^2\right) = \frac{M}{a^2}\left(1 - \frac{a^3\omega^2}{M}\cos^2\varphi\right)$$

und im zweiten Gliede einfach $\varrho = a$, so ergibt sich angenähert

$$g = \frac{M}{a^2}\left(1 - \frac{2a^3\omega^2}{M}\cos\varphi^2\right).$$

3. Aufgabe. *Eine Flüssigkeitsschicht auf einer ruhenden Kugel werde von dieser und von einer sehr weit entfernten anderen Kugel nach dem Newtonschen Gesetze angezogen. Die Gleichgewichtsfigur zu bestimmen.*

Auflösung. Es sei M_1 die Masse der hinzukommenden Kugel, d der Abstand ihres Mittelpunktes O_1 von dem Mittelpunkte O der ersten Kugel, θ der Winkel, den der Radiusvektor $OP = \varrho$ nach

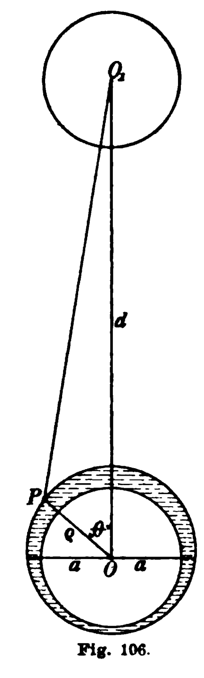


Fig. 106.

einem Punkte P an der Oberfläche der Flüssigkeit mit OO_1 bildet, dann wird, da d sehr groß gegen ϱ sein soll, in dem Dreieck POO_1

$$PO_1 = d - \varrho\cos\theta, \text{ also } \frac{1}{PO_1} = \frac{1}{d}\left(1 + \frac{\varrho}{d}\cos\theta\right).$$

Für die Oberfläche muß aber

$$\frac{M}{PO} + \frac{M_1}{PO_1} = c$$

werden, also finden wir

$$\frac{M}{\varrho} + \frac{M_1}{d}\left(1 + \frac{\varrho}{d}\cos\theta\right) = c.$$

Wir nennen nun a den Radiusvektor eines Punktes an der Oberfläche, der senkrecht zu OO_1 ist, sich also für $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ ergibt, und setzen

$$\varrho = a(1+u),$$

wobei u einen sehr kleinen Bruchteil bedeutet. Im ersten Gliede auf der linken Seite der vorstehenden Gleichung haben wir dann

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{a}(1-u)$$

zu setzen, im zweiten Gliede können wir einfach a für ϱ setzen, und finden zunächst für $\theta = \frac{\pi}{2}$, $u = 0$

$$\frac{M}{a} + \frac{M_1}{d} = c,$$

ferner, indem wir diesen Wert für c einführen

$$u = \frac{M_1 a^2}{M d^2}\cos\theta = \varepsilon\cdot\cos\theta.$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{a}(1-\varepsilon\cos\theta) \quad \text{oder} \quad \varrho = \frac{a}{1-\varepsilon\cos\theta}$$

setzen wir dann ein

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \varrho\cos\theta = z,$$

so ergibt sich in dem benutzten Grade der Annäherung

$$x^2 + y^2 + (z - a\varepsilon)^2 = a^2.$$

Dies ist die Gleichung einer Kugel von dem Radius a, deren Mittelpunkt N um die Strecke $a\varepsilon$ gegen den Mittelpunkt O_1 der zweiten festen Kugel zu verschoben ist.

Durch die Anziehung dieser Kugel wird also ihrem Mittelpunkte die flüssige Schicht, welche die andere Kugel umgibt, einfach um die Strecke $a\varepsilon$ genähert. In der Tat bleibt hierbei das Gesamtvolumen der Flüssigkeit ungeändert, da man sie nach wie vor als die Differenz derselben zwei Kugeln, einer äußeren und einer inneren, erhält.

4. Aufgabe. *Den Druck p der Atmosphäre als Funktion der Höhe z darzustellen, wenn konvektives Gleichgewicht herrscht, d. h. $p = c \cdot \mu^\gamma$ ist, wobei $\gamma = 1{,}41$, c eine Konstante ist und μ die Dichtigkeit an der betreffenden Stelle bedeutet. Dies ist der Fall, wenn kein Wärmeübergang durch Leitung zwischen den einzelnen Teilen der Atmosphäre stattfindet.*

Auflösung. Bezeichnet a den Erdradius, so wird die Entfernung des betrachteten Punktes vom Erdmittelpunkt $a + z$ und die Kraft der Schwere pro Masseneinheit an dieser Stelle $ga^2 : (a + z)^2$. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten dann

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\mu g a^2}{(a + z)^2}.$$

Die ersten beiden Gleichungen drücken aus, daß p nur eine Funktion der Höhe z ist. Die letzte Gleichung ergibt, wenn wir $p = c\mu^\gamma$ einführen,

$$c\gamma\mu^{\gamma-2} d\mu = -\frac{ga^2 dz}{(a + z)^2}$$

und, wenn wir integrieren,

$$c\frac{\gamma}{\gamma - 1}\mu^{\gamma-1} + c' = g\left(\frac{a^2}{a + z} - a\right) = -\frac{gaz}{a + z}.$$

Um die Konstante c auszuwerten, nennen wir p_0, μ_0 Druck und Dichtigkeit auf dem Meeresniveau, so daß $p_0 = c\mu_0{}^\gamma$ und

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{\gamma-1} + c'\frac{\mu_0}{p_0} = -\frac{\mu_0}{p_0}\frac{gaz}{a + z}.$$

Man sieht dann, wenn man $\mu = \mu_0$, $z = 0$ macht, daß $c'\frac{\mu_0}{p_0} = -\frac{\gamma}{\gamma - 1}$ wird, und erhält somit

$$1 - \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{\gamma-1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\cdot\frac{\mu_0}{p_0}\cdot\frac{gaz}{a + z}$$

oder

$$1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\cdot\frac{\mu_0}{p_0}\cdot\frac{gaz}{a + z}.$$

Vgl. Lord Kelvin (W. Thomson), Mathem. and Physical Papers, vol. 3, 1890, p. 255; Greenhill, Hydrostatics, p. 314, 491.

5. Aufgabe. *Denkt man sich einem schwimmenden Körper alle möglichen Lagen gegeben, in denen der Auftrieb dem Gewicht des Körpers gleich ist, so umhüllen in dem Körper die verschiedenen Schwimmebenen eine Oberfläche, welche die Dupinsche Schwimmoberfläche heißt. Man soll beweisen, daß dieselbe Oberfläche auch von den Schwerpunkten der Schwimmflächen erfüllt wird.*

Auflösung. Wir haben gesehen, daß, wenn der Körper um eine durch den Schwerpunkt S seiner Schwimmfläche gehende Achse unendlich wenig gedreht wird, der hierbei austauchende Teil an Volumen gleich dem neu eintauchenden Teile ist. Also geht bei dieser Drehung die alte Schwimmebene in eine neue Schwimmebene über, und wir erkennen, daß zwei unendlich benachbarte Schwimmebenen sich immer in einer durch den erwähnten Schwerpunkt S gehenden Geraden schneiden. Die Gerade ist aber als Schnitt zweier unendlich benachbarten Tangentialebenen eine Tangente der Schwimmoberfläche und bleibt es, wenn wir sie um den Schwerpunkt S in der Schwimmebene beliebig drehen, denn alles was wir gesagt haben, bleibt dann gültig. Also ist S der Berührungspunkt der Schwimmebene mit der Schwimmoberfläche, w. z. b. w.

6. Aufgabe. *Eine ebene Fläche ist in eine schwere Flüssigkeit eingetaucht. Den Druckmittelpunkt zu finden.*

Auflösung. Unter Druckmittelpunkt verstehen wir den Mittelpunkt des Systems paralleler Kräfte, welches der Druck der Flüssigkeit auf den festen Körper darstellt. Wir führen in der Ebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, dessen x-Achse in die Schnittlinie der Ebene mit der freien Oberfläche der Flüssigkeit fällt und dessen y-Achse in die Flüssigkeit hineingeht. Ist dann α der Winkel, den die Ebene mit der Vertikalen bildet, z die Tiefe eines Punktes der Ebene unter der freien Oberfläche, so wird

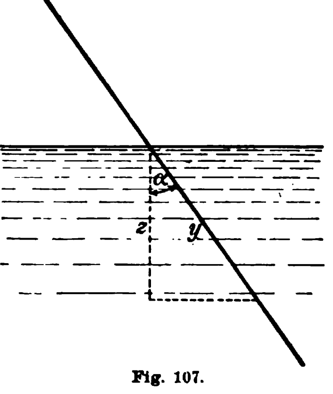


Fig. 107.

$$z = y \cdot \cos\alpha .$$

Für die Koordinaten des Druckmittelpunktes ergeben sich nun, wenn $d\sigma = dx \cdot dy$ das Flächenelement in der Ebene bedeutet, die Ausdrücke

$$\xi = \frac{\int p\, x\, d\sigma}{\int p\, d\sigma}, \quad \eta = \frac{\int p\, y\, d\sigma}{\int p\, d\sigma}.$$

Es wird aber

$$p = p_0 + g\mu z = p_0 + g\mu \cos\alpha \cdot y,$$

also wenn insbesondere der Druck p_0 an der freien Oberfläche $= 0$ ist,

$$\xi = \frac{\int xy\,d\sigma}{\int y\,d\sigma}, \qquad \eta = \frac{\int y^2\,d\sigma}{\int y\,d\sigma}.$$

Dieser Punkt ist also unabhängig von der Neigung der ebenen Fläche. Er ist der sogenannte Perkussions- oder Oszillationsmittelpunkt der ebenen Fläche.

7. Aufgabe. *Die Gleichgewichtslage eines homogenen dreiseitigen Prismas zu finden, das unter dem Einfluß der Schwere auf einer homogenen Flüssigkeit schwimmt derart, daß seine Kanten der Schwimmebene parallel sind.*

Auflösung. Wir betrachten einen senkrechten Querschnitt ABC des Prismas, von dem ein dreieckiges Stück AB_1C_1 untergetaucht sein wird. Es verhalten sich dann die Inhalte der beiden Dreiecke wie die zugehörigen Dichtigkeiten μ, μ_1, wenn wir die Dichtigkeit der oberen Flüssigkeit als verschwindend gering ansehen (wie es z. B. bei der Luft dem Wasser gegenüber der Fall ist). Setzen wir dann

$$AB = a, \quad AC = b,$$
$$AB_1 = x, \quad AC_1 = y,$$

so ergibt sich sofort

$$xy = \frac{\mu_1}{\mu} ab. \qquad \text{(a)}$$

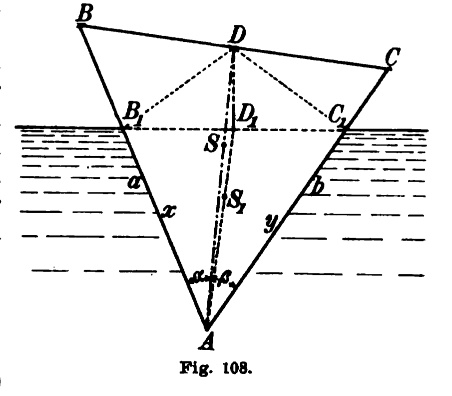


Fig. 108.

Es müssen ferner die Schwerpunkte S, S_1 der beiden Dreiecke in einer Vertikalen liegen. Vermehren wir aber die Abstände dieser Schwerpunkte von A um die Hälfte, so erhalten wir die Mitten D und D_1 der Seiten BC und B_1C_1, und auch D und D_1 müssen in einer Vertikalen liegen. Also ist D_1D die Mittelsenkrechte von B_1C_1 und es wird

$$B_1D = C_1D.$$

Setzen wir noch $AD = m$, $\sphericalangle DAB = \alpha$, $\sphericalangle DAC = \beta$, so wird demnach

$$x^2 - 2mx\cos\alpha + m^2 = y^2 - 2my\cos\beta + m^2$$

oder

$$x^2 - y^2 = 2m(x\cos\alpha - y\cos\beta). \qquad \text{(b)}$$

Durch (a) und (b) sind x, y bestimmt, wenn sich zwei den Ungleichungen

$$0 < x \leqq a, \quad 0 < y \leqq b$$

genügende Lösungen jener Gleichungen finden lassen.

8. Aufgabe. *Die Stabilität eines geraden Kreiszylinders, der mit vertikaler Achse schwimmt, zu untersuchen, und die gleiche Aufgabe für einen geraden Kreiskegel, der mit der Spitze nach unten schwimmt, zu lösen.*

Auflösung. Wir nehmen $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$ an, dann wird, wenn h die Höhe des Zylinderschwerpunktes über der Grundfläche, a der Radius des Grundkreises, $2h'$ die eingetauchte Höhe, also h' die Höhe des Auftriebsmittelpunktes über der Grundfläche ist, das Gewicht des Zylinders

$$G = 2\pi h' a^2 g.$$

Das Trägheitsmoment der Schwimmfläche, die hier ein Kreis mit dem Radius a ist, wird (vgl. unten Aufg. 9)

$$J = \tfrac{1}{4}\pi a^4.$$

Es ergibt sich also als Maß der Stabilität

$$\mathfrak{S} = 2\pi h' a^2 g (h' - h) + \tfrac{1}{4}\pi a^4 g$$

und die metazentrische Höhe wird

$$\mathfrak{z}' = h' - h + \frac{a^2}{8h'}.$$

Für den Kegel ergibt sich, wenn a der Radius der kreisförmigen Schwimmfläche, $\tfrac{4}{3}h'$ die Tiefe der Spitze unter dem Wasserniveau, h die Höhe des Kegelschwerpunktes über der Spitze ist, das Gewicht des Kegels gleich

$$\tfrac{4}{9}\pi a^2 h' g,$$

und h' ist die Höhe des Auftriebszentrums A über der Spitze. Somit wird

$$\mathfrak{S} = \tfrac{4}{9}\pi a^2 h' g (h' - h) + \tfrac{1}{4}\pi a^4 g,$$

und die metazentrische Höhe

$$\mathfrak{z}' = h' - h + \tfrac{9}{16}\frac{a^2}{h'}.$$

Ist aber α der Achsenwinkel des Kegels, so wird

$$a = \tfrac{4}{3}h' \operatorname{tang} \alpha$$

und somit

$$\mathfrak{z}' = h' - h + h' \operatorname{tang}^2 \alpha$$
$$= \frac{h'}{\cos^2 \alpha} - h.$$

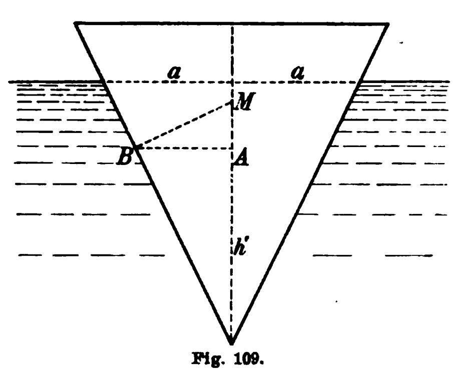


Fig. 109.

Daraus sieht man, daß man das Metazentrum findet, indem man aus dem Auftriebszentrum A eine Horizontale zieht, bis sie in B den Kegel trifft. In B errichtet man dann auf der Tangentialebene des Kegels das Lot, dieses schneidet aus der Achse des Kegels das Metazentrum M aus.

9. Aufgabe. *Die Stabilität einer auf dem Wasser schwimmenden Kugel zu untersuchen.*

Auflösung. Es ist sofort klar, daß, wenn die Kugel homogen ist, also ihr Schwerpunkt mit dem Mittelpunkt zusammenfällt, und sie aus ihrer anfänglichen Lage entfernt wird derart, daß die Wasserverdrängung dieselbe bleibt, sie auch in der neuen Lage im Gleichgewicht ist. Das Gleichgewicht ist also indifferent und die Stabilität null. Dies läßt sich aber auch aus der Formel für die Stabilität verifizieren. Der Schnitt der Kugel mit der Schwimmebene ist eine Kreisfläche, deren Radius wir r nennen. Das Trägheitsmoment dieser Kreisfläche für einen Durchmesser d

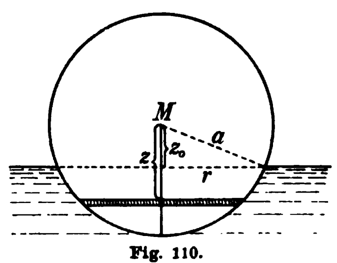


Fig. 110.

wird, wenn φ der Winkel ist, den die Radien nach den Endpunkten einer zu dem Durchmesser d parallelen Sehne mit diesem Durchmesser einschließen,

$$J = 4r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi^2 \cos\varphi \, d\sin\varphi = \frac{r^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2\varphi)^2 \, d(2\varphi) = \frac{\pi r^4}{4}.$$

Um die Entfernung des Auftriebsmittelpunktes von dem Kugelmittelpunkt M zu finden, hat man das statische Moment des eingetauchten Kugelsegmentes für die horizontale Ebene durch den Mittelpunkt M zu berechnen. Zu dem Zwecke bezeichne z den Abstand eines horizontalen Schnittes des Kegelsegmentes von dem Mittelpunkt M,

a den Kugelradius, dann wird das zu berechnende Moment für $a^2 - z^2 = x^2$, $a^2 - r^2 = z_0^2$

$$\mathfrak{M} = \int_{z_0}^{a} \pi (a^2 - z^2) z dz = \frac{\pi}{2} \int_{a}^{z_0} (a^2 - z^2) d (a^2 - z^2)$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{0}^{r} x^2 d(x^2) = \frac{\pi}{4} r^4.$$

Es wird also in der Tat das Maß der Stabilität

$$J - \mathfrak{M} = 0.$$

Ist die Kugel nicht homogen und liegt ihr Schwerpunkt im Abstande h unter dem Mittelpunkt M, ist ferner G ihr Gewicht, so wird das Maß der Stabilität gleich

$$G \cdot h.$$

10. Aufgabe. *Die Gleichgewichtsfigur einer um eine feste Achse gleichförmig rotierenden, homogenen, inkompressibeln Flüssigkeit, deren Teile sich nach dem Newtonschen Gesetze anziehen, ist in der Weise zu untersuchen, daß man frägt, ob ein Ellipsoid als Gleichgewichtsfigur auftreten kann.*

Auflösung. Wenn ein Ellipsoid die Gleichgewichtsfigur ist, so hat, wie wir im zweiten Bande sehen werden, das Potential für einen Punkt P der Oberfläche die Form

$$V = V_0 - (Ax^2 + By^2 + Cz^2),$$

wobei x, y, z die Koordinaten des Punktes P sind. Die z-Achse sei die Rotationsachse und ω die Rotationsgeschwindigkeit, dann muß für die Punkte der Oberfläche die Gleichung erfüllt sein

$$V_0 - (Ax^2 + By^2 + Cz^2) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \text{konst.} \qquad \text{(a)}$$

Dies ist also die Gleichung des Ellipsoids, das die Oberfläche bildet, und schreibt man seine Gleichung in der Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

so ergeben sich die zu erfüllenden Bedingungen

$$\left(A - \frac{\omega^2}{2}\right) a^2 = \left(B - \frac{\omega^2}{2}\right) b^2 = Cc^2$$

oder

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{Aa^2 - Cc^2}{a^2} = \frac{Bb^2 - Cc^2}{b^2}. \qquad \text{(b)}$$

Setzt man nun die für A, B, C sich ergebenden Werte

$$A = \varrho\int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)\sqrt{U}}, \quad B = \varrho\int_0^\infty \frac{du}{(b^2+u)\sqrt{U}}, \quad C = \varrho\int_0^\infty \frac{du}{(c^2+u)\sqrt{U}}$$

ein, wobei, wenn μ die Dichtigkeit bezeichnet,

$$\varrho = \pi\mu abc, \quad U = (a^2+u)(b^2+u)(c^2+u),$$

so ergibt sich aus

$$A - B - \frac{c^2(b^2-a^2)}{a^2b^2}C = 0$$

die Gleichung

$$(b^2-a^2)\int_0^\infty \left[\frac{1}{(a^2+u)(b^2+u)} - \frac{c^2}{a^2b^2}\cdot\frac{1}{c^2+u}\right]\frac{du}{\sqrt{U}} = 0,$$

d. h. es ergibt sich entweder $a = b$, also ein Rotationsellipsoid, oder

$$\int_0^\infty \left[\frac{u}{a^2b^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right]\frac{u\,du}{(\sqrt{U})^3} = 0.$$

Dieser sogenannten Jacobischen Gleichung (s. Jacobis Werke, Bd. 2, S. 19) entspricht ein Ellipsoid mit drei ungleichen Achsen. Zu beachten ist zunächst, daß, damit das Integral verschwinden kann, der Integrand zum Teil negative Werte annehmen muß; damit dies aber möglich sei, muß, da stets $u > 0$,

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} < 0$$

sein, woraus $c < a$ und $c < b$ folgt, so daß das Ellipsoid stets um seine kleinste Achse rotiert.

Ferner ist mit dem Volumen des Ellipsoids auch das Produkt

$$a^2b^2c^2$$

als gegeben anzusehen.

Wir wollen nun bloß die erste Art der Lösung $a = b$, die ein Rotationsellipsoid ergibt, behandeln. Es folgt dann auch $A = B$ und wir finden aus (b)

$$\frac{\omega^2}{2\pi\mu} = (a^2-c^2)\int_0^\infty \frac{cu\,du}{(a^2+u)^2(c^2+u)^{\frac{3}{2}}}.$$

Da der Integrand dieses Integrals immer positiv ist, wird das Integral notwendig positiv, die linke Seite der Gleichung ist aber auch positiv, also ergibt sich ebenfalls $a^2 - c^2 > 0$, d. h. es ist $c < a$, das Sphäroid ist ein abgeplattetes.

Setzt man

$$\lambda = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{c^2}}, \quad c^2 u = v,$$

so geht die vorige Gleichung über in

$$\frac{\omega^2}{2\pi\mu} = \lambda^3 \int_0^\infty \frac{v\,dv}{(1+\lambda^2+v)^2\,(1+v)^{\frac{1}{2}}}.$$

Es ist die Größe auf der linken Seite also eine Funktion der Exzentrizität λ des Sphäroids, und wir wollen

$$\frac{\omega^2}{2\pi\mu} = \varphi(\lambda)$$

setzen. Wir benutzen nun die später noch zu gewinnenden Resultate, wonach wir in diesem besonderen Falle erhalten

$$A = B = \pi\mu \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma^3}(\gamma - \sin\gamma\cos\gamma),$$

$$C = 2\pi\mu \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma^3}(\operatorname{tang}\gamma - \gamma),$$

wenn wir setzen

$$\operatorname{tang}\gamma = \lambda, \quad \text{also} \quad \frac{1}{\cos\gamma^2} = 1 + \lambda^2, \quad \operatorname{arctg}\gamma = \lambda.$$

Es wird also

$$A = \frac{\pi\mu}{\lambda^3}[(1+\lambda^2)\operatorname{arctg}\lambda - \lambda], \quad C = 2\pi\mu\frac{1-\lambda^2}{\lambda^3}[\lambda - \operatorname{arctg}\lambda].$$

Daraus ergibt sich

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\pi\mu}\left[A - \frac{1}{1+\lambda^2}C\right] = \frac{(3+\lambda^2)\operatorname{arctg}\lambda - 3\lambda}{\lambda^3}.$$

Ersetzen wir hierin $\operatorname{arctg}\lambda$ durch seine Reihenentwicklung

$$\operatorname{arctg}\lambda = \lambda - \frac{\lambda^3}{3} + \frac{\lambda^5}{5} - \cdots,$$

so wird

$$\varphi(\lambda) = \tfrac{4}{15}\lambda^2 - \tfrac{8}{35}\lambda^4 + \cdots.$$

Daraus ist zu sehen, daß $\varphi(\lambda)$ mit λ verschwindet. Für $\lambda = +\infty$ wird $\operatorname{arctg}\lambda = \frac{\pi}{4}$, also $\varphi(\lambda) = 0$. Dazwischen ergeben sich für $\varphi(\lambda)$ immer endliche positive Werte.

Um den Verlauf der Funktion näher zu untersuchen, haben wir ihre Derivierte zu bilden, es ergibt sich

$$\varphi'(\lambda) = \frac{\lambda^2+9}{\lambda^4}\varphi_1(\lambda), \quad \text{für} \quad \varphi_1(\lambda) = \frac{(7\lambda+9)\lambda}{(\lambda^2+1)(\lambda^2+9)} - \operatorname{arctg}\lambda.$$

Das Verhalten der Derivierten ist also bestimmt durch das Verhalten der neuen Funktion $\varphi_1(\lambda)$.

Differenzieren wir auch diese, so finden wir

$$\varphi_1'(\lambda) = \frac{8\lambda^4(3-\lambda^2)}{(\lambda^2+1)(\lambda^2+9)^2}.$$

Diese Derivierte verschwindet zwischen 0 und $+\infty$ nur für $\lambda = \sqrt{3}$, ist positiv für kleinere und negativ für größere Werte von λ. Hier hat also $\varphi_1(\lambda)$ ein Maximum, es wächst mithin, da es für $\lambda = 0$ verschwindet, von 0 ausgehend bis zu dem Maximum und nimmt dann beständig ab, bis es für $\lambda = +\infty$ gleich $-\frac{\pi}{2}$ wird. Es muß daher für einen Wert λ' von λ, der $> \sqrt{3}$ ist, verschwinden. Durch ein Näherungsverfahren findet man

$$\lambda' = 2{,}5293$$

und der zugehörige Wert von $\varphi(\lambda)$ wird

$$h = \varphi(\lambda') = 0{,}22467.$$

So zeigt sich, daß, wenn λ von 0 bis $+\infty$ geht, $\varphi(\lambda)$ von 0 anfangend zunimmt, bis es für $\lambda = \lambda'$ den Maximalwert h erreicht, und dann beständig abnimmt, bis es für $\lambda = \infty$ wieder gleich 0 wird.

Daraus ergibt sich, daß

$$\frac{\omega^2}{2\pi\mu} < h \quad \text{oder} \quad \omega^2 < 1{,}4117 \cdot \mu f$$

sein muß (wenn man auf der rechten Seite wieder die bisher $= 1$ angenommene Gravitationskonstante hinzufügt), damit überhaupt eine solche Gleichgewichtsfigur existiert. Im anderen Falle würde, wie man sich vorstellen kann, die Flüssigkeit zerfließen und eine nicht mehr drehrunde Gestalt annehmen.

Genügt aber ω dieser Ungleichung, so sind immer zwei Gleichgewichtsfiguren vorhanden, diese gehören zu zwei Werten λ_1 und λ_2 von λ, für die

$$0 < \lambda_1 < \lambda' < \lambda_2 < \infty.$$

Nur für $\omega^2 = 1{,}4117\,\mu f$ ergibt sich ein einziges Sphäroid, das eine Grenzlage und den Übergang zu nicht rotatorischen Formen bildet.

Für die Rotationsgeschwindigkeit und mittlere Dichtigkeit der Erde wird $\omega^2 : 2\pi\mu f = 1 : 436$. Es ergeben sich also zwei Gleichgewichtsfiguren. Bei der einen würde die Abplattung sehr groß sein, die andere Lösung finden wir, indem wir näherungsweise

$$\varphi(\lambda) = \tfrac{4}{15}\lambda^2 \text{ und dies } = \tfrac{1}{436}$$

setzen. Hieraus folgt $\lambda^2 = \frac{1}{116}$ und, da (ebenfalls angenähert) $a = c(1 + \frac{1}{2}\lambda^2)$ wird, für die Abplattung

$$\frac{a-c}{c} = \frac{1}{232},$$

während der wirkliche Wert für die inhomogene Erde 1 : 293 beträgt.

Die Untersuchung eines gravitierenden und rotierenden Sphäroids stammt von MacLaurin. Er gab die Gleichung, welche die Abhängigkeit der Abplattung von der Rotationsgeschwindigkeit ausdrückt (vgl. Thomson und Tait, Natural Philosophy, vol. 2, p. 326). Das Ziel war die Anwendung auf die Gestalt der Erde, und die wirkliche Feststellung der Erdabplattung bildete ein entscheidendes Moment für die Durchsetzung der Newtonschen Gravitationstheorie. Aus diesen Gesichtspunkten heraus hat Laplace, Mécanique céleste, tome 2, 1799, die Maclaurinschen Sphäroide ausführlich behandelt. Das zunächst paradoxe Resultat, daß auch ein dreiachsiges Ellipsoid als Gleichgewichtsfigur auftreten kann, fand Jacobi, Annalen der Physik und Chemie, Bd. 33, 1834, in den Ges. Werken Bd. 2, S. 19. Mit dem Jacobischen Resultat in engem Zusammenhange stehen die hydrodynamischen Untersuchungen von Dirichlet, die nach seinem Tode von Dedekind mit wesentlichen Zusätzen veröffentlicht wurden in den Göttinger Abhandlungen Bd. 8, 1860 und dem Journal für Math. Bd. 58, 1861 (Werke Bd. 2, S. 263). Diese fanden ihre Fortsetzung in Riemanns Arbeit, Göttinger Abhandlungen 1861, in den Ges. Werken, 2. Aufl., S. 182.

In eine neue Phase trat das Problem durch die Untersuchungen von Poincaré, Acta mathematica, Bd. 7 (1885). Er fand, daß auch das Jacobische Ellipsoid nur eine mögliche Gleichgewichtsfigur unter vielen anderen ist. Er führte außerdem die Betrachtung über die Stabilität der Gleichgewichtsfiguren durch, dabei ergeben sich gewisse kritische Figuren, in denen zwei verschiedene Reihen verschiedenartiger Gleichgewichtsfiguren zusammentreffen; dazu gehört das obenerwähnte besondere Maclaurinsche Sphäroid. Er diskutierte dann ferner die Störungen des Gleichgewichts, die in der Form von Wellen auf der Oberfläche auftreten. Diese Methode benutzte dann Bryan, Philosophical Transactions (A), vol. 180 (1889) und Proceedings of the London Roy. Society, vol. 47 (1890), zum vollständigen Nachweis der Stabilität des Maclaurinschen Sphäroids.

Man vgl. Todhunter, History of the math. Theories of the Attraction and Figure of the Earth, London 1873, und die Abschnitte über Hydrodynamik von Love in der Mathematischen Enzyklopädie, Bd. IV, Teil 3.

Alphabetisches Register.

Die Zahlen bedeuten die Seiten.

Perry, Dr. J., F. R. S., Professor der Mechanik und Mathematik am Royal College of Science zu London, Drehkreisel. Deutsche Ausgabe besorgt von A. Walzel. Mit 58 Abbildungen und 1 Titelbild. [VIII u. 125 S.] 8. 1904. In Leinwand geb. ℳ 2.80.

Routh, Ed. J., Sc. D., LL. D., F. R. S., usw., weiland Professor an der Universität Cambridge, die Dynamik der Systeme starrer Körper. In 2 Bänden mit zahlreichen Beispielen. Autorisierte deutsche Ausgabe von Adolf Schepp, weiland Oberleutnant a. D. in Wiesbaden. Mit einem Vorwort von F. Klein. gr. 8. 1898. In Leinwand geb. ℳ 24.—

I. Band: Die Elemente. Mit 57 Figuren. [XII u. 472 S.] ℳ 10.—
II. — Die höhere Dynamik. Mit 38 Figuren. [X u. 544 S.] ℳ 14.—

Stephan, Regierungsbaumeister P., Oberlehrer an der Kgl. Maschinenbauschule zu Dortmund, die technische Mechanik. Elementares Lehrbuch für mittlere maschinentechnische Fachschulen und Hilfsbuch für Studierende höherer technischer Lehranstalten. 2 Teile. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Teil. Mechanik starrer Körper. Mit 255 Fig. [VIII u. 344 S.] 1904. ℳ 7.—
II. — Festigkeitslehre und Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper. Mit 200 Figuren. [VIII u. 332 S.] 1906. ℳ 7.—

Study, E., Professor an der Universität Bonn, Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. Mit 46 Figuren und 1 Tafel. [XIII u. 603 S.] gr. 8. 1903. Geh. ℳ 21.—, in Halbfranz geb. ℳ 23.—

Tesar, L., Professor an der k. k. Staatsrealschule im XX. Bezirk zu Wien, die Mechanik. Eine Einführung mit einem metaphysischen Nachwort. Mit 111 Figuren. [XIV u. 220 S.] gr. 8. 1909. Geh. ℳ 3.20, in Leinwand geb. ℳ 4.—

Timerding, Dr. H. E., Professor an der Technischen Hochschule in Braunschweig, Geometrie der Kräfte. Mit 27 Figuren. [XII u. 381 S.] gr. 8. 1908. In Leinwand geb. n. ℳ 16.—

Voß, Dr. A., Professor an der Universität München, Prinzipien der rationellen Mechanik. gr. 8. In Leinwand geb. [In Vorbereitung.]

Weber, Dr. H., und Dr. J. **Wellstein**, Professoren an der Universität Straßburg i. E., Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Band: Elementare Algebra und Analysis. Bearbeitet von H. Weber. 3. Auflage. Mit 40 Figuren. [XVIII u. 532 S.] 1909. ℳ 10.—
II. — Elemente der Geometrie. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. 2. Auflage. Mit 251 Figuren. [XII u. 596 S.] 1907. ℳ 12.—
III. — Angewandte Elementar-Mathematik. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein u. R. H. Weber (Rostock). Mit 358 Figuren. [XIII u. 666 S.] 1907. ℳ 14.—

Webster, A. G., Ph. D., Professor of Physics, Clark University, Worcester, the Dynamics of Particles, and of rigid, elastic, and fluid Bodies, being Lectures on mathematical Physics. Mit zahlreichen Figuren. [XII u. 588 S.] gr. 8. 1904. Geb. ℳ 14.—

——— Lehrbuch der Dynamik, als Einführung in die theoretische Physik. In 2 Teilen. Deutsche Ausgabe von C. H. Müller. Mit zahlreichen Figuren. gr. 8.

I. Teil: Dynamik des Punktes und des starren Körpers. [Erscheint Ostern 1911.]
II. „ Potentialtheorie und Dynamik der deformierbaren Körper. [Erscheint im Herbst 1911.]

Verlag von B. G. TEUBNER in LEIPZIG und BERLIN

AUG. FÖPPL: VORLESUNGEN ÜBER TECHNISCHE MECHANIK

In 6 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Band. **Einführung in die Mechanik.** 4. Auflage. Mit 103 Figuren. [XVI u. 428 S.] 1910. ca. ℳ 10.—

II. — **Graphische Statik.** 2. Auflage. Mit 176 Figuren. [XII u. 471 S.] 1903. ℳ 10.—

III. — **Festigkeitslehre.** 4. Auflage. Mit 86 Figuren. [XVI u. 426 S.] 1909. ℳ 10.—

IV. — **Dynamik.** 3., stark veränderte Auflage. Mit 71 Figuren. [VIII u. 422 S.] 1909. ℳ 10.—

V. — **Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie.** Mit 44 Figuren. [XII u. 391 S.] 1907. ℳ 10.—

VI. — **Die wichtigsten Lehren der höheren Dynamik.** Mit 80 Figuren. [XII u. 490 S.] 1910. ℳ 12.—

Föppls Werk will den Studierenden an der technischen Hochschule den gesamten Stoff der technischen Mechanik bieten. Im großen und ganzen hält es sich an das auch in den Vorlesungen gebotene Material, doch geht es an geeigneten Stellen über dieses Ziel hinaus, so daß es sich infolge dieser Ergänzungen auch für den Techniker von Beruf hervorragend zum Nachschlagen über Probleme, die er bei seinen Arbeiten notwendig hat, eignet. Zahlreiche musterhafte Übungsbeispiele, die aus der Praxis des Maschinen- und Bauingenieurs entnommen sind, lehren die Anwendung der vorgetragenen Theorien und tragen am besten dazu bei, deren Verständnis zu vertiefen. Besonderen Wert legt der Verfasser auf eine für den Leser recht eindringliche Erörterung grundsätzlicher Fragen. Schwierige Untersuchungen werden in klarer, leicht verständlicher Sprache geführt. Nirgends wird das Ziel durch eine Häufung von Formeln und Rechnungen erreicht, steht Verfasser doch auf dem Standpunkt, daß die Mathematik für die Lehrer der technischen Mechanik nur Mittel zum Zweck ist. Es ist hier nicht möglich, auf den reichen Inhalt des jetzt auf 6 Bände erweiterten Werkes einzugehen. Die rasche Folge der Auflagen spricht am besten für die praktische Brauchbarkeit des Werkes.

„Mit Recht zählen die Föpplschen Lehrbücher über Mechanik zu den beliebtesten in der technischen Literatur. Der Grund ist wohl der, daß der Verfasser es versteht, sich ganz in den Geist des Lernenden hineinzuversetzen, mit ihm gemeinsam an jede neue Aufgabe heranzutreten, und dies nicht nur von einer Seite zu fassen, von der aus die formale analytische Durchrechnung möglich ist, sondern von einer solchen, die den Lernenden bereits vor der genauen Lösung befähigt, sich einen abschätzenden Überblick über die auftretenden Einzelerscheinungen zu verschaffen. Demgemäß nimmt die anschauliche Beschreibung, und aus gleichem Grunde auch die Besprechung der erhaltenen Ergebnisse, einen breiten Raum neben der mathematischen Fassung ein.“ **(Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure.)**

„Föppl versteht die Kunst, mit klaren und interessanten Worten, gestützt auf geistreich gewählte Beispiele, auseinanderzusetzen, was die Formel kurz aber trocken zusammenfaßt. Man gewinnt daraus auf die angenehmste Art Einsichten, die sich sonst hinter langen Formelentwicklungen verbergen. Die Auseinandersetzungen werden bei Föppl zwar äußerlich länger als in der knappen Formelsprache anderer Bücher, die zum Verständnis nötige Zeit wird aber kürzer. Das sind Vorzüge, die für den Praktiker schwerer ins Gewicht fallen, als die bei früheren Auflagen aus mathematischen Kreisen geäußerten Bedenken gegen die Korrektheit mancher Entwicklungen.“ **(Elektrotechnische Zeitschrift.)**

T1

ROBERT MARCOLONGO
O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT NEAPEL

THEORETISCHE MECHANIK

AUTORISIERTE DEUTSCHE BEARBEITUNG

VON

H. E. TIMERDING
O. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE
IN BRAUNSCHWEIG

ZWEITER BAND
DYNAMIK
UND MECHANIK DER DEFORMIERBAREN KÖRPER

MIT 38 TEXTFIGUREN



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1912

VORWORT.

Dem Vorwort, das dem ersten Bande vorangestellt ist, sind nur wenige Bemerkungen hinzuzufügen, die sich insbesondere auf den Inhalt des vorliegenden zweiten Bandes beziehen. Es ist bei diesem die Tätigkeit des Übersetzers durchweg weit mehr, als es beim ersten Bande der Fall war, gegen die Arbeit des Verfassers zurückgetreten. Die meisten Kapitel sind nämlich gegen den Wortlaut der italienischen Ausgabe von dem Verfasser einer völligen Umarbeitung unterzogen, die drei letzten Kapitel sogar ganz neu hinzugefügt, und dann aus dem Manuskript meist wortgetreu übersetzt worden. Es fällt so das Verdienst und die Verantwortung fast ausschließlich dem Verfasser zu. Der Übersetzer hat selbständig nur einige wenige Übungsbeispiele hinzugefügt, mit der Absicht, die Darstellung noch in einigen Punkten zu ergänzen und abzurunden.

An eine Vollständigkeit irgendwelcher Art konnte bei diesem Bande noch weniger wie beim ersten Bande gedacht werden. Im Gegenteil gebot die große Ausdehnung und die zum Teil recht bedeutende Schwierigkeit des zu bewältigenden Stoffes die sorgfältigste Auswahl und vorsichtigste Beschränkung. Manches, was hier in einem kurzen Kapitel abgemacht werden mußte, würde zu einer einigermaßen erschöpfenden Behandlung allein für sich einen umfangreichen Band erfordern. Das gilt vornehmlich für die vier letzten Kapitel. Es sind daher bei der Mechanik der deformierbaren Körper nur die allgemeinen Grundlagen der Theorie entwickelt worden, insbesondere konnten von der Hydrodynamik nur einige wenige Hauptsachen gebracht werden; bei der Potentialtheorie hat der Verfasser es vorgezogen, die allgemeinen Fragen nur kurz zu streifen, dagegen ein besonders bedeutsames Problem, die An-

ziehung der Ellipsoide, ausführlicher zu besprechen. Ein weiteres wichtiges Gebiet, die Kreiseltheorie, konnte nur in den Grundzügen gekennzeichnet und in einigen Übungsbeispielen etwas weiter ausgeführt werden. Ähnlich ist überall das herausgegriffen worden, was besonders wichtig schien und sich leicht verständlich machen ließ. Hoffentlich wird die getroffene Auswahl als zweckmäßig befunden werden!

Auch in diesem Bande ist auf die historische Entwicklung der Probleme und ihre Literatur besondere Rücksicht genommen worden. Es schien wichtig, dem Lernenden die Stellen nachzuweisen, an denen er weitere Belehrung findet. Das Maß der vorausgesetzten mathematischen Hilfskenntnisse ist nach Möglichkeit beschränkt worden. Es war überall das Bestreben des Verfassers, diese Kenntnisse eben an den behandelten mechanischen Problemen zu erweitern und zu vertiefen und so nicht bloß ein handliches Lehrbuch der Mechanik, sondern nebenbei auch ein nützliches Übungsbuch der Analysis zu liefern. Möge sich in dieser doppelten Hinsicht das nunmehr zum Abschluß gelangte Werk als brauchbar erweisen und möge es der schönen Wissenschaft, der es gewidmet ist, neue Freunde erwerben!

Neapel und Braunschweig, September 1911.

R. MARCOLONGO.
H. E. TIMERDING.

INHALTSVERZEICHNIS.

Erster Teil. **Dynamik des Punktes.**

Erstes Kapitel. **Die Grundgesetze der Bewegung.**

Zweites Kapitel. **Besondere Probleme der Bewegung eines Punktes.**

Zweiter Teil. **Dynamik der Punktsysteme.**

Drittes Kapitel. **Das d'Alembertsche Prinzip und die allgemeinen Gleichungen der Dynamik.**

Viertes Kapitel. **Allgemeine Prinzipien der Bewegung eines materiellen Systems.**

Fünftes Kapitel. **Dynamik der starren Systeme.**

Sechstes Kapitel. **Das Newtonsche Potential.**

Dritter Teil. **Mechanik der deformierbaren Körper.**

Siebentes Kapitel. **Kinematik der deformierbaren Körper.**

Achtes Kapitel. **Statik der deformierbaren Körper.**

Neuntes Kapitel. **Grundzüge der Hydrodynamik.**

ERSTER TEIL

DYNAMIK DES PUNKTES

Erstes Kapitel.

Die Grundgesetze der Bewegung.

1. Das Trägheitsprinzip. In der Kinematik wurde die Bewegung rein für sich betrachtet, in der Statik wurde der Begriff der Kraft eingeführt, die Dynamik vereinigt beides, indem sie Bewegung und Kräfte in ihrer gegenseitigen Abhängigkeit untersucht.[1])

Diese Untersuchung knüpft an den Begriff des materiellen Punktes an. Ein solcher ist zu definieren als ein Punkt, der als beweglich und als Angriffspunkt von Kräften angesehen wird. Sucht man den Übergang von dieser rein theoretischen Definition zu der Erfahrung, so wird man zunächst sagen können: ein wirklicher Körper läßt sich als ein materieller Punkt auffassen, wenn man den Unterschied der Bewegung seiner einzelnen Teile gegen ein bestimmtes Bezugssystem als verschwindend gering annehmen kann. Darauf beruht z. B. die Möglichkeit, unter Umständen die Himmelskörper als materielle Punkte anzusehen.

Die Auseinandersetzung der Beziehungen zwischen Kraft und Bewegung kann nun so geschehen, daß man erstens die Bewegung festlegt, die eintritt, wenn an dem materiellen Punkte keine Kraft angreift, zweitens die Bewegung, die eintritt, wenn an dem Punkte eine Kraft angreift, und drittens die

1) Für den ganzen ersten Teil vgl. man die beiden Werke: Euler, *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, Petropoli 1736 und Routh, *A Treatise on the dynamics of a particle*, Cambridge 1898. Jenes bildet die erste, dieses die letzte zusammenfassende Darstellung der Punktmechanik. Man kann so leicht die Entwicklung dieser Disziplin erkennen, wird aber auch finden, wie viel schon bei Euler in seiner endgültigen Gestalt auftritt.

Bewegung, die man erhält, wenn der Punkt Angriffspunkt mehrerer Kräfte ist.

Die erste Regel ist sonach das folgende Trägheitsprinzip, Newtons erstes Gesetz der Bewegung:

Jeder materielle Punkt, auf den keine Kraft wirkt, ist entweder in Ruhe oder in gleichförmiger geradliniger Bewegung begriffen. Die klassische Formulierung Newtons lautet: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directam nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare (*Philosophiae naturalis principia math.*, 1687, Einleitung.[1]) Die eigentümliche Ausdrucksweise ist zu erklären aus metaphysischen Vorstellungen, nämlich dem scholastischen Gegensatze zwischen dem lebendigen Wirken des Geistes und der toten Trägheit der Materie, die nur widerwillig einer ihr aufgezwungenen Kraft nachgibt.

Die exakte, von metaphysischen Bestandteilen freie Ausdeutung des Trägheitsprinzips, das sich im Beginne der Neuzeit gegen die aristotelische Physik nach und nach durchgesetzt hat und durch Galilei und seine Schule zur endgültigen Anerkennung gebracht ist, hat in der jüngsten Zeit große Schwierigkeiten bereitet, erstens weil es eine absolute Bewegung voraussetzt, indem es mit einer Drehung des Bezugskörpers seine Geltung verliert, und zweitens, weil es die Messung der Zeit

1) Über die Geschichte des Trägheitsprinzipes vergleiche vor allem Wohlwill, *Die Entdeckung des Beharrungsgesetzes*, Zeitschrift für Völkerpsychologie und Sprachwissenschaft, Bd. 14, S. 365, Bd. 15, S. 70, 337 (1884), ferner Biblioteca Math. (2) Bd. 2, S. 19 (1888). Als wissenschaftliches Prinzip hat es in zielbewußter Weise zuerst Galilei ausgesprochen (*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze,* 1636, Edizione nazionale Vol. 8, Giornata IV: De motu projectorum, auch deutsch in Ostwalds Klassikern Nr. 11). Man sehe außerdem Mach, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung*, Leipzig 1883 (später viele Auflagen); Vailati, *Le speculazioni di Giovanni Benedetti sul moto dei gravi*, Atti della R. Accademia di Torino, Vol. 33 (1898) p. 559; Masci, *Sul concetto di movimento,* Atti della R. Accademia di Scienze morali di Napoli, Vol. 25 (1892) Parte 2ª, p. 159; Duhem, *De l'accélération produite par une force constante,* Comptes rendus du IIme Congrès international de Philosophie, Genève 1904, p. 859.

als von vornherein gegeben annimmt, während diese doch erst durch eine Bewegung, die wir als gleichförmig voraussetzen, ermöglicht wird.

In dieser Hinsicht ist es von Bedeutung, daß Galilei das Prinzip als eine Abstraktion aus der Erfahrung zunächst für die Körper an der Erdoberfläche und die Relativbewegung gegen die Erde ausgesprochen hat. Newton begleitet seine allgemeine Formulierung mit der energischen Betonung der Existenz eines absoluten Raumes und einer absoluten Zeit. Doch hat es, was auch zu beachten ist, bei Newton den Charakter einer Aussage im Irrealis, einen Körper, auf den keine Kraft wirkt, gibt es in der Wirklichkeit nicht, das Prinzip ist so nur die Vorbereitung auf das zweite Prinzip, das die Bewegung beim Vorhandensein einer Kraft charakterisiert.

2. Das Wirkungsprinzip. Dieses zweite Gesetz Newtons lautet wörtlich: Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur, oder auf Grund unserer Begriffe einfach: die Beschleunigung des materiellen Punktes ist der an ihm angreifenden Kraft gleichgerichtet und proportional. Ist also die Beschleunigung durch den Vektor $\mathfrak{w}$, die Kraft durch den Vektor $\mathfrak{F}$ gegeben, so haben wir eine Gleichung von der Form

$$m\mathfrak{w} = \mathfrak{F},$$

wobei m einen Zahlfaktor bedeutet. Dieser Zahlfaktor heißt die Masse des materiellen Punktes. Zur weiteren Erläuterung sei noch folgendes bemerkt:

a) In der Formulierung des Prinzipes liegt, daß die Masse dem bewegten Punkte als einem Individuum eigentümlich und sowohl von der Bewegung, die er ausführt, als auch von den Kräften, die an ihm angreifen, unabhängig ist. Dagegen ist durch die Aussage des Prinzipes noch nicht ausgeschlossen, daß m eine Funktion der Zeit ist, es ist vielmehr eine neue Aussage, daß der Quotient der beiden gleichgerichteten Vektoren $\mathfrak{F}:\mathfrak{w}$, d. h. des Kraftvektors und der gleichzeitigen Beschleunigung, für einen und denselben

materiellen Punkt von der Zeit unabhängig sein soll. In dieser neuen Aussage liegt die mathematische Formulierung des als Erhaltung der Materie bekannten Erfahrungssatzes.

b) Das Prinzip setzt die Begriffe des absoluten Raumes und der absoluten Zeit voraus, doch ist klar, daß bei einer gleichförmigen Translationsbewegung, der man den materiellen Punkt mitsamt dem Bezugssystem unterwirft, die Beschleunigung ungeändert bleibt. Die Aussage des Prinzipes ist also unabhängig von einer gleichförmigen Translationsbewegung des ganzen zugrunde gelegten Raumes, nicht aber von irgend einer Rotationsbewegung.

c) Der Gedanke einer ursächlichen Verknüpfung liegt wohl in Newtons Meinung, nicht aber in der Aussage des Satzes, wenn man von dem Terminus vis motrix, bewegende Kraft, absieht, der in der Zeit des noch nicht fixierten Kraftbegriffes zur näheren Präzisierung notwendig war. Was der Satz wirklich liefert, ist eine funktionale Beziehung allereinfachster Art zwischen der Kraft und der Bewegung. Den Wunsch nach einer einfachen Definition des Begriffes Kraft muß man hierbei freilich unterdrücken, ebenso die gleich naheliegende Frage, ob die Kraft als etwas Wirkliches oder als eine bloße Fiktion anzusehen ist. Vom rein theoretischen Standpunkte ist dazu zu sagen, daß, wo es sich um eine mathematische Entwicklung handelt, auch die benutzten Begriffe mathematische Begriffe sein müssen. So ist auch der Begriff des materiellen Punktes ein mathematischer Begriff und mit einem wirklichen Körper nicht ohne weiteres zusammenzuhalten. Es schwebt also die Entwicklung nicht etwa in der Luft, weil die Frage nach der Realität ihrer Grundbegriffe nicht entschieden ist. Was mit der Erfahrung verglichen wird, sind nicht diese Begriffe, sondern gewisse Beziehungen, zu denen die mathematische Entwicklung führt. Aus dem Grade der Übereinstimmung dieser Beziehungen mit den analogen Beziehungen, wie sie unmittelbar aus der Erfahrung hervorgehen, schließen wir darauf, wie weit die theoretische Betrachtung sich als nützlich für die Erforschung und Beherrschung von Vorgängen in der äußeren

Natur erweist, ein Maßstab für ihre Wahrheit oder Falschheit erwächst aber daraus nicht, dieser liegt vielmehr allein in ihrer eigenen inneren Folgerichtigkeit. —

Das Prinzip bedarf einer wesentlichen Ergänzung für den Fall, daß mehrere Kräfte auf den materiellen Punkt wirken. So gelangen wir zu einem dritten Prinzip, das die Festlegung des Zusammenhanges zwischen Kräften und Bewegung für den materiellen Punkt vervollständigt und folgendermaßen formuliert werden kann: Greifen an einem materiellen Punkte mehrere Kräfte an, so ist die Beschleunigung dieselbe, als ob an dem Punkte die Resultante dieser Kräfte allein angriffe. Dieses Prinzip, das wir als das Prinzip der Resultante bezeichnen können, ist in der Newtonschen Formulierung des Parallelogrammgesetzes enthalten. Aus ihm folgt, wenn $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ die wirkenden Kräfte sind, daß

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}$$

wird, wenn wir $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n$ setzen.

3. Das Maß der Masse eines Körpers. Nach der im vorigen Paragraphen aufgestellten Grundgleichung muß sich ergeben, wenn auf zwei verschiedene materielle Punkte mit den Massen m und m' dieselbe Kraft $\mathbf{F}$ wirkt,

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}, \quad m'\mathbf{w}' = \mathbf{F}$$

und sonach, wenn w und w' die Größen der beiden Beschleunigungen $\mathbf{w}$ und $\mathbf{w}'$ bezeichnen,

$$m : m' = w' : w,$$

d. h. die Massen verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Beschleunigungen. Hierin liegt eine Möglichkeit, die Massen zu bestimmen.

Wenn anderseits den beiden materiellen Punkten dieselbe Beschleunigung $\mathbf{w}$ durch zwei verschiedene Kräfte $\mathbf{F}$ und $\mathbf{F}'$, deren Größen F und F' seien, erteilt wird, so ergibt sich

$$m : m' = F : F'.$$

Dies wird von besonderer Bedeutung durch die Tatsache, daß an der Oberfläche der Erde sich alle Körper mit der gleichen

Beschleunigung vertikal nach abwärts bewegen. Die an ihnen angreifenden Kräfte der Schwere lassen sich aber bestimmen durch die Wage, und so findet man das Resultat:

Die Massen der Körper an der Oberfläche der Erde verhalten sich wie ihre an einem bestimmten Orte mit Hilfe der Wage gemessenen Gewichte.

Die Beschleunigung g, welche die Schwere den Körpern (im leeren Raum) erteilt, ist in unseren Breiten im Meeresniveau etwa gleich 981 cm. Als die Einheit für das Maß der Masse legt man das Gramm fest, nämlich die Masse von einem Kubikzentimeter reinen Wassers bei 4^0 Celsius unter 760 mm Barometerdruck. Auf Grund dieser Einheit ist die Masse eines beliebigen Körpers sofort zu bestimmen.

Das Gewicht ist nicht in einfacher Weise für die Festlegung der Krafteinheit zu benutzen, da es mit der Breite wechselt und auch bei der Festsetzung einer bestimmten Normalbreite immer noch die genaue Ermittlung der Schwerebeschleunigung erfordern und einen unbequemen Zahlfaktor mit sich bringen würde. Dieser Übelstand wird in dem absoluten Maßsystem (c. g. s.) vermieden. Hiernach wird als die Einheit der Kraft, das Dyn, die Kraft festgelegt, welche der Masse 1 Gramm die Beschleunigung 1 Zentimeter pro Sekunde erteilt. Die Kraft, welche die Schwere eines Gramms darstellt, beträgt g Dyne; deshalb ist das Dyn der 981ste Teil von dem Gewicht eines Gramms, d. h. 1,02 Milligramm. Sie ist daher sehr klein, und um sie praktisch brauchbar zu machen, leitet man aus ihr die Megadyne ab, die gleich 10^6 Dyn, also ungefähr gleich dem Gewicht eines Kilogramms ist.

Die Dimensionen der Beschleunigung fanden wir gleich $[l, t^{-2}]$. Für die Kraft ergeben sich also die Dimensionen

$$[m, l, t^{-2}].$$

Würde man von Krafteinheiten (k) anstatt von Masseneinheiten ausgehen, so ergäben sich für die Masse die Dimensionen

$$[k, l^{-1}, t^{2}].$$

Dies müßte eigentlich als der natürliche Weg erscheinen, wenn

man, wie wir es tun, durch die Statik hindurch zu der Dynamik gelangt. Es ist nur die leichte Vergleichbarkeit der Massen mit Hilfe der Wage auf der einen Seite und die Unabhängigkeit der Masse von Raum und Zeit auf der anderen Seite, was das umgekehrte Verfahren angebrachter erscheinen läßt.

4. Das Gegenwirkungsprinzip. Newton hat den beiden ersten Bewegungsgesetzen das dritte Prinzip an die Seite gestellt: Zu jeder Kraft gehört eine entgegengesetzt gleiche Kraft, die an einem anderen materiellen Punkte angreift. Auf Grund dieses Prinzipes kann man jede Kraft mit einem anderen materiellen Punkte in Verbindung bringen und sie als die Wirkung (Actio) dieses Punktes auf den ersten Punkt bezeichnen, während man umgekehrt die an dem zweiten Punkte angreifende Kraft die Gegenwirkung (Reactio) des ersten Punktes auf den zweiten nennt. Dann gelangt man zu der Newtonschen Formulierung: actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem, sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi. Doch ist eine solche rein mathematische Wortdefinition keineswegs Newtons Meinung, er sieht vielmehr den Begriff von Wirkung und Gegenwirkung als von vornherein feststehend an. Es handelt sich für ihn demnach durchaus um einen metaphysischen Satz.

Das Prinzip besitzt auch offenbar nicht dieselbe Allgemeinheit wie die beiden ersten Gesetze, welche die methodische Grundlage für die dynamische Beschreibung aller Bewegungen bilden. Dem gegenüber muß das dritte Gesetz als eine bloße Erfahrungstatsache gelten, deren Allgemeingültigkeit nicht unangezweifelt geblieben ist. Als ein rein theoretisches Prinzip kann es auf keinen Fall angesehen werden, z. B. würde ihm die Konstruktion eines von einem festen Zentrum angezogenen materiellen Punktes widersprechen. Demgemäß wird es auch für die folgenden allgemeinen Entwicklungen ohne Bedeutung bleiben.

5. Instantankräfte. Impuls. Nennen wir P den be-

wegten Punkt, so können wir $w = \ddot{P}$ setzen und haben demnach die Grundgleichung

$$m\ddot{P} = F, \tag{1}$$

an die wir alles weitere anknüpfen wollen.

Zunächst integrieren wir die Gleichung nach der Zeit von t_0 bis t und finden

$$m\dot{P} - m\dot{P}_0 = \int_{t_0}^{t} F dt. \tag{2}$$

Nehmen wir nun insbesondere an, die Zeitdauer von t_0 bis t sei sehr gering. Dann muß, damit die entsprechende Geschwindigkeit $\dot{P}$ trotzdem einen nicht sehr kleinen Wert erhält, F von einer höheren Größenordnung sein, derart, daß das Produkt $F(t - t_0)$ die Größenordnung von $\dot{P}$ erhält. Im extremen Fall kann man sagen, der Wert von F wird derart unendlich, daß der Grenzwert des Produktes $F(t - t_0)$ für $t = t_0$ einen endlichen Wert behält. Den Grenzwert des Integrals

$$\int_{t_0}^{t} F dt$$

für $t = t_0$ bezeichnet man dabei als eine Instantankraft oder einen Stoß, und die Gleichung (2) zeigt dann, daß wir als Maß dieser Kraft das Produkt aus der Masse und der Geschwindigkeitsänderung des bewegten Punktes anzusehen haben. Die Dimensionen der Größe dieses Vektors sind also

$$[m, l, t^{-1}].$$

Nehmen wir speziell die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{P}_0$ des bewegten Punktes gleich Null an, so nennen wir die zugehörige Instantankraft den Impuls des Punktes. Wir finden demnach für diesen Impuls $\mathfrak{J}$

$$\mathfrak{J} = m\dot{P}, \tag{3}$$

er ist gleich dem Produkt aus Masse und Geschwindigkeit. Die Größe des Impulsvektors heißt auch die Bewegungsgröße des materiellen Punktes.

Der Gleichung (2) können wir die Deutung geben: das

Zeitintegral der Kraft ist gleich der Änderung des Impulses. Die Grundgleichung (1) aber können wir auch schreiben

$$F = \frac{d\mathfrak{J}}{dt}, \tag{4}$$

d. h. die Kraft ist die Derivierte des Impulses nach der Zeit. In diesem Satze ist das Wirkungsprinzip enthalten. Wenn insbesondere auf den Punkt keine Kräfte wirken, so ergibt sich

$$\frac{d\mathfrak{J}}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{J} = \text{const.}$$

Bei der kräftefreien Bewegung ist der Impuls konstant der Größe und Richtung nach. Diese veränderte Formulierung des Trägheitsgesetzes wird später noch besondere Bedeutung gewinnen.

Wir wollen nun die Grundgleichung (1) skalar mit $\dot{P}$ multiplizieren, dann ergibt sich

$$m\dot{P} \times \ddot{P} = \frac{d}{dt}(\tfrac{1}{2}m\dot{P}^2) = F \times \dot{P}$$

oder, wenn wir wieder nach der Zeit von t_0 bis t integrieren,

$$\tfrac{1}{2}m\dot{P}^2 - \tfrac{1}{2}m\dot{P}_0^2 = \int_{t_0}^{t} F \times dP. \tag{5}$$

Wir wollen nun mit $\mathfrak{t}$ den Einheitsvektor in der Bahntangente bezeichnen und mit ds das Element des Weges s, so wird

$$\dot{P}dt = \mathfrak{t}\,ds,$$

außerdem wird die Größe der Geschwindigkeit

$$v = \frac{ds}{dt}$$

und damit läßt sich die Gleichung (5), wenn wir noch mit $v_0 = \frac{ds_0}{dt}$ den Anfangswert der Geschwindigkeit bezeichnen, schreiben wie folgt

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \int_{s_0}^{s} F \times \mathfrak{t}\,ds. \tag{6}$$

Das Integral auf der rechten Seite ist aber die von der wirkenden Kraft während des betrachteten Zeitintervalles geleistete Arbeit.

Um auch die linke Seite zu deuten, bezeichnen wir den Ausdruck

$$T = \tfrac{1}{2} m v^2 \tag{7}$$

als die kinetische Energie oder lebendige Kraft des bewegten Punktes und können dann sagen: die von der wirkenden Kraft geleistete Arbeit ist gleich der während derselben Zeit erfolgenden Änderung der kinetischen Energie.

6. Kartesische und natürliche Bewegungsgleichungen. Um von der Vektorgleichung der Bewegung zu Zahlgleichungen überzugehen, können wir zunächst die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z des bewegten Punktes P und die zugehörigen Komponenten X, Y, Z der wirkenden Kraft einführen und finden dann die Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{x} = X, \quad m\ddot{y} = Y, \quad m\ddot{z} = Z.\text{[1]} \tag{8}$$

Die Kraftkomponenten X, Y, Z können hierin Funktionen der Zeit, ferner des Ortes und der Geschwindigkeit von P sein. Es sind demnach die rechten Seiten der Gleichungen Funktionen von $t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ und es handelt sich um die Integration dreier simultaner Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die x, y, z als Funktionen von t bestimmen. Wenn X, Y, Z analytische Funktionen ihrer Argumente sind und in einem bestimmten Bereich sich regulär verhalten, wenn ferner die Anfangslage und die Anfangsgeschwindigkeit des bewegten Punktes gegeben sind, so existieren drei Funktionen x, y, z der Zeit t, die den Differentialgleichungen genügen und die Anfangsbedingungen erfüllen.[2]) Über die Lösung dieses Pro-

1) Diese Gleichungen sind zum ersten Male von Maclaurin aufgestellt worden: *A complete Treatise on Fluxions*, Art. 465, 469 und 884 (1742).

2) Cauchysches Existenztheorem. Vgl. Picard, Traité d'Analyse, Tome 2, p. 308 ff.

blems läßt sich allgemein nichts weiter sagen, als daß es sich auf die Integration einer einzigen Differentialgleichung sechster Ordnung zurückführen läßt. In der Tat braucht man nur die drei Gleichungen (8) viermal nach t zu differenzieren und aus den so entstehenden 15 Gleichungen y und z mit ihren sechs ersten Dirivierten zu eliminieren, um eine Differentialgleichung sechster Ordnung für x als Funktion von t zu erhalten. Die Integration dieser Differentialgleichung involviert sechs Konstanten, die sich aus der Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit des Punktes bestimmen.

Hat die Kraft eine konstante Richtung, so können wir diese Richtung zur z-Achse wählen. Dann werden die Gleichungen (8)

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = Z.$$

Die ersten beiden ergeben integriert zwei Gleichungen von der Form

$$x = at + c, \quad y = bt + d,$$

und wenn man aus diesen beiden Gleichungen t eliminiert, folgt eine Gleichung

$$\alpha x + \beta y = \gamma,$$

d. h. die Bewegung geht in einer zur z-Achse parallelen Ebene vor sich. Setzt man die gefundenen Werte für x und y in die dritte Gleichung ein, so wird sie von der Form

$$m\ddot{z} = Z(z, \dot{z}, t).$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung und auf deren Integration ist sonach das Problem zurückgeführt.

Hat ferner die Bewegung anfänglich die Richtung der Kraft, wird also $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$, d. h. $a = 0$, $b = 0$, so ergibt sich $x = c$, $y = d$, also erfolgt die ganze Bewegung in einer geraden Linie, welche die Richtung der Kraft hat. Das Gleiche gilt auch, wenn der Punkt anfänglich in Ruhe ist. —

Wenn wir nun auch die Kraft in ihre Komponenten F_t, F_n, F_b nach der Tangente, der Hauptnormale und der Binormale der Bahnkurve zerlegen, so ergeben die im ersten Band

aufgestellten Gleichungen für die zugehörigen Komponenten der Beschleunigung sofort die Gleichungen

$$F_t = m\dot{v}, \quad F_n = \frac{mv^2}{\varrho}, \quad F_b = 0, \tag{9}$$

die von Euler (*Mechanica sive motus scientia,* 1736, Vol. 1, p. 65, Prop. XXI) aufgestellt sind und die wir als die natürlichen Gleichungen der Bewegung bezeichnen können. Ihnen können wir noch eine andere Form geben, wenn wir durch (7) die kinetische Energie T einführen. Dann erhalten wir, da $m\dot{v} = mv\dot{v} : \frac{ds}{dt} = \frac{dT}{dt} : \frac{ds}{dt} = \frac{dT}{ds}$ wird,

$$F_t = \frac{dT}{ds}, \quad F_n = \frac{2T}{\varrho}, \quad F_b = 0. \tag{10}$$

7. Wurfbewegung im leeren Raum. Als einfachstes Beispiel einer krummlinigen Bewegung wollen wir die Bewegung eines Geschosses ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand behandeln. Wir nehmen an, das Geschoß, d. h. der bewegte Punkt gehe vom Koordinatenursprung O aus; da wir wissen, daß die Bewegung in einer Ebene vor sich geht, können wir die ganze Betrachtung von vornherein auf die vertikal angenommene xz-Ebene beschränken, in der die x-Achse die horizontale Richtung, die z-Achse die vertikale Richtung vorstellen soll. Wir haben dann die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{z} = -mg; \tag{11}$$

daraus finden wir durch Integration

$$\dot{x} = a, \quad \dot{z} = b - gt \tag{12}$$

und weiter mit Rücksicht auf die Anfangsbedingungen

$$x = at, \quad z = bt - \tfrac{1}{2}gt^2. \tag{13}$$

Diese Gleichungen zeigen, wie sich die Wurfbewegung aus einer horizontal fortschreitenden gleichförmigen Bewegung und einer vertikal gerichteten gleichförmig beschleunigten Bewegung zusammensetzt.

Nennen wir v_0 die Größe der Anfangsgeschwindigkeit und α den Winkel (Elevationswinkel), den ihre Richtung mit

der x-Achse bildet, so erhalten wir aus (12) für $t = 0$ sofort

$$a = v_0 \cos\alpha, \quad b = v_0 \sin\alpha.$$

Ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$, also $a = 0$, $b = v_0$, so haben wir die vertikale Wurfbewegung. Für die Zeit $t_1 = \frac{v_0}{g}$ wird dann $\dot{z} = 0$, es erreicht also der Punkt seine höchste Lage D in der Höhe $\frac{v_0^2}{2g}$ und nach der Zeit $2t_1 = \frac{2v_0}{g}$ wird wieder $z = 0$, ist also der Punkt wieder in die ursprüngliche Lage zurückgelangt.

Für $b = 0$ ergibt sich insbesondere die einfache Fallbewegung, bei der

$$-\dot{z} = v = gt,$$
$$-z = s = \tfrac{1}{2}gt^2$$

Fallgeschwindigkeit und Fallhöhe sind.

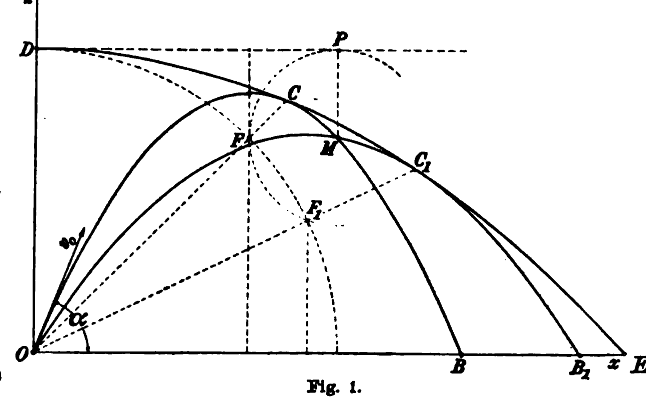


Fig. 1.

Im allgemeinen Falle erhält man aus (13) durch Elimination von t die Gleichung der Wurfbahn

$$z = \frac{b}{a}x - \frac{g}{2a^2}x^2. \tag{14}$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel[1]), deren Achse vertikal und deren konkave Seite nach unten zu gekehrt ist. Dies sieht

1) Die Entdeckung der parabolischen Wurfbahn rührt von Galilei her, der sie in den *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (Edizione nazionale Vol. 8, giornata IV, p. 268) i. J. 1636 bekannt gab, nachdem sie schon vorher Cavalieri in seinem *Specchio ustorio* (Bologna 1632) mitgeteilt hatte. Die daraufhin von Caverni (*Storia del metodo sperimentale in Italia,* t. 4, cap. 9, § 2, Firenze 1895) angezweifelte Priorität Galileis hat Wohlwill verteidigt (Abhandlungen zur Geschichte der Math., Heft 9 [Festschrift für Cantor], 1899, S. 577).

man noch deutlicher, wenn man die Gleichung in die Form bringt

$$\left(x - \frac{ab}{g}\right)^2 = -\frac{2a^2}{g}\left(z - \frac{b^2}{2g}\right).$$

Man erkennt so, daß die Koordinaten x_1, z_1 des Scheitels und der Parameter p der Parabel werden:

$$x_1 = \frac{ab}{g}, \quad z_1 = \frac{b^2}{2g}, \quad p = \frac{a^2}{g}.$$

Die Parabel trifft die x-Achse wieder in einem Punkte B mit der Abszisse

$$e = \frac{2ab}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Diese Entfernung heißt die Wurf- oder Schußweite. Sie wird ein Maximum $v_0^2 : g$ für den Elevationswinkel $\alpha = 45^0$.

Die Leitlinie hat die Gleichung

$$z = z_1 + \frac{p}{2} = \frac{v_0^2}{2g},$$

sie ist der x-Achse parallel und liegt in der Höhe, die ein mit derselben Anfangsgeschwindigkeit vertikal nach aufwärts geworfener Körper erreichen würde. Der Brennpunkt F der Parabel liegt so, daß $OF = OD$ wird und außerdem OD und OF mit der Richtung der Geschwindigkeit v_0 gleiche Winkel einschließen; danach ist F leicht zu bestimmen. Man kann hier unmittelbar schließen, daß die Parabeln, die sich für dieselbe Anfangsgeschwindigkeit und verschiedene Anfangsneigungen ergeben, alle dieselbe Leitlinie besitzen und ihre Brennpunkte auf einem Kreise liegen.

Der entfernteste Punkt E der x-Achse, den man bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit erreichen kann, hat die Abszisse $v_0^2 : g$. Jeden näher gelegenen Punkt B mit der Abszisse e kann man bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit auf zwei Wurfbahnen erreichen, für die sich die Elevationswinkel aus der Gleichung

$$\sin 2\alpha = \frac{ge}{v_0^2}$$

bestimmen, diese sind also komplementär.

Die sämtlichen Wurfbahnen, die man für gegebenes v_0 erhält, werden alle von einer neuen Parabel umhüllt. Um deren Gleichung zu finden, führen wir in (14) ein

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tang} \alpha = u, \quad \sqrt{a^2 + b^2} = v_0,$$

dann erhalten wir

$$z = ux - \frac{g}{2 v_0^2}(1 + u^2)x^2.$$

Diese Gleichung liefert, wenn x und z gegeben sind, zwei Wurzeln für u, nämlich

$$u = \frac{v_0^2}{gx} \pm \sqrt{\frac{2 v_0^2}{gx^2}\left(\frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2 v_0^2} - z\right)}.$$

Es ergeben sich also, solange

$$\frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2 v_0^2} - z > 0$$

ist, zwei Wurfbahnen, auf denen der angenommene Punkt M mit den Koordinaten x, z erreicht werden kann.

Diese beiden Bahnen fallen zusammen, wenn

$$\frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2 v_0^2} x^2 = z \tag{15}$$

wird, d. h. für die Punkte einer Parabel. Deren Scheitel D liegt auf der z-Achse und ist der höchste Punkt, der von dem mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht in die Höhe geworfenen Geschoß erreicht wird. Alle Punkte, die außerhalb dieser Parabel liegen, für die also

$$\frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2 v_0^2} x^2 - z < 0$$

wird, lassen sich mit der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit nicht mehr erreichen. Die Parabel ist mithin die Hüllkurve aller Wurfbahnen, die sich für die Anfangsgeschwindigkeit v_0 ergeben.

Sucht man den Berührungspunkt C der beiden Parabeln (14) und (15), so ergibt sich für seine Koordinaten

$$x_c = \frac{v_0^2}{g} \frac{a}{b}, \quad z_c = \frac{v_0^2}{2g} \cdot \frac{b^2 - a^2}{b^2}.$$

Anderseits hat der Brennpunkt F der Parabel (14) die Koordinaten

$$x_f = x_1 - \frac{ab}{g}, \quad z_f = z_1 - \frac{p}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2g}.$$

Somit wird

$$x_f : z_f = x_c : z_c,$$

d. h. die Punkte F und C liegen mit O in einer Geraden.

Für die Entfernung FM folgt

$$FM^2 = \left(\frac{b^2 - a^2}{2g} - z\right)^2 + \left(\frac{ab}{g} - x\right)^2$$
$$= \frac{v_0^4}{4g^2} + x^2 + z^2 - \frac{b^2 - a^2}{g} z - \frac{2ab}{g} x,$$

und da nach (14)

$$2abx = 2a^2 z + gx^2$$

wird, finden wir einfach

$$FM^2 = \left(\frac{v_0^2}{2g} - z\right)^2,$$

d. h. es liegen die Brennpunkte F und F_1 der durch M gehenden Wurfbahnen auf einem Kreise mit dem Mittelpunkt M, der die Leitlinie der Wurfbahnen in einem Punkte P berührt.

Ferner wird

$$\sqrt{x_f^2 + z_f^2} = \frac{a^2 + b^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g},$$

woraus man wieder schließen kann, daß der Ort der Brennpunkte aller Wurfbahnen für dieselbe Anfangsgeschwindigkeit ein Kreis um den Punkt O ist, der durch den Punkt D hindurchgeht.[1])

1) Diese Eigenschaft findet man ausgesprochen bei Frisi, Operum t. II Mechanicam universam et Mechanicae applicationem ad aquarum fluentium theoriam continens, Mediolani 1783, p. 95. Es ist auch leicht zu zeigen, daß der Ort der Scheitel aller Parabeln, die den verschiedenen Elevationswinkeln entsprechen, eine Ellipse ist, deren Mittelpunkt auf der z-Achse liegt und deren große Achse horizontal gerichtet ist. Die geometrische Theorie der Geschoßbewegung im leeren Raum, die Galilei in den bereits erwähnten Discorsi angebahnt hatte, wurde von G. Grandi in den Instituzioni meccaniche, Firenze 1739, Kap. VII, vervollständigt.

8. Vertikalbewegung eines schweren Körpers im widerstehenden Mittel. Wenn ein kugelförmiger Körper sich in einem widerstehenden Mittel, z. B. in der Luft bewegt, so erfährt er einen Widerstand, den man sich über die ganze Oberfläche des Körpers verteilt denken muß. Ist die Bewegung der Kugel eine einfache Translation, so liefern die auf die einzelnen Oberflächenelemente wirkenden Widerstandskräfte eine Resultante, die man im Kugelmittelpunkte angreifen lassen kann und die der Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist. Man hat also nur nötig, die Bewegung dieses Mittelpunktes unter dem Einfluß gewisser in ihm angreifender Kräfte zu untersuchen.

Von der resultierenden Widerstandskraft kann man, vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeit nicht allzu klein[1]) und nicht allzu groß ist, nämlich größer als 20 Zentimeter pro Sekunde ist und anderseits 240 Meter in der Sekunde nicht übersteigt, einen Ansatz wählen von der Form

$$C\mu_1 v^2,$$

wobei C eine (von einem Mittel zum anderen wechselnde und von den Dimensionen des Körpers abhängige) Konstante, μ_1 die Dichtigkeit des Mittels und v die Geschwindigkeit des Körpers bedeutet.[2]) Das Gewicht der Kugel ist nach dem Archimedischen Prinzip

$$\tfrac{4}{3}\pi a^3(\mu - \mu_1)g,$$

wenn a den Radius der Kugel, μ ihre Dichtigkeit bezeichnet. Dieses Gewicht ist ebenfalls eine Kraft, die wir uns im Kugelmittelpunkt angreifend denken müssen. Wir beachten außerdem, daß zunächst die Masse m des bewegten Körpers

$$= \tfrac{4}{3}\pi a^3 \mu$$

wird, aber zufolge der bei der Bewegung mitgeführten Flüssig-

1) Bei sehr kleinen Geschwindigkeiten ist der Luftwiderstand annähernd der Geschwindigkeit einfach proportional. Vgl. Thiesen, Annalen der Physik und Chemie (2) Bd. 26, S. 314 (1885).

2) Vgl. z. B. C. Cranz, Äußere Ballistik, Leipzig 1896, S. 51, 53, 61.

keitsmenge um einen Bruchteil p der verdrängten Flüssigkeitsmenge größer angenommen werden muß. Es ist also die Masse mit einem Betrag

$$m = \frac{4}{3}\pi a^3(\mu + p\mu_1)\,^{1)}$$

in Rechnung zu setzen, und sie muß bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen in dem Kugelmittelpunkt konzentriert gedacht werden. So ergibt sich

$$\frac{dv}{dt} = \pm g\frac{\mu - \mu_1}{\mu + p\mu_1} - \frac{3}{4}\frac{C\mu_1}{\pi a^3(\mu + p\mu_1)}v^2,$$

wobei das Zeichen — gilt, wenn es sich um eine aufsteigende Bewegung handelt, und das Zeichen + für eine absteigende Bewegung. Setzen wir

$$g' = g\frac{\mu - \mu_1}{\mu + p\mu_1},\quad k^2 = \frac{4}{3}\frac{\pi a^3 g}{C}\frac{\mu - \mu_1}{\mu_1},$$

so erhalten wir

$$\frac{dv}{dt} = \pm g'\left(1 \mp \frac{v^2}{k^2}\right).$$

Nehmen wir, indem wir mit c eine neue von dem Kugelradius unabhängige Konstante bezeichnen,

$$C = c\pi a^2,$$

was für hinreichend große Kugeln wie Luftballons[2]) erlaubt ist, so wird

$$k^2 = \frac{4}{3}\frac{a}{c}g\frac{\mu - \mu_1}{\mu}.$$

In der gefundenen Differentialgleichung können wir die Integration sofort ausführen. Im Falle der absteigenden Bewegung, wo das obere Zeichen gilt, setzen wir

$$v = k\,\mathfrak{Tang}\,u$$

1) Du Buat, Principes d'Hydraulique, Vol. 2, p. 229 (1786); Bessel, Astron. Nachrichten 1828, S. 149; Baily, Philos. Transactions 1832, p. 399. Man vgl. außerdem Mossotti, Lezioni di Meccanica razionale, p. 184, Florenz 1851.

2) Vgl. Renard, Comptes Rendus t. 101, p. 1111 (1885).

und finden, wenn τ eine Konstante bezeichnet

$$u = \frac{g'}{k}(t + \tau),$$

also

$$v = k \,\mathfrak{Tang}\, \frac{g'}{k}(t + \tau).$$

Die Geschwindigkeit wächst mit t beständig, bleibt aber immer kleiner als k und nähert sich diesem Werte für unendlich wachsendes t asymptotisch. Die Anfangsgeschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ ist

$$v_0 = k \,\mathfrak{Tang}\, \frac{g'}{k}\tau,$$

muß also $\overline{\lessgtr} k$ sein.

Nimmt man sie gleich k, so wird $\tau = \infty$ und es wird $v = k$, also beständig $v = v_0$, die Bewegung ist mithin gleichförmig.

Ist dagegen $v_0 > k$, so genügt es

$$v = \frac{k}{\mathfrak{Tang}\, u}$$

zu setzen, es folgt dann

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{k} \,\mathfrak{Tang}\, \frac{g'}{k}(t + \tau)$$

und v nimmt beständig ab, indem es sich dem Werte k von oben her asymptotisch nähert.

Integrieren wir die vorher für v gefundene Gleichung noch einmal, indem wir $v = -\frac{dz}{dt}$ einführen, so ergibt sich

$$z = z_1 - \frac{k^2}{g'} \log \mathfrak{Cof}\, \frac{g'}{k}(t + \tau)$$

wobei z_1 eine Konstante bezeichnet.

Im Falle der aufsteigenden Bewegung haben wir die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dt} = -g'\left(1 + \frac{v^2}{k^2}\right).$$

Setzen wir $v = k \operatorname{tang} \varphi$, so finden wir

$$\varphi = \frac{g'}{k}(t_1 - t)$$

und somit

$$v = k \operatorname{tang} \frac{g'}{k}(t_1 - t).$$

Die Zeit t_1 ist dabei dadurch definiert, daß für sie $v = 0$ wird, der Körper also seine höchste Lage erreicht. Ist die Anfangsgeschwindigkeit v_0, die für $t = 0$ gilt, gegeben, so finden wir t_1 aus der Gleichung

$$v_0 = k \operatorname{tang} \frac{g'}{k} t_1,$$

es ist also

$$t_1 = \frac{k}{g'} \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{v_0}{k}.$$

Durch Integration der Gleichung für $v = dz/dt$ finden wir für die Entfernung vom höchsten Punkt, für den $z = z_1$ sei,

$$z_1 - z = -\frac{k^2}{g'} \log \cos \frac{g'}{k}(t_1 - t),$$

Nehmen wir an, für $t = 0$ sei auch $z = 0$, so folgt hieraus die Steighöhe

$$z_1 = -\frac{k^2}{g'} \log \cos \frac{g'}{k} t_1.$$

Schreiben wir dies

$$z_1 = \frac{k^2}{2g'} \log \frac{1}{\cos^2 \frac{g'}{k} t_1} = \frac{k^2}{2g'} \log \left(1 + \operatorname{tang}^2 \frac{g'}{k} t_1\right),$$

so finden wir sofort

$$z_1 = \frac{k^2}{2g'} \log \left(1 + \frac{v_0^2}{k^2}\right).$$

In dieser Abhängigkeit steht die Steighöhe von der Anfangsgeschwindigkeit.

Fig. 2.

Nehmen wir im Falle der absteigenden Bewegung $v = 0$, so wird auch $v_0 = 0$ und $z_1 = 0$. Wir erhalten dann einfach

$$v = k \, \mathfrak{Tang} \frac{g'}{k} t,$$

$$z = -\frac{k^2}{g'} \log \mathfrak{Cos} \frac{g'}{k} t.$$

Entwickeln wir diese Ausdrücke nach Potenzen von t und beschränken uns

auf die ersten Glieder der Entwicklung, so finden wir die für sehr geringen Widerstand geltenden Werte

$$v = g't\left(1 - \frac{1}{3}\frac{g'^2}{k^2}t^2\right), \quad z = -\frac{1}{2}g't^2\left(1 - \frac{1}{6}\frac{g'^2}{k^2}t^2\right).$$

Hieraus folgt mit dem benutzten Grade der Annäherung die von dem Widerstande unabhängige Relation

$$z = -\tfrac{1}{2}t\sqrt{g'tv}.$$

Vernachlässigen wir den Widerstand und nehmen $\mu_1 = 0$, so ergeben sich die gewöhnlichen Fallformeln

$$v = gt, \quad z = -\tfrac{1}{2}gt^2.$$

9. Bewegung eines Punktes, der von einem festen Zentrum im umgekehrten Verhältnis zum Quadrat der Entfernung angezogen wird. Es sei O das feste Zentrum, P_0 die Anfangslage des bewegten Punktes. Wenn die Anfangsgeschwindigkeit Null ist, oder in die gerade Linie P_0O fällt, so geht die ganze Bewegung auf der geraden Linie vor sich, welche die Anfangslage P_0 des Punktes mit dem Zentrum O verbindet; wir wollen diese Linie mit der Richtung von P_0 nach O hin zur z-Achse wählen. Die Kraft wird dann durch einen Ausdruck $-\frac{mk^2}{z^2}$ gegeben und die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{z} = -\frac{k^2}{z^2};$$

die rechte Seite ist eine Funktion von z allein. Man hat nun

$$\ddot{z} = \frac{d\dot{z}}{dt} = \frac{d\dot{z}}{dz}\dot{z},$$

und findet sonach durch Integration der Bewegungsgleichung

$$\dot{z}^2 = h + \frac{2k^2}{z}.$$

Hieraus ergibt sich insbesondere für die Anfangsordinate z_0 und die Anfangsgeschwindigkeit v_0

$$v_0^2 = h + \frac{2k^2}{z_0}.$$

Wenn die Anfangsgeschwindigkeit Null oder auf O zu ge-

richtet sein sollte, muß beständig $z < z_0$ sein, die Ordinate z nimmt beständig ab, wenn die Zeit t zunimmt; die Geschwindigkeit nimmt, solange das Zentrum O noch nicht erreicht ist, beständig zu. Wollen wir eine Beziehung zwischen z und t finden, so müssen wir ausgehen von

$$\frac{dz}{dt} = -\sqrt{h + \frac{2k^2}{z}}.$$

Ist dagegen die Anfangsgeschwindigkeit von O weg gerichtet, so ist es gut, zunächst den Fall zu betrachten, bei dem

$$h \geqq 0;$$

die Geschwindigkeit wird dann nie Null, aber nimmt beständig ab, der Punkt entfernt sich von der Lage P_0 nach der von dem Zentrum O abgewandten Seite, und seine Bewegung strebt der Gleichförmigkeit zu. Ist dagegen

$$h < 0$$

und setzen wir

$$h = -\frac{2k^2}{\alpha},$$

so wird

$$v_0^2 = 2k^2\left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{\alpha}\right)$$

und mithin

$$\alpha \geqq z_0.$$

Der bewegte Punkt geht von P_0 aus, indem er sich von O entfernt, bis er in eine Lage A kommt, die von O den Abstand α hat; die Geschwindigkeit nimmt beständig ab und wird Null in A. Um die Bewegung von P_0 nach A festzulegen, haben wir die Gleichung

$$\frac{dz}{dt} = +\sqrt{2k^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\alpha}\right)}$$

zu benutzen. Der Punkt gelangt von P_0 nach A in einer endlichen Zeit, denn diese Zeit ist

$$t = \sqrt{\frac{\alpha}{2k^2}} \int_{z_0}^{\alpha} \frac{\sqrt{z}\,dz}{\sqrt{\alpha - z}}$$

und das Integral erlangt einen endlichen Wert. In A kehrt

der Punkt die Richtungen seiner Bewegung um und bewegt sich nach O zu.

Setzen wir schließlich die Anfangsgeschwindigkeit gleich Null voraus, so bewegt sich der Punkt auf O zu. Es wird dann $\alpha = z_0$, und die Zeit, die der Punkt gebraucht, um nach O zu gelangen, wird durch den Ausdruck gegeben

$$t = \sqrt{\frac{z_0}{2k^2}} \int_0^{z_0} \sqrt{\frac{z}{z_0 - z}}\, dz.$$

Das Integral läßt sich leicht ausführen durch die Substitution

$$z = z_0 \sin^2 u,$$

es wird dann

$$t = 2z_0 \sqrt{\frac{z_0}{2k^2}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 u\, du = \frac{\pi z_0 \sqrt{2z_0}}{4k}.$$

Wenn die Geschwindigkeit nicht Null ist und eine willkürliche Richtung hat, so ist, wie wir im nächsten Kapitel zeigen werden, die Bahnkurve ein Kegelschnitt und die Bewegung periodisch. Ist T die Periode des Umlaufes, so wird die Beschleunigung im Punkte P_0, der in der Entfernung z_0 von O liegt, gegeben durch den Ausdruck $\frac{4\pi^2 z_0}{T^2}$, andererseits wird aber diese Beschleunigung gleich $\frac{k^2}{z_0^2}$, mithin ist

$$k^2 = \frac{4\pi^2 z_0^3}{T^2},$$

so daß der oben für t gefundene Ausdruck wird

$$t = \frac{\sqrt{2}}{8} T = 0,176 \cdot T.$$

Z. B. ist für die Bewegung des Mondes um die Erde $T = 27$ Tage, mithin würde er, um direkt auf die Erde herunterzufallen, ungefähr $4^3/_4$ Tage gebrauchen.

Übungsbeispiele.

1. Aufgabe. *Nachzuweisen, daß die Kraft, die bei kontinuierlicher und gleichförmiger Wirkung dieselbe Bewegung erzeugt wie eine große Anzahl von Impulsen, die während derselben Zeit wirken, gleich ist der von den Impulsen in der Zeiteinheit gelieferten Bewegungsmenge.*

Auflösung. Wir nennen $J_1, J_2, \ldots, J_n$ die Impulse, $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$ die Geschwindigkeiten des Körpers, dessen Masse m sei, vor dem ersten Impuls und nach dem ersten, zweiten usw. Impuls, dann wird

$$J_1 = m(v_1 - v_0),\ J_2 = m(v_2 - v_1), \cdots J_n = m(v_n - v_{n-1}),$$

also

$$mv_n - mv_0 = J_1 + J_2 + \cdots + J_n.$$

Nennen wir nun F die Größe der kontinuierlich wirkenden Kraft, so wird

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

und durch Integration

$$m(v_n - v_0) = \int_0^t F\,dt = F \cdot t.$$

Daraus folgt

$$F = \frac{1}{t}(J_1 + J_2 + \cdots + J_n),$$

w. z. b. w.

2. Aufgabe. *Die Bewegung eines Punktes zu untersuchen, der von einem festen Zentrum proportional der Entfernung angezogen und ohne Anfangsgeschwindigkeit freigegeben wird.*

Auflösung. Die Bewegung erfolgt in der Geraden, welche die Anfangslage mit dem festen Zentrum verbindet. Die Beschleunigung ist der Entfernung von dem Zentrum proportional, also ist die Bewegung eine harmonische.

Dieser Fall liegt, wie wir noch sehen werden, vor, wenn ein schwerer Körper in einem durch die Erde längs einem Durchmesser durchgegrabenen Kanal fällt. Ist g die Beschleunigung der Schwere an der Erdoberfläche, in der Entfernung R vom Erdmittelpunkt, so wird die Periode der harmonischen Bewegung in Sekunden

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = \sqrt{2\pi \cdot \frac{2\pi R}{g}}.$$

Nun ist aber ungefähr

$$\frac{2\pi R}{g} = \frac{4 \cdot 10^9}{980} = \frac{2 \cdot 10^8}{49}$$

und mithin in Stunden ausgedrückt

$$T = \frac{2 \cdot 10^4}{7} \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{3600} = 1^h\, 24^m.$$

3. Aufgabe. *Ein Punkt, auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich in einem widerstehenden Mittel, in dem der Widerstand dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist. Die Bewegung zu untersuchen.*

Auflösung. Es ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$\frac{dv}{dt} = -k^2 v^2, \qquad \text{(a)}$$

in der v die Geschwindigkeit, $k^2 v^2$ die Größe des Widerstandes für die Masseneinheit bezeichnet. Durch Integration folgt

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = k^2 t$$

oder

$$v = \frac{v_0}{1 + k^2 v_0 t}. \qquad \text{(b)}$$

Setzen wir hierin $v = dx/dt$ und integrieren aufs neue, so folgt

$$x = \frac{1}{k^2} \log(1 + k^2 v_0 t), \qquad \text{(c)}$$

wenn die Integrationskonstante so bestimmt wird, daß für $t = 0$ auch $x = 0$

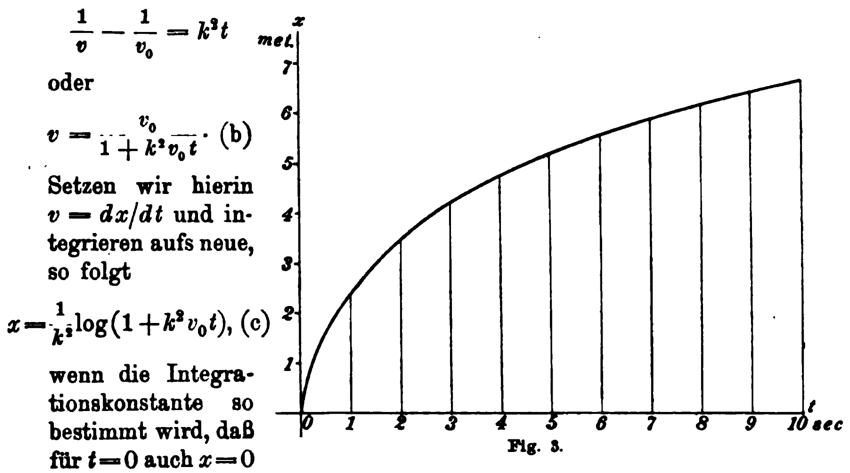


Fig. 3.

ist. Die Geschwindigkeit nähert sich für unendlich wachsendes t der Grenze 0, der Weg aber wächst wie ein Logarithmus, d. h. er nimmt unbegrenzt zu, jedoch schließlich ungeheuer langsam. Die beistehende Figur stellt die Bewegung graphisch dar, indem t als Abszisse, x als Ordinate aufgetragen ist.

4. Aufgabe. *Das Problem der kräftefreien Bewegung im widerstehend n Mittel für den Fall zu behandeln, daß der Widerstand der Geschwindigkeit einfach proportional ist,*

Auflösung. Es wird dann die Bewegungsgleichung

$$\frac{dv}{dt} = -k^2 v$$

und integriert

$$\log v - \log v_0 = -k^2 t$$

oder

$$v = v_0 e^{-k^2 t},$$

woraus

$$x = \frac{v_0}{k^2}(1 - e^{-k^2 t}).$$

Hier nähert sich x für unendlich wachsendes t dem Grenzwert $x_1 = \frac{v_0}{k^2}$, so daß der bewegte Punkt selbst sich einer Grenze asymptotisch nähert (s. Fig. 4).

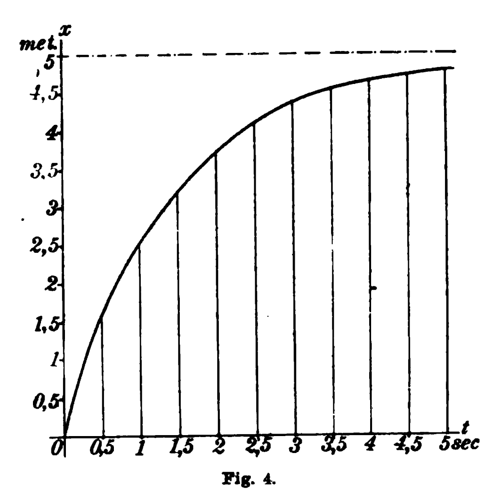


Fig. 4.

5. Aufgabe. *Ein Punkt bewegt sich in gerader Linie unter dem Einfluß einer konstanten Kraft gegen einen Widerstand, welcher der Geschwindigkeit proportional ist. Die Bewegung zu untersuchen.*

Auflösung. Die Masse des Punktes sei 1, seine Abszisse x, seine Geschwindigkeit $v = \dot{x}$, die wirkende Kraft f, die Widerstandskraft $-k^2 v$, dann ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$\frac{dv}{dt} = f - k^2 v. \qquad \text{(a)}$$

Ihre Integration liefert sofort

$$-\frac{1}{k^2}\log(f - k^2 v) = t + c.$$

Soll für $t = 0$ auch $v = 0$ sein, so wird die Konstante

$$c = -\frac{1}{k^2}\log f$$

und es folgt

$$1 - \frac{k^2}{f} v = e^{-k^2 t}$$

oder

$$v = \frac{f}{k^2}(1 - e^{-k^2 t}). \qquad \text{(b)}$$

Wir setzen nun $v = \frac{dx}{dt}$ und integrieren aufs neue, dann wird

$$x = \frac{f}{k^2}\left(t + \frac{1}{k^2}e^{-k^2 t} + c'\right).$$

Soll für $t = 0$ auch $x = 0$ sein, so folgt für die Konstante c'

$$c' = -\frac{1}{k^2}$$

und wir finden

$$x = \frac{f}{k^2}\left(t + \frac{1}{k^2}(e^{-k^2 t} - 1)\right). \quad \text{(c)}$$

Aus (b) folgt, daß die Geschwindigkeit sich dem Endwert $f : k^2$ asymptotisch nähert. Nehmen wir insbesondere k^2 sehr klein an und setzen

$$e^{-k^2 t} = 1 - k^2 t + \tfrac{1}{2}k^4 t^2 - \tfrac{1}{6}k^6 t^3 \cdots,$$

so ergibt sich angenähert für nicht zu großes t

$$v = ft\left(1 - \frac{k^2}{2}t\right)$$

und

$$x = \tfrac{1}{2}ft^2\left(1 - \frac{k^2}{3}t\right).$$

Diese Funktion ist in Fig. 5 durch die ausgezogene Kurve dargestellt, die punktierten Linien geben die Teilwerte $x_1 = \frac{1}{2}ft^2$ und $x_2 = \frac{1}{6}fk^2t^3$.

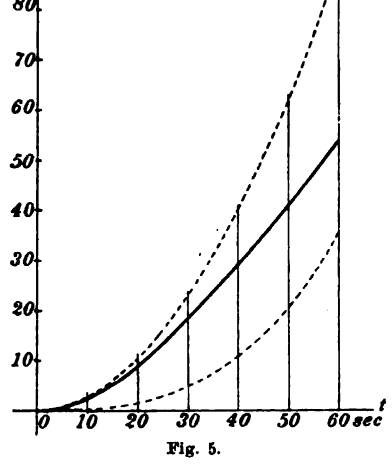


Fig. 5.

6. Aufgabe. *Die geradlinige Bewegung eines Punktes zu untersuchen, der von zwei festen Punkten seiner Geraden im umgekehrten Verhältnis zum Quadrate der Entfernung angezogen wird.*

Auflösung. Für den einen festen Punkt O sei die Abszisse $= 0$, für den anderen A gleich a, dann ergibt sich, solange der bewegliche Punkt zwischen O und A liegt, also $0 < x < a$ ist, die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} = -\frac{k^2}{x^2} + \frac{k_1^{\,2}}{(a - x)^2}. \quad \text{(a)}$$

Da $\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}v$ ist, können wir sofort integrieren und finden

$$v^2 = v_0^{\,2} + 2k^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right) + 2k_1^{\,2}\left(\frac{1}{a - x} - \frac{1}{a - x_0}\right). \quad \text{(b)}$$

Aus (a) ergibt sich eine Gleichgewichtslage P_1 für $\ddot{x} = 0$, d. h. wenn die Abszisse x_1 der Proportion genügt

$$x_1 : a - x_1 = k : k_1,$$

woraus

$$x_1 = \frac{ak}{k + k_1} \tag{c}$$

folgt. Der zugehörige Wert von v^2 wird

$$v_1^2 = v_0^2 - 2\left(\frac{k^2}{x_0} + \frac{k_1^2}{a - x_0}\right) + \frac{2}{a}(k + k_1)^2 \tag{d}$$

und zwar wird hier $\frac{d(v^2)}{dx} = 0$, also v^2 ein Minimum, während für $x = 0$ und $x = a$ v^2 unendlich groß ist. Daraus ist zu sehen, daß solange $v_1^2 > 0$ ist, für keine Lage zwischen O und A die Geschwindigkeit verschwinden kann. Der Punkt bewegt sich also nachdem er die Lage P_1 erreicht hat, nach der Seite, nach der er sich anfangs bewegt, weiter, bis er auf einen der Punkte O oder A stößt.

Wird dagegen $v_1^2 = 0$, so ergibt sich

$$v^2 = \frac{2(k + k_1)^2(x - x_1)^2}{ax(a - x)}.$$

Daraus ist zu sehen, daß der Punkt sich der Lage P_1 asymptotisch nähert.

Wird endlich $v_1^2 < 0$, so ist die Lage P_1 unerreichbar. Es gibt dann zwei Lagen P' und P'' zwischen O und A, für die $v = 0$ wird. Zwischen diese Punkte P' und P'' kann der bewegliche Punkt nicht gelangen, er kehrt vielmehr, sowie er einen von ihnen erreicht hat, um.

7. Aufgabe. *Ein Punkt P bewegt sich auf einer Geraden nach einem festen Punkte dieser Geraden hin, von dem er umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung angezogen wird. Die Bewegung geometrisch zu beschreiben.*

Auflösung. Wir lassen die ganze Bewegung auf der x-Achse eines ebenen Koordinatensystems vor sich gehen, so daß x die Entfernung des beweglichen von dem festen Punkte bedeutet. Durch einmalige Integration der Bewegungsgleichung ergibt sich (vgl. § 9)

$$v^2 = 2k^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right).$$

Für $x = x_0$ wird $v^2 = 0$. Die ganze Bewegung erfolgt in dem Intervalle $0 < x < x_0$. Ziehen wir aus der vorstehenden Gleichung die Wurzel und setzen $v = \frac{dx}{dt}$, so finden wir

$$\sqrt{\frac{2}{x_0}}\,k\,dt = \frac{x\,dx}{\sqrt{x(x_0 - x)}} = \frac{\frac{1}{2}x_0\,dx}{\sqrt{x(x_0 - x)}} - \frac{(\frac{1}{2}x_0 - x)\,dx}{\sqrt{x(x_0 - x)}}.$$

Um diese Gleichung zu integrieren, setzen wir $\frac{1}{2}x_0 - x = \frac{1}{2}x_0 \cos\omega$, dann wird $dx = \frac{1}{2}x_0 \sin\omega\, d\omega$, also $d\omega = \frac{dx}{\sqrt{x(x_0 - x)}}$ und

$$\tfrac{1}{2}x_0 d \sin\omega = \frac{(\frac{1}{2}x_0 - x)\,dx}{\sqrt{x(x_0 - x)}}.$$

So finden wir

$$b(t - t_0) = \frac{x_0}{2}(\omega - \sin\omega),$$

wobei $b = \sqrt{\frac{2}{x_0}}\,k$. Setzen wir nun $y = b(t - t_0)$ und tragen diese Werte über der x-Achse als Ordinaten auf, so erhalten wir durch die Gleichungen

$$x = \frac{x_0}{2}(1 - \cos\omega), \quad y = \frac{x_0}{2}(\omega - \sin\omega)$$

eine Zykloide dargestellt, bei welcher der rollende Kreis den Durchmesser $OA = x_0$ hat und durch welche die Bewegung völlig bestimmt wird, wenn die zu $x = 0$, d. h. $\omega = 0$ und $y = 0$ gehörige Zeit $t = t_0$ bekannt ist.

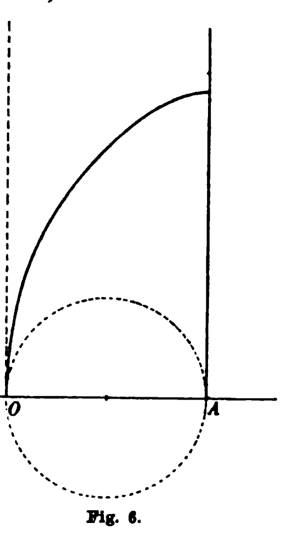


Fig. 6.

8. Aufgabe. *Die geradlinige Bewegung zweier Punkte, die sich proportional der Entfernung anziehen, zu untersuchen.*

Auflösung. Wir nennen x und x_1 die Abszissen, welche die Lage der beiden Punkte festlegen, dann ergeben sich zwei Bewegungsgleichungen von der Form

$$\ddot{x} = k^2(x_1 - x), \quad \ddot{x}_1 = k_1^2(x - x_1),$$

woraus

$$k_1^2\ddot{x} + k^2\ddot{x}_1 = 0,$$

oder integriert

$$k_1^2 x + k^2 x_1 = ct + d. \tag{a}$$

Für $k^2 + k_1^2 = \alpha^2$ wird ferner

$$\frac{d^2(x - x_1)}{dt^2} = -\alpha^2(x - x_1).$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$x - x_1 = A\cos\alpha t + B\sin\alpha t. \tag{b}$$

Die gefundenen Gleichungen (a) und (b) bestimmen x und x_1. Sind die Punkte anfänglich in Ruhe, so muß $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dx_1}{dt} = 0$ sein für $t = 0$,

also $B = 0$, ferner wird auch $c = 0$, und sind die Anfangsabszissen a und a_1, so ergibt sich

$$x - x_1 = (a - a_1) \cos \alpha t, \quad k_1^2 x + k^2 x_1 = k_1^2 a + k^2 a_1.$$

Nach einer Zeit $t = \frac{\pi}{2\alpha}$ treffen die beweglichen Punkte in der Abszisse

$$x = \frac{k_1^2 a + k^2 a_1}{k^2 + k_1^2}$$

zusammen.

9. Aufgabe. *Die geradlinige Bewegung eines Punktes zu untersuchen, der von einem festen Zentrum proportional der Entfernung angezogen wird und sich gegen einen der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand bewegt (Problem der gedämpften Schwingungen).*

Auflösung. Die Bedingungen der Aufgabe entsprechen ungefähr der sehr langsamen Bewegung eines Pendels unter dem Einfluß der Schwere und des Luftwiderstandes oder auch den Schwingungen einer Magnetnadel im Innern einer Messingschale. Die Differentialgleichung der Bewegung wird hier

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2 x = 0. \tag{a}$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Ist $h^2 \geqq k^2$, so haben wir eine aperiodische Bewegung. Interessanter aber ist der Fall, wo

$$h^2 < k^2.$$

Setzen wir

$$k^2 - h^2 = m^2,$$

so wird das allgemeine Integral von (a)

$$x = Ae^{-ht} \cos (mt - \gamma)$$

oder

$$x = e^{-ht}(a \cos mt + b \sin mt),$$

wenn wir

$$A \cos \gamma = a, \quad A \sin \gamma = b$$

setzen.

Wir bestimmen die Konstanten a und b so, daß

$$\text{für } t = 0: \quad x = x_0, \; \dot{x} = 0$$

wird. Wir finden dann sofort

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 e^{-ht}\left(\cos mt + \frac{h}{m} \sin mt\right), \\ \dot{x} &= -\frac{k^2}{m} x_0 e^{-ht} \sin mt. \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

Der bewegliche Punkt verläßt den von dem Zentrum O um x_0 entfernten Punkt A_0 mit der Anfangsgeschwindigkeit 0 und nähert sich O, weil x abnimmt; er gelangt in O an nach einer Zeit τ, die sich aus der Gleichung

$$\cos m\tau + \frac{h}{m}\sin m\tau = 0 \quad \text{oder} \quad \operatorname{tang} m\tau = -\frac{m}{h}$$

bestimmt. Nach der Zeit $\frac{\pi}{m}$ ist der Punkt in einer Lage A_1 auf der anderen Seite von O angelangt, wobei die Strecke OA_1

$$x_1 = -x_0 e^{-\frac{h\pi}{m}}$$

wird, so daß $|x_1| < |x_0|$ ist. In dieser Lage ist die Geschwindigkeit wieder 0, der Punkt kehrt um, geht wieder durch O hindurch und gelangt nach der Zeit $\frac{2\pi}{m}$ in die Lage A_2, die von O die Entfernung

$$x_2 = x_0 e^{-2\frac{h\pi}{m}}$$

hat und in der die Geschwindigkeit wieder verschwindet. So bewegt sich der Punkt hin und her, wobei sich die Grenzlagen $A_0, A_1, A_2, A_3 \ldots$ in geometrischer Progression dem Zentrum O nähern, während die Schwingungsdauer unverändert dieselbe bleibt.

Man kann der Bewegung auch eine elegante geometrische Deutung geben. Wir betrachten eine logarithmische (gleichwinklige) Spirale, deren Polargleichung laute

$$\varrho = x_0 e^{-\frac{h\theta}{m}},$$

und denken sie uns von einem Punkte durchlaufen derart, daß der Winkel θ, den der Radiusvektor ϱ mit der Achse OA_0 einschließt, proportional der Zeit zunimmt, und zwar werde

$$\theta = mt.$$

Der konstante Winkel α, den die Tangente der Spirale mit dem Radiusvektor einschließt, wird durch die Gleichung gegeben

$$\operatorname{cotg} \alpha = -\frac{h}{m}.$$

Ziehen wir nun durch einen beliebigen Punkt P der Spirale die Parallele zu der Tangente in A_0 und sei M der Schnittpunkt dieser Parallelen mit der Achse OA_0. Setzen wir dann $OM = x$, so wird

$$x = \varrho \frac{\sin(\alpha - mt)}{\sin \alpha} = x_0 e^{-ht}(\cos mt - \operatorname{cotg} \alpha \sin mt)$$

oder

$$x = x_0 e^{-ht}\left(\cos mt + \frac{h}{m} \sin mt\right).$$

Dies ist wieder die erste Gleichung (b). Die Bewegung des Punktes M ist also genau die betrachtete Bewegung. Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ oder $h = 0$ erhalten wir statt der Spirale einen Kreis und die gewöhnliche harmonische Bewegung (vgl. Maxwell, A Treatise on Electricity and Magnetism, 1873, § 731).

10. Aufgabe. *Das Problem der Schwebungen.*

Auflösung. Wir lassen die Bedingungen der vorigen Aufgabe ungeändert, nur fügen wir eine Kraft von der Größe $me \cos pt$ hinzu, so daß die Differentialgleichung der Bewegung nunmehr lautet

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = e \cos pt.$$

Bei der Integration dieser Differentialgleichung verfahren wir so, daß wir zunächst eine partikuläre Lösung suchen. Eine solche ist

$$x_0 = c \cos(pt - \varepsilon), \tag{a}$$

wenn wir hierin c und ε noch geeignet bestimmen. Zu dem Zweck führen wir in die Differentialgleichung für x die Funktion x_0 ein und erhalten

$$c(k^2 - p^2)\cos(pt - \varepsilon) - 2hcp \sin(pt - \varepsilon) = e \cos pt.$$

Da wir hierin die rechte Seite

$$= e\{\cos \varepsilon \cos(pt - \varepsilon) - \sin \varepsilon \sin(pt - \varepsilon)\}$$

setzen können, sehen wir, daß wir

$$c(k^2 - p^2) = e \cos \varepsilon, \quad 2hcp = e \sin \varepsilon$$

anzunehmen haben, also

$$c = \frac{e}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2}}, \quad \operatorname{tang} \varepsilon = \frac{2hp}{k^2 - p^2}.$$

Nun ergibt sich aber, daß die Differenz $x' = x - x_0$ der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + 2h\frac{dx'}{dt} + k^2x' = 0$$

genügt, welche von der in der vorigen Aufgabe betrachteten Form ist. Wir können also wieder den Ansatz machen

$$x' = A e^{-ht} \cos (mt - \gamma) \tag{b}$$

und finden das allgemeine Integral

$$x = c \cos (pt - \varepsilon) + A e^{-ht} \cos \left\{ \sqrt{k^2 - h^2} \cdot t - \gamma \right\}, \tag{c}$$

in dem A und γ die Integrationskonstanten sind. Das erste Glied repräsentiert die erzwungene Schwingung, das zweite Glied die Eigenschwingung. Sind die Eigenschwingungen ungedämpft, also $h = 0$, so setzen wir

$$m = p + \lambda$$

und schreiben

$$A \cos \{(p + \lambda)t - \gamma\} = u \cos (pt - \varepsilon) - v \sin (pt - \varepsilon),$$

wobei

$$u = A \cos (\lambda t + \varepsilon - \gamma), \quad v = A \sin (\lambda t + \varepsilon - \gamma),$$

dann wird

$$x = (c + u) \cdot \cos (pt - \varepsilon) - v \cdot \sin (pt - \varepsilon)$$

oder

$$x = C \cos (pt - \varepsilon + \theta). \tag{d}$$

Dabei wird

$$C^2 = c^2 + A^2 + 2cA \cos (\lambda t + \varepsilon - \gamma)$$

und

$$\frac{A}{C} \sin (\lambda t + \varepsilon - \gamma) = \sin \theta.$$

Die resultierende Schwingung läßt sich also ansehen als eine gewöhnliche Sinusschwingung mit veränderlicher Amplitude C und Phase θ Es schwankt die Amplitude zwischen $A + c$ und $A - c$, und zwar mit der Periode $\frac{2\pi}{\lambda}$. Diese Periode ist sehr groß gegen die Periode $\frac{2\pi}{m}$ der Eigenschwingungen, wenn die Periode der erzwungenen Schwingung $\frac{2\pi}{p}$ der Periode der Eigenschwingung sehr nahe gleich ist. Dann tritt das Phänomen der Schwebungen auf, das durch die untenstehende Figur veranschaulicht wird. Ist m ein ganzes Viel-

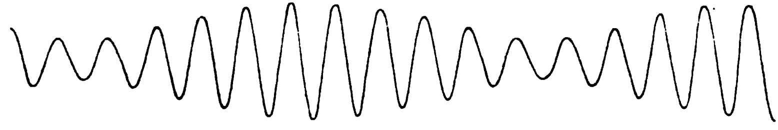


Fig. 7.

faches von λ, so ist die Erscheinung periodisch mit der Periode der Schwebungen. Das ist in der Figur angenommen. Sind die Eigenschwingungen gedämpft, also $h \neq 0$, so wird in dem Ausdruck (c) das zweite Glied infolge des Faktors e^{-ht} kleiner und kleiner, während das erste Glied periodisch wechselt. Es sterben also die Eigenschwingungen allmählich ab und nur die erzwungenen Schwingungen bleiben übrig. Vgl. Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, 1877, § 30, Webster, *The Dynamics of Particles* etc., Leipzig 1904, Art. 44.

Zweites Kapitel.

Besondere Probleme der Bewegung eines Punktes.

1. Bewegung eines unfreien Punktes. Ist ein bewegter Punkt gezwungen auf einer Fläche zu bleiben, so kann man diese kinematische Bedingung dynamisch so formulieren, daß man sagt, auf den Punkt wirke eine Kraft, die normal zur Fläche gerichtet ist, also bei jeder Bewegung des Punktes auf der Fläche keine Arbeit leistet und bewirkt, daß der Punkt bei seiner Bewegung die Fläche nicht verläßt. Wenn wir also den in die Flächennormale fallenden Einheitsvektor mit $\boldsymbol{n}$ bezeichnen, so wird die Bewegungsgleichung hier von der Form

$$m\ddot{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{F} + R\boldsymbol{n}, \tag{1}$$

wobei R die Größe der Reaktionskraft bezeichnet.

Lautet die Gleichung der Oberfläche

$$f(x, y, z, t) = 0, \tag{2}$$

so finden wir für $\boldsymbol{n}$

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{v}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_3\right],$$

wenn wir

$$v = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

setzen. Nehmen wir ferner

$$\ddot{\boldsymbol{P}} = \ddot{x}\boldsymbol{e}_1 + \ddot{y}\boldsymbol{e}_2 + \ddot{z}\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{F} = X\boldsymbol{e}_1 + Y\boldsymbol{e}_2 + Z\boldsymbol{e}_3,$$

so zerlegt sich die Vektorgleichung (1) in die drei Zahlgleichungen

$$m\ddot{x} = X + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = Y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = Z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}, \tag{3}$$

indem wir $\lambda = \frac{R}{v}$ setzen.

Ist ein Punkt gezwungen auf einer Kurve zu bleiben, die durch zwei Gleichungen

$$f_1(x, y, z, t) = 0 \quad f_2(x, y, z, t) = 0 \tag{4}$$

dargestellt wird, so werden wir auf analoge Weise zu den Gleichungen geführt

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}, \\ m\ddot{y} &= Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}, \\ m\ddot{z} &= Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Deuten wir die hier zu X, Y, Z hinzutretenden Größen als die Komponenten einer Kraft, so ist diese Kraft normal zu der Kurve. Sie ergibt sich als die Resultante zweier Kräfte, die normal sind zu zwei durch die Kurve hindurchgehenden Flächen. Nennen wir R die Größe dieser Kraft, so gilt auch für die Bewegung auf der Kurve eine Gleichung von der Form (1).

Zerlegen wir nun die Beschleunigung und die Kräfte in drei Komponenten nach Tangente, Hauptnormale und Binormale der Kurve, so wird die Komponente $R_t = 0$, es ergibt sich also (vgl. S. 14)

$$m\frac{dv}{dt} = F_t, \quad m\frac{v^2}{\varrho} = F_n + R_n, \quad 0 = F_b + R_b. \tag{6}$$

Dies sind die natürlichen Gleichungen der Bewegung. Die erste von ihnen gilt auch für die Bewegung auf einer Fläche, wobei die Tangentenrichtung t der Tangentialebene angehören muß.

Die Fläche oder Kurve, an die der Punkt gebunden ist, sei fest und die Kraft besitze ein Potential, es sei also

$$F = \operatorname{grad} U.$$

Da die Fläche oder Kurve fest ist, so ergibt sich

$$n \times dP = 0;$$

multiplizieren wir daher die Gleichung (1) skalar mit dP und beachten, daß

$$F \times dP = \operatorname{grad} U \times dP = dU$$

ist, so folgt

$$m\ddot{P} \times dP = m\ddot{P} \times \dot{P}\,dt = \tfrac{1}{2} m\, d\dot{P}^2 = dU$$

und durch Integration

$$m\dot{P}^2 - 2U = h$$

oder

$$mv^2 - 2U = h. \tag{7}$$

Dies ist ein erstes Integral der Bewegungsgleichungen, das als die **Energiegleichung** bezeichnet wird. Bewegt der Punkt sich auf einer festen Kurve, so genügt diese Gleichung, um die Bewegung zu bestimmen. In der Tat ist dann U eine Funktion der Bogenlänge s und die Gleichung (7) ist somit eine Differentialgleichung, die s als Funktion von t, d. h. den Ort des Punktes auf der Kurve als Funktion der Zeit bestimmt.

In dem besonderen Falle der Bewegung eines schweren Punktes auf einer festen Kurve wird, wenn die z-Achse vertikal,

$$U = -mgz, \tag{8}$$

dann ist die aus (7) entstehende Differentialgleichung und damit das Bewegungsproblem durch Quadraturen lösbar.

Wenn nämlich die Kurve gegeben ist, so sind x und y als Funktionen von z bekannt. Also wird

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{z}^2\left\{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right\},$$

und es ergibt sich nach (7) und (8)

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{h - 2mgz}{m\left\{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right\}}.$$

In dieser Gleichung steht auf der rechten Seite eine Funktion von z allein, die Zeit t ergibt sich also in der Tat als das Integral einer Funktion von z, wobei z die vertikale Erhebung über ein Normalniveau bezeichnet.

Wir wollen noch bemerken, daß im Falle der Bewegung eines Punktes auf einer vollkommen glatten Fläche, wenn die wirkende Kraft verschwindet oder beständig zu der Fläche normal ist, zufolge der Gleichung (7) $U =$ konst. genommen werden kann, so daß aus (7) $v =$ konst. folgt: die Bewegung ist

also gleichförmig. Die Beschleunigung fällt daher in die Hauptnormale der Bahn; andererseits zeigt die Gleichung (1), daß sie zu der Fläche normal ist, mithin fällt die Hauptnormale der Bahnkurve mit der Flächennormale zusammen und die Bahnkurve ist eine kürzeste Linie.[1])

In dem Falle, wo die Wirkungslinie der Kraft, die auf einen frei beweglichen Punkt wirkt, stets eine feste Achse trifft, läßt sich ebenfalls sofort ein erstes Integral der Bewegung finden. Wählen wir nämlich die feste Achse zur z-Achse, so werden in den Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{x} = X,\ m\ddot{y} = Y,\ m\ddot{z} = Z$$

X, Y von der Form $X = \varrho x,\ Y = \varrho y$; multiplizieren wir dann die erste Gleichung mit $-y$, die zweite mit x und addieren sie, so erhalten wir

$$m(x\ddot{y} - y\ddot{x}) = 0$$

und durch Integration

$$m(x\dot{y} - y\dot{x}) = mc.$$

Setzen wir $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$, so wird diese Gleichung

$$r^2\dot{\theta} = c. \tag{9}$$

Sie wird als die Flächengleichung bezeichnet.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen wollen wir dazu übergehen, einige spezielle, aber sehr wichtige Aufgaben zu behandeln.

2. Bewegung eines Punktes unter dem Einfluß einer Zentralkraft. Der Punkt P von der Masse m werde von dem Punkte O, dessen Masse M sei, angezogen mit einer Kraft $mMf(r)$, demnach ist die absolute Beschleunigung von P, die nach O hin gerichtet ist, gleich $Mf(r)$. Dagegen soll nach dem Gegenwirkungsprinzip auf O eine nach P hin gerichtete Kraft von derselben Größe $mMf(r)$ wirken, dann wird die absolute Beschleunigung von O gleich $mf(r)$ und ist von O nach P gerichtet. Beziehen wir nun die Bewegung von P auf ein Koordinatensystem mit dem Ursprung O und Achsen von un-

1) Euler, Mechanica sive motus scientia, 1736, T. II, Cap. I, Prop. 7, 8.

veränderlicher Richtung, so wird die Beschleunigung von P in diesem Koordinatensystem gleich der absoluten Beschleunigung abzüglich der Beschleunigung von O; da diese beiden Beschleunigungen aber entgegengesetzt gerichtet sind, ergibt sich für die Relativbeschleunigung von P der Wert $(M+m)f(r)$ oder $\mu f(r)$, wenn wir $\mu = M + m$ setzen. Dann aber ist die ganze Betrachtung so zu führen, als ob der Punkt P von einem festen Zentrum angezogen würde.

Nun wissen wir aus der Kinematik, daß die Bahn, die ein Punkt bei einer solchen Zentralbewegung beschreibt, eine ebene Kurve ist und daß die von dem Radiusvektor durchstrichenen Flächen der Zeit proportional sind. Legen wir also in der Ebene der Bahn den Punkt P durch ein System von Polarkoordinaten r, θ, dessen Pol O ist, fest, so haben wir

$$r^2\dot{\theta} = c. \tag{10}$$

Dabei ist $\frac{1}{2}c$ die von dem Radiusvektor in der Zeiteinheit durchstrichene Fläche.

Ferner ist die auf die Masseneinheit bezogene Kraft

$$F = -\mu f(r)\frac{P-O}{r} = -\mu f(r)\,\mathrm{grad}\,r = -\mu\,\mathrm{grad}\int f(r)\,dr;$$

wenn wir also setzen

$$\int f(r)\,dr = \varphi(r),\quad U = -\mu\varphi(r), \tag{11}$$

ergibt sich

$$F = \mathrm{grad}\,U$$

und somit folgt aus (7) für $m = 1$

$$v^2 = h + 2\mu\,\varphi(r). \tag{12}$$

Die Gleichungen (10) und (12) reichen hin zur Lösung des Problems und diese Lösung ist durch Quadraturen zu erreichen.

Zunächst haben wir aus (10), da $\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{c}{r^2}$,

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = c^2\left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right]$$

und sonach aus (12)

$$c^2 \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 = h + 2\mu\,\varphi(r) - \frac{c^2}{r^2} = \psi(r).$$

Trennen wir dann die Variabeln, so ergibt sich

$$d\theta = \pm \frac{c\,dr}{r^2 \sqrt{\psi(r)}}\ ^{1)}$$

und hieraus durch Integration die Polargleichung der Bahn. Außerdem wird

$$\frac{dr}{dt} = \frac{c}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = \pm\sqrt{\psi(r)}$$

also durch Integration

$$t + \tau = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\psi(r)}}.$$

Die vier auftretenden Konstanten bestimmen sich durch die Anfangsbedingungen.

Um über das willkürlich gebliebene Vorzeichen zu entscheiden, beachten wir, daß durch die gegebene Anfangsgeschwindigkeit auch das Vorzeichen von $\dot{r}$, d. h. von $\sqrt{\psi(r)}$, für $t = 0$ bestimmt wird, und dieses Vorzeichen halten wir fest so lange, bis $\dot{r} = 0$ wird. Wenn dann nicht auch $\ddot{r} = 0$ ist, wechselt $\dot{r}$, d. h. $\sqrt{\psi(r)}$ sein Vorzeichen. Ist die gegebene Anfangsgeschwindigkeit senkrecht zum Radiusvektor, also $\psi(r_0) = 0$ oder $\dot{r}_0 = 0$, dann müssen wir den Wert von $\ddot{r}$ benutzen, der durch

$$\ddot{r} = \mu f(r) + \frac{c^2}{r^3}$$

gegeben wird. In der Tat ist

$$2\ddot{r} = \psi'(r) = \frac{d\psi}{dr} = 2\mu\frac{d\varphi}{dr} + \frac{2c^2}{r^3} = 2\mu f(r) + \frac{2c^2}{r^3}.$$

---

1) Eine genaue Diskussion der Bahnkurve findet man bei Boltzmann, *Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik*, Leipzig 1893, 1. Teil, S. 78 (§ 23).

Variiert die Kraft allgemein wie r^n, so ergibt sich, daß für $n = 1$, -2, -3 die Integrationen sich durch Kreisfunktionen ausführen lassen. Für $n = 5, 3, 0, -4, -5, -7$ lassen sich die Integrationen, wenn man für die Variable den reziproken Wert u des Radiusvektors oder u^2 nimmt, durch elliptische Integrale ausführen.

Ist nun $\ddot{r} > 0$ für $t = 0$, so ist r ein Minimum für $t = 0$ und wächst sonach mit der Zeit, das Integral muß mit dem Vorzeichen + genommen werden; ist dagegen $\ddot{r} < 0$ für $t = 0$, so ist das Vorzeichen — zu wählen. Ist aber $\ddot{r} = 0$, so folgt, da $\ddot{r}$ von der Form $\ddot{r} = \chi(r)\dot{r}$ ist, durch erneute Differentiation $\dddot{r} = \chi(r)\ddot{r} + \chi'(r)\dot{r}^2 = 0$ und so verschwinden alle Derivierten von r, d. h. r ist konstant, und der Punkt bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einem Kreis.

Die Punkte, wo $\dot{r} = 0$, also r ein Maximum oder Minimum und die Bewegungsrichtung senkrecht zum Radiusvektor ist, heißen die Apsiden der Bahn. Verbindet man eine Apsis A mit dem Zentrum O, so läßt sich zeigen, daß die Bahnkurve bezüglich dieser Linie symmetrisch ist. Rechnen wir nämlich von dem Radiusvektor $OA = a$ nach beiden Seiten hin gleiche Winkel θ und nennen r, r_1 die zugehörigen Radienvektoren, so ergibt sich

$$\pm\theta = \int_{r_1}^{a} \frac{c\,dr}{r^2\sqrt{\psi(r)}} = -\int_{a}^{r} \frac{c\,dr}{r^2\sqrt{\psi(r)}}$$

und sonach

$$\int_{r}^{r_1} \frac{dr}{r^2\sqrt{\psi(r)}} = 0,$$

also

$$r = r_1.$$

Wir nehmen nun den besonders wichtigen Fall, wo

$$f(r) = -\frac{1}{r^2},$$

also umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung ist, dann finden wir der Reihe nach

$$\varphi(r) = \frac{1}{r}, \quad v^2 = h + \frac{2\mu}{r},$$

$$\psi(r) = \frac{2\mu}{r} + h - \frac{c^2}{r^2} = \alpha^2 - \varrho^2,$$

wenn wir

$$\alpha = \sqrt{h + \frac{\mu^2}{c^2}}, \; \varrho = \frac{c}{r} - \frac{\mu}{c}$$

setzen. Weiter ergibt sich

$$d\theta = \pm \frac{d\varrho}{\sqrt{\alpha^2 - \varrho^2}}$$

und durch Integration

$$\varrho = \alpha \cos(\theta - \theta_0),$$

woraus

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)},$$

wenn wir

$$p = \frac{c^2}{\mu}, \quad e^2 = 1 + \frac{hc^2}{\mu^2}$$

setzen. Die so gefundene Bahnkurve ist ein Kegelschnitt[1]), von der O ein Brennpunkt ist, und zwar wird der Kegelschnitt eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse, jenachdem $h >, =$ oder < 0 ist. Denn dementsprechend ist $e >, =$ oder < 1; die Werte r_1, r_2, die sich für $\theta = \theta_0$ und $\theta = \theta_0 + \pi$ ergeben und die den Apsiden der Bahn, den Endpunkten der Hauptachse des Kegelschnittes, entsprechen, werden nämlich in den drei Fällen

$$1)\ r_1 > 0,\ r_2 < 0, \quad 2)\ r_1 > 0,\ r_2 = \infty, \quad 3)\ r_1 > 0,\ r_2 > 0.$$

Im ersten Falle liegen die Endpunkte der Hauptachse auf derselben Seite, im dritten Falle auf verschiedenen Seiten des

1) Bertrand, *Sur la possibilité de déduire d'une seule des lois de Kepler la loi de l'attraction*, Comptes rendus t. 84, p. 671 (1877), und ebenda p. 731, hat das Problem aufgestellt, alle Kraftgesetze zu bestimmen, die für beliebige Anfangsbedingungen einen Kegelschnitt als Bahnkurve liefern. Durch eine geometrische Überlegung bewies er, daß die Kraft durch einen bestimmten Punkt gehen oder einer bestimmten Richtung parallel sein muß. So vereinfacht, fand das Problem seine Lösung durch Darboux, ebenda p. 760, 936 (auch Note XII zu der Mécanique von Despeyrous) und Halphen, ebenda p. 939. Der letztere hat auf analytischem Wege bewiesen, daß eine Kraft, die von der Lage des Angriffspunktes abhängt und diesen bei beliebigen Anfangsbedingungen in einer ebenen Bahnkurve bewegt, durch einen festen Punkt gehen oder einer festen Richtung parallel sein muß. Stephanos, *Sur les forces donnant lieu à des trajectoires coniques*, Journal für Math. Bd. 131, S. 136 (1906), hat den Fall einer beliebigen Kraft in Betracht gezogen.

Brennpunktes. Ist a die halbe Hauptachse, so wird im ersten Falle

$$a = -\tfrac{1}{2}(r_1 + r_2) = \frac{p}{e^2 - 1} = \frac{\mu}{h},$$

im dritten Falle

$$a = \tfrac{1}{2}(r_1 + r_2) = \frac{p}{1 - e^2} = -\frac{\mu}{h},$$

demnach ergibt sich in den drei Fällen

$$1)\ v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right),\quad 2)\ v^2 = \frac{2\mu}{r},\quad 3)\ v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Diese Gleichungen zeigen, daß die Größe der Hauptachse a nur von dem Radiusvektor und der Geschwindigkeit zu Anfang der Bewegung abhängt. Wir beschränken uns nunmehr auf die elliptische Bewegung und geben für diesen Fall auch noch einmal die Ableitung der benutzten Polargleichung. Wir nehmen auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Durchmesser $AB = 2a$ einen beliebigen Punkt Q, fällen das Lot QR auf AB und teilen es durch einen Punkt P in dem gegebenen Verhältnis $b : a$. Dann ist P ein Punkt einer Ellipse mit der großen Achse AB und der kleinen Achse $2b$. Der Winkel $AOQ = u$ heißt die **exzentrische Anomalie** des Ellipsenpunktes P.

Wir führen nun einen Punkt F auf OA im Abstande ae von O ein und setzen $FP = r$, $\sphericalangle AFP = \theta$. Dann ergibt sich sofort

$$OR = a \cos u = ae + r \cos \theta,$$
$$RP = b \sin u = r \sin \theta$$

Durch Differentiation finden wir hieraus

$$a \sin u\, du = r \sin\theta\, d\theta - dr \cos\theta,$$
$$b \cos u\, du = r \cos\theta\, d\theta + dr \sin\theta,$$

und wenn wir nun dr eliminieren, mit Rücksicht auf die ursprünglichen Gleichungen,

$$ab\,(1 - e \cos u)\, du = r^2\, d\theta.$$

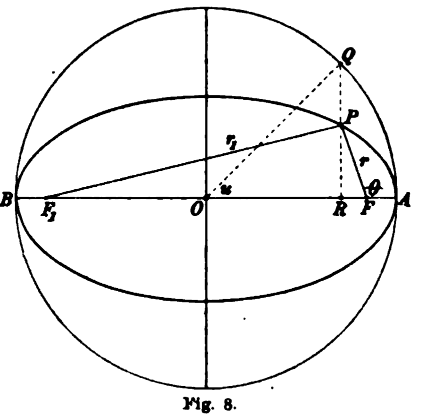


Fig. 8.

Daraus folgt

$$ab(u - e \sin u) = c \cdot t,$$

die sogenannte Keplersche Gleichung.

Weiter finden wir

$$a^2 = (ae + r \cos \theta)^2 + \frac{a^2}{b^2} r^2 \sin^2 \theta.$$

Diese Gleichung aber wird, wenn wir $a^2 e^2 = a^2 - b^2$ annehmen,

$$\frac{a^2}{b^2} r^2 = b^2 - 2aer \cos \theta + \frac{a^2 e^2}{b^2} r^2 \cos^2 \theta$$

und wenn wir links und rechts die Wurzel ausziehen

$$\frac{a}{b} r = b - \frac{ae}{b} r \cos \theta$$

oder

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta},$$

für $p = \frac{b^2}{a}$. Dies ist die frühere Gleichung, wenn wir darin $\theta_0 = 0$ nehmen.

Setzen wir aber in die vorhergehende Gleichung

$$r \cos \theta = a \cos u - ae$$

ein, so erhalten wir

$$\frac{a}{b} r = b + \frac{a^2 e^2}{b} - \frac{a^2 e}{b} \cos u$$

oder

$$r = a(1 - e \cos u).$$

So wird r durch u ausgedrückt. Ferner findet man

$$r - r \cos \theta = a(1 + e)(1 - \cos u),$$
$$r + r \cos \theta = a(1 - e)(1 + \cos u)$$

und wenn wir diese beiden Gleichungen durch einander dividieren und die Wurzel ausziehen,

$$\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \operatorname{tang} \frac{u}{2}.$$

3. Bewegung der Planeten um die Sonne. Die drei Sätze, welche die Bewegung der Planeten um die Sonne beschreiben und unter dem Namen der Keplerschen Gesetze bekannt sind, lauten:

1) Die Bahn jedes Planeten ist eine Ellipse, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht.

2) Die von dem Radiusvektor aus der Sonne nach dem Planeten durchstrichene Fläche wächst proportional der Zeit.

3) Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Achsen.

Die zwei ersten Gesetze veröffentlichte Kepler 1609 in der Astronomia nova, welche die Bewegung des Planeten Mars behandelt, das dritte in der Harmonice mundi 1619. Aus diesen Gesetzen leitete Newton die Existenz einer anziehenden Kraft zwischen der Sonne und den Planeten ab.

Aus dem zweiten Gesetz, dem Flächensatz, folgt zunächst, daß auf den Planet eine in seine Verbindungslinie mit der Sonne fallende Kraft wirkt. Da aber die Kraft immer nach der konvexen Seite der Bahnkurve hin gerichtet ist und die Ellipse dem Brennpunkt ihre konvexe Seite zukehrt, folgt auch, daß die Kraft auf die Sonne zu gerichtet ist. Daraus, daß die Bahnkurve eine Ellipse ist, ergibt sich dann weiter nach dem im vorigen Paragraphen auseinandergesetzten, daß die Kraft dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional ist. Die Umlaufszeit läßt sich nun nach dem Flächensatz sofort berechnen. Der Flächeninhalt der Bahnkurve muß nämlich einerseits gleich $\frac{1}{2}cT$ sein, andererseits aber ist er gleich πab. Daraus folgt

$$c = \frac{2\pi ab}{T}.$$

Hierdurch aber läßt sich die Konstante μ in dem Ansatz der Kraft

$$F = \mu \frac{m}{r^2}$$

bestimmen. Es wird nämlich

$$\mu = \frac{c^2}{p} = \frac{c^2}{b^2} a = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$$

und so schließlich

$$F = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{m}{r^2}.$$

Wenn anderseits die Anziehung von einer Masse M her-

rührt, die sehr groß gegenüber der Masse der Planeten ist, so daß man $M + m$ durch M ersetzen kann, so muß

$$F = f\frac{Mm}{r^2}$$

werden, und es ergibt sich

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{f}{4\pi^2}M,$$

also gleich für alle Planeten, und dies wird durch das dritte Keplersche Gesetz bestätigt.

Nach der vorletzten Formel für F wird die Beschleunigung des Planeten in der Entfernung a

$$w = \frac{4\pi^2 a}{T^2}.$$

Wenden wir dies auf den Mond an, indem wir annehmen, daß er sich in einem Kreise bewegt, in dessen Mittelpunkt die Erde steht, so finden wir für die Beschleunigung, die ihm die Anziehung der Erde erteilt, unter der Voraussetzung, daß

$$a = 60 \text{ Erdradien}, \quad T = 27 \text{ Tagen}$$

ist, angenähert

$$2\pi a = 60 \cdot 40 \cdot 10^8 \text{ cm}, \quad T = 27 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ sec}$$

und demnach wird

$$w = \frac{25,12}{252} \cdot \frac{10^4}{60^2} = \frac{997}{60^2} (\text{cm}, \text{sec}^{-2}).$$

Gehen wir dagegen von der Beschleunigung g an der Erdoberfläche aus, so ergibt sich aus dem Newtonschen Attraktionsgesetze

$$w = \frac{981}{60^2} (\text{cm}, \text{sec}^{-2})$$

und die beiden gefundenen Werte stimmen in der Tat angenähert überein. Dies war die erste Probe, die Newton auf sein Attraktionsgesetz machte.

Die Ausdehnung des gefundenen Anziehungsgesetzes auf irgend zwei Teilchen der Materie bildet das allgemeine Gravitationsgesetz Newtons; f ist die allgemeine Gaußische

Gravitationskonstante, deren Dimensionen, da F die Dimensionen $[m, l, t^{-2}]$ hat,

$$[f] = [m^{-1}, l^3, t^{-2}]$$

werden. Um sie zu berechnen, kann man für M die Masse der Erde, für m die Masseneinheit an der Erdoberfläche nehmen, dann wird, wenn ϱ die mittlere Dichtigkeit der Erde und R ihren Radius bezeichnet, an der Erdoberfläche

$$F = g = f \cdot \tfrac{4}{3}\pi\varrho R$$

und sonach

$$f = \tfrac{3}{4}\frac{g}{\pi\varrho R}.$$

Setzt man für eine angenäherte Berechnung

$$2\pi R = 4 \cdot 10^9, \quad g = 9{,}81, \quad \varrho = 5{,}67,$$

so wird

$$f = \frac{1}{15.000.000} = 6{,}67 \cdot 10^{-8}\,(\mathrm{cm}^3, \mathrm{gr}^{-1}, \mathrm{sec}^{-2})$$

also außerordentlich klein. Genauer wurde gefunden

$$f = 6{,}6576 \cdot 10^{-8}\,(\mathrm{cm}^3, \mathrm{gr}^{-1}, \mathrm{sec}^{-2}).$$ [1]

4. Das einfache Pendel. Unter einem einfachen Pendel versteht man einen materiellen Punkt, der sich unter dem Einfluß der Schwere auf einem vertikalen Kreise bewegt. Man stellt ein solches Pendel annähernd her, indem man eine schwere Kugel durch einen Faden von verschwindend geringem Gewichte an einem festen Punkte aufhängt.

Mit M wollen wir den Mittelpunkt des Kreises, mit l seinen Radius (die Länge des Pendels), endlich mit φ den Winkel, den der Radius MP (oder der Faden) mit der durch M gehenden Vertikalen bildet, bezeichnen. Die Größe der Geschwindigkeit wird dann

$$v = l\dot{\varphi},$$

und nehmen wir die Ordinaten z vertikal nach aufwärts vom Niveau des Punktes M aus, so wird

$$U = -mgz = mgl\cos\varphi.$$

1) Boys, *On the Newtonian Constant of Gravitation*, Philosophical Transactions, Vol. 186, p. 1 (1895).

Die Gleichung (7) liefert also

$$l^2\dot{\varphi}^2 - 2gl\cos\varphi = \frac{h}{m},$$

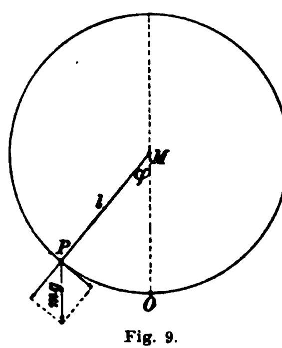


Fig. 9.

oder wenn wir eine neue Konstante $k = \frac{h}{2mgl}$ einführen,

$$\dot{\varphi}^2 = 2\frac{g}{l}(k + \cos\varphi). \qquad (13)$$

Wollen wir nun die Reaktionskraft R bestimmen, so haben wir zu beachten, daß die Normalkomponente der Schwere

$$F_n = -mg\cos\varphi$$

wird; es ergibt sich also aus (6)

$$R = m\frac{v^2}{l} + mg\cos\varphi = mg(2k + 3\cos\varphi).$$

Diese Reaktionskraft muß aber stets einen positiven Wert haben, wenn der Faden immer gespannt bleiben soll. Es folgt also

$$2k + 3\cos\varphi_1 > 0,$$

wenn φ_1 den größten absoluten Wert bezeichnet, den φ annimmt.

Wir haben nun drei verschiedene Fälle zu unterscheiden.

1. Ist $k > 1$, so kann in dem Ausdruck für $\dot{\varphi}^2$ die rechte Seite nie verschwinden, der Punkt durchläuft also den ganzen Kreis. Die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ hat ihren größten Wert $\sqrt{2\frac{g}{l}(k+1)}$ im tiefsten Punkte O des Kreises, wo $\varphi = 0$ ist, und ihren kleinsten Wert $\sqrt{2\frac{g}{l}(k-1)}$ im höchsten Punkte des Kreises, für $\varphi = \pi$.

2. Ist $k = 1$, so wird

$$\dot{\varphi} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\tfrac{1}{2}\varphi$$

und der Punkt erreicht den höchsten Punkt mit der Geschwindigkeit 0. Weiter ergibt sich

$$\frac{d(\frac{1}{2}\varphi)}{\cos\frac{1}{2}\varphi} = \sqrt{\frac{g}{l}}\,dt.$$

Schreiben wir die linke Seite dieser Gleichung in der Form

$$\frac{d\frac{\pi+\varphi}{4}}{\cos\frac{\pi+\varphi}{4}\sin\frac{\pi+\varphi}{4}} = \frac{d\,\mathrm{tang}\frac{\pi+\varphi}{4}}{\mathrm{tang}\frac{\pi+\varphi}{4}},$$

so ergibt sich sofort durch Integration

$$\log\mathrm{tang}\frac{\pi+\varphi}{4} = \sqrt{\frac{g}{l}}\,t,$$

wenn die Zeit vom Durchgange durch den tiefsten Punkt O an gerechnet wird. Daraus folgt aber, daß t unendlich groß wird für $\varphi = \pi$, der Punkt erreicht also die höchste Stelle erst nach unendlich langer Zeit, d. h. nähert sich ihr asymptotisch.

Dies gilt aber nur, wenn der bewegliche Punkt P mit dem Mittelpunkt M starr verbunden ist. Sonst zeigt die vorher gefundene Gleichung, daß, sowie

$$2 + 3\cos\varphi = 0$$

wird, also $\cos\varphi = -\frac{2}{3}$ und φ ungefähr gleich $131^0\,48'$, die Kugel des Pendels herunterfällt.

3. Nehmen wir schließlich $-1 < k < 1$ an, so läßt sich ein Winkel φ_1 so bestimmen, daß

$$k = -\cos\varphi_1$$

wird, also φ_1 stumpf ist, wenn k positiv ist, ein Rechter, wenn $k = 0$, und ein spitzer Winkel, wenn k negativ wird. Dann können wir die Gleichung für $\dot\varphi^2$ in die Form bringen

$$\dot\varphi^2 = 4\frac{g}{l}\left(\sin^2\frac{\varphi_1}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right).$$

Es ist daraus sofort zu sehen, daß φ_1 der größte absolute Wert ist, den φ erreicht, also die Amplitude der Schwingung, die P ausführt. Die Zeit, die das Pendel gebraucht, um aus der tiefsten Lage in die durch den Winkel φ gegebene Lage zu gelangen, ist gegeben durch das Integral

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi} \frac{d\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_1}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}}.$$

Das Integral ist ein elliptisches Integral erster Gattung. Man bringt es auf die Normalform mit Hilfe der Substitution

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\varphi_1}{2}\sin u = \varkappa \sin u,$$

dann wird

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 u}}.$$

Eine Viertelschwingung ist die Zeit, die das Pendel gebraucht, um aus der tiefsten Lage in die Lage der größten Ausweichung oder aus dieser umgekehrt in jene zurück zu gelangen. Hat aber φ den Wert φ_1, so hat u den Wert $\frac{1}{2}\pi$, man findet also für die Dauer $\frac{1}{4}T$ einer Viertelschwingung den Ausdruck

$$\frac{1}{4}T = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 u}}. \tag{14}$$

Um dieses Integral auszuführen, ist es, solange $\varkappa$ ein mäßiger Bruch und demnach die Amplitude φ_1 nicht sehr groß ist, zweckmäßig, den Integrand in eine Reihe zu entwickeln. Man findet nach dem binomischen Lehrsatze

$$(1 - \varkappa^2 \sin^2 u)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\varkappa^2 \sin^2 u + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\varkappa^4 \sin^4 u$$
$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\varkappa^6 \sin^6 u + \cdots$$

Bei der Integration haben wir zu beachten, daß

$$J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} u\, du = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m} \cdot \frac{\pi}{2}$$

wird. Dies läßt sich durch partielle Integration leicht bestätigen, denn auf diesem Wege ergibt sich

$$J_m = (2m - 1)(J_{m-1} - J_m)$$

oder

$$J_m = \frac{2m-1}{2m} J_{m-1}.$$

Es wird aber $J_0 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} du = \frac{1}{2}\pi$, und demnach findet man sofort die vorstehende Formel. Dann folgt durch Integration der vorstehenden Reihe zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varkappa^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \varkappa^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \varkappa^6 + \cdots\right].$$[1]

Die Reihe gliedweise zu integrieren ist gestattet, weil sie zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ gleichförmig konvergiert.

Nehmen wir insbesondere an, die Amplitude φ_1, also auch $\varkappa$ sei sehr klein, so können wir in der Reihe für T alle Glieder außer den ersten zwei vernachlässigen und finden

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \frac{\varkappa^2}{4}\right]$$

oder, da wir für sehr kleines φ_1 auch $\varkappa = \sin\frac{\varphi_1}{2} = \frac{\varphi_1}{2}$ setzen können,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\varphi_1^2}{16}\right).$$

Für ganz kleines φ_1 ergibt sich als erste Annäherung

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Diese Formel kann man auch direkt daraus gewinnen, daß für sehr kleines φ_1

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_1}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} = 2\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_1^2 - \varphi^2}} = 2\left[\arc\sin\frac{\varphi}{\varphi_1}\right]_0^{\varphi_1} = \pi$$

---

1) Das sehr interessante Problem eines Pendels von veränderlicher Länge behandelten Lecornu, Mémoire sur le pendule de longueur variable, Acta math., Bd. 19, S. 201 (1895) und Peano, Sul pendolo di lunghezza variabile, Rendic. del circolo matem. di Palermo, t. 10, p. 36 (1896).

wird. Es zeigt diese Pendelformel, da sie von φ_1 unabhängig ist, den von Galilei[1]) entdeckten Isochronismus kleiner Schwingungen.

5. Das sphärische Pendel. Wir behandeln das Problem der Bewegung eines schweren Punktes, dessen Anfangsgeschwindigkeit gegeben und der gezwungen ist, in einer Kugel zu bleiben. Der Mittelpunkt der Kugel sei der Ursprung, $\boldsymbol{g}$ sei ein vertikal nach abwärts gerichteter Einheitsvektor, dann wird die Gleichung der Bewegung

$$m\ddot{P} = mg\,\boldsymbol{g} - \frac{R}{a}(P - O).$$

Hierbei bezeichnet m die Masse des bewegten Punktes P, a den Kugelradius, R die Größe der von der Kugel ausgeübten normalen Reaktionskraft.

Die Gleichung (7) liefert uns sofort das erste Integral

$$mv^2 = h - 2mgz,$$

wenn wir der z-Achse die entgegengesetzte Richtung wie $\boldsymbol{g}$ geben; in der Äquatorebene ergibt (9) das weitere Integral

$$r^2\dot{\theta} = c.$$

Es ist auch leicht, diese beiden Beziehungen direkt aus der Bewegungsgleichung abzuleiten. Die erste ergibt sich, indem man mit $\dot{P}$ skalar multipliziert und beachtet, daß $(\dot{P} - O) \times \dot{P} = 0$ ist. Man kann dann direkt integrieren und findet

$$\dot{P}^2 = \frac{h}{m} + 2g(P - O) \times \boldsymbol{g}.$$

Um die zweite Beziehung zu finden, beachte man, daß $\ddot{P}$, $P - O, \boldsymbol{g}$ zufolge der Bewegungsgleichung einer Ebene angehören, es wird also

$$\boldsymbol{g} \times (P - O) \wedge \ddot{P} = 0$$

und durch Integration

$$\boldsymbol{g} \times (P - O) \wedge \dot{P} = \text{konst.}$$

Die gefundenen beiden Beziehungen genügen, um das Problem

1) *Discorsi e dimostrazioni* ecc, Edizione nazionale, Vol. 8, p. 139 seq. S. auch *Dialogo dei due massimi sistemi*, Ediz. naz., Vol. 7, p. 256, 475.

auf Quadraturen zurückzuführen. In der Tat ergibt sich

$$r^2 + z^2 = a^2 \quad \text{und daraus} \quad r\dot{r} + z\dot{z} = 0,$$

außerdem

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 = \frac{h}{m} - 2gz.$$

Eliminieren wir $\dot{r}$ und $\dot{\theta}$ aus den gefundenen Gleichungen, so erhalten wir, wenn wir

$$f(z) = (a^2 - z^2)\left(\frac{h}{m} - 2gz\right) - c^2$$

setzen,

$$a\dot{z} = \pm\sqrt{f(z)}$$

und weiter

$$d\theta = \frac{c\,dt}{r^2} = \pm\frac{a\,c\,dz}{(a^2-z^2)\sqrt{f(z)}}.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen liefert durch eine Quadratur z als Funktion von t, die zweite liefert, wenn wir beachten, daß

$$\theta = \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}$$

ist, eine Relation zwischen x, y, z, d. h. die Gleichung einer Fläche, deren Schnitt mit der Kugel die Bahnkurve des Punktes bildet.

Die vollständige Lösung des Problems läßt sich mit Hilfe von elliptischen Funktionen durchführen.[1]) Wir können aber ohne weiteres den allgemeinen Charakter der Bewegung angeben.

Da die Funktion $f(z)$ für $z = \pm a$ negative Werte annimmt und nicht immer negativ sein kann, muß sie für zwei reelle Werte α, β von z, die zwischen $+a$ und $-a$ liegen, verschwinden. Deshalb ist die Bahnkurve zwischen zwei Parallelkreisen enthalten, die der bewegte Punkt abwechselnd in endlichen Zwischenräumen erreicht, denn $\sqrt{f(z)}$ wird unendlich klein von der Ordnung $\frac{1}{2}$, wenn z einem

1) Durège, *Theorie der elliptischen Funktionen*, Lpz. 1878; Greenhill, *The applications of elliptic functions*, London 1892, p. 214.

der Werte α, β unendlich nahe kommt. Für diese Werte wird $\dot{z} = 0$, die Geschwindigkeit ist also längs des Parallelkreises gerichtet, die Bahnkurve berührt abwechselnd die begrenzenden Parallelkreise.

Es sei γ die dritte reelle Wurzel von $f(z) = 0$, die zwischen a und ∞ liegt. Da

$$\alpha\beta + \gamma(\alpha + \beta) = -a^2$$

und das Produkt $\alpha\beta$ dem absoluten Werte nach nicht größer als a^2 sein kann, schließen wir, daß $\alpha + \beta < 0$ ist. Wir können dies so deuten: der zwischen den beiden begrenzenden Parallelkreisen in der Mitte liegende Parallelkreis gehört der unteren Kugelhälfte an.

Ist nun

$$a^2h - c^2m < 0,$$

so ist $\alpha\beta\gamma > 0$, also sind α, β beide negativ, die Bahnkurve trifft den Äquator nicht und ihre Projektion auf die Äquator ebene berührt nur die Projektionen der beiden begrenzenden Parallelkreise, nicht aber die Projektion des Äquators. Ist dagegen

$$a^2h - c^2m \geqq 0,$$

so ist von α, β eines, etwa α, negativ und das andere, β, positiv und dem absoluten Betrage nach $\leqq \alpha$; die Bahnkurve durchsetzt den Äquator und ihre Projektion auf die Äquatorebene berührt ihn.

Im Falle $c = 0$ geht die Bewegung in einem Meridian vor sich und man kommt auf den Fall des einfachen Pendels zurück. Ist dagegen $\alpha = \beta$, so geschieht die Bewegung in einem Parallelkreise und ist gleichförmig; die Quadraturen lassen sich mit elementaren Funktionen ausführen.

Was das Vorzeichen von $\sqrt{f(z)}$ betrifft, so ist, wenn zu Anfang $\dot{z}$ negativ ist, also z abnimmt, das Zeichen $-$ zu wählen, bis z den niedrigsten Wert α erreicht hat, von diesem Werte an nimmt es wieder zu und das Vorzeichen wird $+$, bis z den höchsten Wert β erreicht hat usw.

Wir können schließlich den Wert R der normalen Reaktionskraft berechnen; aus der Bewegungsgleichung folgt sofort

$$m\ddot{P} \times (P-O) = mg\,\mathbf{g} \times (P-O) - Ra,$$

und da sich aus

$$(P-O)^2 = a^2$$

die Beziehung

$$\ddot{P} \times (P-O) + \dot{P}^2 = 0$$

ergibt, finden wir

$$R = \frac{1}{a}(h - 3mgz).$$

Wird in einem Punkte $R = 0$, so verläßt der bewegte Körper die Kugel; dieser Fall kann nie eintreten, wenn α, β und mithin z negativ sind, weil dann

$$\frac{h}{m} - 3gz = v^2 - gz > 0$$

ist.

Besonders interessant ist der Fall, wo der bewegte Körper nur kleine Oszillationen ausführt. Dann können wir z als von $-a$ wenig verschieden ansehen und die Anfangsgeschwindigkeit v_0 als sehr klein, demnach ist die Konstante h, wenn wir das Quadrat von v_0 vernachlässigen, sehr nahe gleich $-2mga$ und folglich

$$R = mg.$$

Wenn wir also mit Q die Projektion des Punktes P auf die Äquatorebene bezeichnen, so wird die Gleichung der Bewegung von Q

$$\ddot{Q} = -\frac{g}{a}(Q-O),$$

d. h. Q bewegt sich, als ob es einer Anziehungskraft unterworfen wäre, die nach dem Zentrum der Kugel hin gerichtet und dem Abstande von diesem Zentrum proportional ist. Die Bahn von Q ist demnach eine Ellipse, deren Mittelpunkt im Zentrum der Kugel liegt; diese Ellipse wird durchlaufen in der Zeit $2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$.

Die vollständige Diskussion des allgemeinen Problems würde zeigen, daß die Projektion der Bahnkurve auf die Äquatorebene

keine Wendepunkte besitzt und der Winkel, den der Radiusvektor zwischen der Berührung A mit dem kleinen und der Berührung B mit dem großen Grenzkreise durchläuft, größer als $\frac{\pi}{2}$ ist.[1]) Eines der Resultate, das man aus der Darstellung mittels elliptischer Funktionen gewinnt, ist, daß die horizontalen Koordinaten des Pendels sich durch doppeltperiodische Funktionen zweiter Art der Zeit ausdrücken lassen.[2])

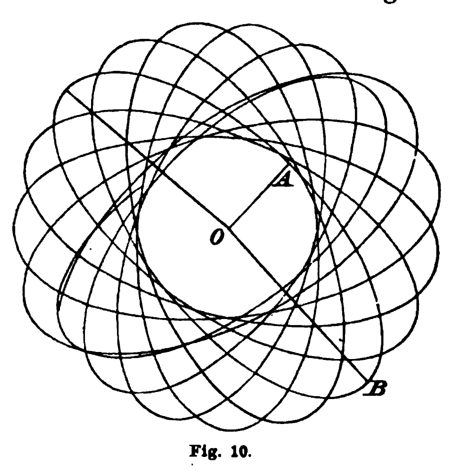


Fig. 10.

6. Relative Bewegung. Der freie Fall bei Berücksichtigung der Erdrotation. Die Grundgleichung für die Bewegung eines Punktes

$$m\ddot{P} = F$$

können wir derart umformen, daß wir den Vektor $\ddot{P}$ in die drei Bestandteile zerlegen, die bei der Betrachtung der Relativbewegung auftreten. Wir gehen dabei von der Darstellung des Punktes P in einem beweglichen Koordinatensystem

$$P = O + xe_1 + ye_2 + ze_3$$

1) Puiseux, *Note sur le mouvement d'un point matériel pesant sur une sphère,* Journal de math. pures et appliquées (1) t. 7, p. 517 (1842).

2) Hermite, *Sur le pendule,* Journal für Math. Bd. 85, S. 246 (1878) oder *Sur quelques applications des fonctions elliptiques,* Paris 1885, p. 112. Man kann über das Problem, das einen besonderen Fall des Gyroskops darstellt und deshalb mit diesem bemerkenswerte Analogien zeigt, noch vergleichen: Lagrange, *Mécanique analytique,* vol. 2, sect. VIII; Tissot, Thèse, Journal de Mathém. (1) t. 17, p. 88 (1852); de Sparre, Annales de la société des sciences de Bruxelles 1884—85, p. 49; Halphen, *Traité des fonctions elliptiques,* Paris 1886, vol. 2, p. 126; Chailan, Bulletin de la Société math. de France, t. 17, p. 112 (1889). Man sehe auch das von M. Schilling konstruierte Modell.

aus und setzen

$$\ddot{P}_r = \ddot{x}e_1 + \ddot{y}e_2 + \ddot{z}e_3,$$
$$\ddot{P}_s = x\ddot{e}_1 + y\ddot{e}_2 + z\ddot{e}_3,$$
$$\ddot{P}_c = 2(\dot{x}\dot{e}_1 + \dot{y}\dot{e}_2 + \dot{z}\dot{e}_3),$$

dann wird

$$\ddot{P} = \ddot{P}_r + \ddot{P}_s + \ddot{P}_c$$

und somit

$$m\ddot{P}_r = F - m\ddot{P}_s - m\ddot{P}_c. \qquad (15)$$

Diese Gleichung wollen wir insbesondere anwenden auf die Fallbewegung an der Oberfläche der rotierenden Erde. Wir nehmen für einen Punkt O auf der nördlichen Halbkugel das bewegliche Koordinatenkreuz so an, daß die z-Achse vertikal nach oben, die x-Achse nach Osten, die y-Achse nach Norden zeigt. Der Rotationsvektor Ω fällt dann in die yz-Ebene; die Winkelgeschwindigkeit der Rotation ist

$$\omega = 2\pi : 86400,$$

also ungefähr

$$= 7 \cdot 10^{-5},$$

so daß

$$\omega^2 < 5 \cdot 10^{-9}$$

wird.

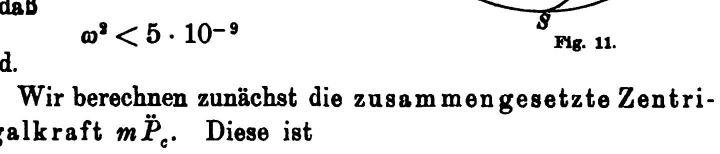


Fig. 11.

Wir berechnen zunächst die zusammengesetzte Zentrifugalkraft $m\ddot{P}_c$. Diese ist

$$\ddot{P}_c = 2\Omega \wedge \dot{P}_r$$

oder da

$$\dot{P}_r = \dot{x}e_1 + \dot{y}e_2 + \dot{z}e_3$$

ist und

$$\Omega = \omega(\cos\varphi e_2 + \sin\varphi e_3)$$

wird, wenn φ die geographische Breite von O bezeichnet, ergibt sich

$$\ddot{P}_c = 2\omega[(\dot{z}\cos\varphi - \dot{y}\sin\varphi)e_1 + \dot{x}\sin\varphi e_2 - \dot{x}\cos\varphi e_3].$$

Die Vertikale ist die Richtung der Kraft, die sich bei einem an der Oberfläche der Erde ruhenden Körper ergibt, sie ist also nicht die von $\mathfrak{F}$, sondern die von $\mathfrak{F} - m\ddot{\mathfrak{P}}_s$, d. h. die Anziehungskraft $\mathfrak{F}$ der Erde vermehrt um die Kraft $-m\ddot{\mathfrak{P}}_s$. Den Wert der Zentrifugalkraft $-m\ddot{\mathfrak{P}}_s$ finden wir am einfachsten, wenn wir ein mit der Erde drehbares Koordinatensystem so annehmen, daß der Ursprung in den Erdmittelpunkt und die z-Achse in die Erdachse fällt. Dann wird in den Formeln (13) auf Seite 113 des ersten Bandes $u, v, w, p, q = 0$, $r = \omega$, $\dot{r} = 0$ und es wird

$$m\ddot{\mathfrak{P}}_s = m\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} e_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y} e_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial z} e_3\right],$$

wobei

$$2\varphi = (px + qy + rz)^2 - \omega^2(x^2 + y^2 + z^2) = -\omega^2(x^2 + y^2) = -\omega^2 r^2$$

wird, also

$$m\ddot{\mathfrak{P}}_s = -m\omega^2(xe_1 + ye_2)$$

d. h. die Kraft hat die Größe $m\omega^2 r$ und fällt in die Linie des Abstandes r von der Erdachse, so daß sie auf die Erdachse zu gerichtet ist. Die Zentrifugalkraft $-m\ddot{\mathfrak{P}}_s$ ist also ebenso beschaffen, nur daß sie von der Erdachse weggerichtet ist.

Setzen wir aber in (15) ein

$$\mathfrak{F} - m\ddot{\mathfrak{P}}_s = -mge_3,$$

so ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= \quad 2\omega(\dot{y}\sin\varphi - \dot{z}\cos\varphi), \\ \ddot{y} &= -2\omega\dot{x}\sin\varphi, \\ \ddot{z} &= -g + 2\omega\dot{x}\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Ferner wollen wir annehmen, daß der Körper aus der Ruhelage herausfällt. Dann ergibt sich aus den beiden letzten Gleichungen sofort

$$\dot{y} = -2\omega x\sin\varphi, \quad \dot{z} = 2\omega x\cos\varphi - gt$$

und wenn wir dies in die erste Gleichung einsetzen und die Glieder mit ω^2 vernachlässigen (was wir dürfen, weil ω sehr klein ist)

$$\ddot{x} = 2\omega g t \cos\varphi;$$

daraus folgt durch zweimalige Integration

$$x = \tfrac{1}{3}\omega g t^3 \cos\varphi.$$

Führen wir dies in die vorher gefundenen Gleichungen für $\dot{y}$ und $\dot{z}$ ein, so ergibt sich, immer mit demselben Grad der Annäherung,

$$\dot{y} = 0, \quad \dot{z} = -gt$$

also zusammenfassend

$$x = \tfrac{1}{3}\omega g t^3 \cos\varphi, \quad y = 0, \quad z = h - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Der Fall ist demnach von dem ohne Rücksichtnahme auf die Erdrotation gefundenen nur dadurch verschieden, daß **eine Abweichung des fallenden Körpers nach Osten eintritt.** Um, wenn die Anfangshöhe h gegeben ist, die Stelle zu finden, wo der Punkt auf die xy-Ebene auftrifft, haben wir $z = 0$, also $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ anzunehmen und finden

$$x_0 = \tfrac{1}{3}\omega \cos\varphi \sqrt{\frac{8h^3}{g}}.$$

Diese Lotabweichung versuchte auf Anregung Newtons Hooke 1679 zu bestätigen, aber ohne Erfolg. Der Versuch wurde wiederholt von Guglielmini 1790/91 in Bologna am Turm der Asinelli (Höhe 78 m), von Tadini 1795 in Bergamo, von Benzenberg 1802 am Turm der St. Michaelskirche in Hamburg (130 m) und darauf 1804 in einem 100 m tiefen Schacht der Bergwerke von Schlebusch. Diese Versuche, die auf Grund der Rechnungen eine östliche Abweichung von 10,37 und 8,91 mm hätten liefern sollen, ergaben statt dessen 11,3 und 9,02. Die Versuche von Reich (1830—31) in einem Schacht zu Freiberg lieferten statt des berechneten Wertes 27,5 mm den Wert 28,4 mm. Die Resultate stimmten dagegen, was die südliche Abweichung betrifft, durchaus nicht mit der Theorie überein. Man vgl. Gilbert, *Les preuves mécaniques de la rotation de la terre*, Bulletin des Sciences math. (2) t. 6, p. 189 (1882).

7. Das Foucaultsche Pendel. Indem wir die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen beibehalten, nehmen wir an, ein schwerer Punkt sei mit einem Punkte A der z-Achse, der in der Höhe a liegt, durch einen sehr dünnen, starren Stab von der Länge a verbunden. Man hat also die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Kugel, die in einem Punkte M unterhalb A die Erdkugel berührt, zu untersuchen. Die Bedingungsgleichung lautet

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2,$$

und die Bewegungsgleichungen erhält man aus (16), indem man die Reaktionskraft des Stabes, die aus der vorstehenden Bedingungsgleichung auf die bekannte Art folgt, hinzunimmt. Wir haben also

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= \mu x + 2\omega(\dot{y}\sin\varphi - \dot{z}\cos\varphi), \\ \ddot{y} &= \mu y - 2\omega\dot{x}\sin\varphi, \\ \ddot{z} &= \mu(z - a) + 2\omega\dot{x}\cos\varphi - g; \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

diese Gleichungen liefern ein Integral

$$v^2 = h - 2gz.$$

Eliminieren wir die unbekannte Funktion μ von x, y, z, t aus den beiden ersten Gleichungen, so folgt

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 2\omega y\dot{z}\cos\varphi - 2\omega\sin\varphi(x\dot{x} + y\dot{y})$$

oder

$$\frac{d}{dt}[x\dot{y} - y\dot{x} + \omega\sin\varphi(x^2 + y^2)] = 2\omega y\dot{z}\cos\varphi. \tag{18}$$

Ist $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, d. h. die Beobachtung an einem der beiden Pole gemacht, so erhalten wir hieraus sofort ein zweites Integral der Gleichungen (17). Wir wollen nun vom Punkte M ausgehend längs eines Meridians an den Pol wandern, indem wir das Koordinatensystem mitführen. Wir finden dann zunächst

$$x\dot{y} - y\dot{x} \pm \omega(x^2 + y^2) = c,$$

d. h. wenn wir die Beziehungen des § 5 verwenden,

$$r^2\dot{\theta} \pm \omega r^2 = c.$$

Wir können weiter ähnlich wie in jenem Paragraphen verfahren und das Problem auf Quadraturen zurückführen. Kürzer können wir aber folgendermaßen zum Ziel gelangen. Wir beziehen die Lage des bewegten Punktes auf die z-Achse und ein Paar fester Achsen ξ, η welche gegen die Achsen x, y eine gleichförmige Rotation der Winkelgeschwindigkeit ω von Osten nach Westen, nämlich entgegengesetzt dem Sinne der Erdrotation, ausführen werden. Zur Zeit t wird die ξ-Achse mit der x-Achse, wenn beide zur Zeit $t = 0$ zusammenfallen, den Winkel ωt bilden, und demnach wird

$$\xi + i\eta = (x + iy)e^{\pm i\omega t}.$$

Andererseits liefern die Gleichungen (17) für $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = \mu(x + iy) \mp 2i\omega(\dot{x} + i\dot{y}),$$
$$\ddot{z} = \mu(z - a) - g,$$

mithin wird

$$\ddot{\xi} + i\ddot{\eta} = (\mu - \omega^2)(\xi + i\eta)$$

und, wenn wir ω^2 vernachlässigen

$$\ddot{\xi} + i\ddot{\eta} = \mu(\xi + i\eta), \quad \ddot{z} = \mu(z - a) - g;$$

diese Gleichungen fallen aber mit den Gleichungen für das sphärische Pendel zusammen, wir finden also:

Die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Kugel, die sich an einem der beiden Pole befindet und mit der Erde beweglich ist, ist bei Berücksichtigung der Erdrotation identisch mit der Bewegung eines schweren Punktes auf derselben Kugel, wenn man diese als nicht mit der Erde beweglich voraussetzt und auf die Erdrotation keine Rücksicht nimmt.

Wenn insbesondere die Bewegung in einer Ebene vor sich geht, z. B. in der durch die ξ-Achse bestimmten Vertikalebene, so haben wir die Bewegung eines am Pole schwingenden, einfachen Pendels, folglich:

Die Schwingungsebene eines Pendels am Pol dreht sich um die Erdachse im Sinne entgegengesetzt dem Sinne der Erdrotation in einem Tage einmal herum.

Denken wir uns jetzt die Beobachtung in der Breite φ gemacht, beschränken uns aber auf sehr kleine Schwingungen des Pendels in einer Vertikalebene, für die z und $\dot{z}$ vernachlässigt werden können, dann erhalten wir aus (18) wieder

$$x\dot{y} - y\dot{x} + \omega \sin \varphi (x^2 + y^2) = c$$

und kommen auf den vorigen Fall zurück, außer daß ω durch $\omega \sin \varphi$ ersetzt ist, also:

Die Schwingungsebene eines Pendels in der nördlichen Breite φ dreht sich in dem Sinne entgegen der täglichen Drehung der Erde mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega \sin \varphi$. *Die entgegengesetzte Drehung tritt auf der südlichen Halbkugel ein.*

Die Drehung der Schwingungsebene in einem Tag wird $360^0 \cdot \sin \varphi$. Sie ist null am Äquator, am größten an den Polen; in der Breite von 50^0 wird sie etwa 276^0, d. h. die Schwingungsebene dreht sich um etwa $11\frac{1}{2}'$, in der Zeitminute.

Auf dieser Theorie beruht der berühmte Foucaultsche Pendelversuch.[1])

Übungsbeispiele.

1. Aufgabe. *Unter der Einwirkung einer Zentralkraft, die eine bloße Funktion der Entfernung ist, beschreibt ein Punkt einen Kreis vom Radius a. Nun wird in einem gegebenen Augenblick die Richtung der Bewegung plötzlich unendlich wenig geändert; man soll die dann eintretende veränderte Bewegung untersuchen.*

---

1) Vgl. Recueil des travaux scientifiques de L. Foucault, Paris 1878, p. 378, Revue scientifique (4) Vol. 18, 1902, p. 548. Die Drehung der Schwingungsebene des Pendels war schon von den Mitgliedern der Accademia del Cimento im Jahre 1661 beobachtet worden (Atti e Memorie inedite dell' Accademia del Cimento pubbl. da Targioni-Tozzetti, 1780, p. 389, 669). Besondere historische Einzelheiten finden sich bei Bertelli, *Ricerche sui piccoli e spontanei moti dei pendoli*, Buoncompagni Bollet. di Bibliografia t. 6, p. 1 (1872); Genocchi, *Rassegna di scritti intorno alle deviazioni dei pendoli e alla sperienza del Foucault*, ebenda t. 15, p. 631 (1882). Die Gleichungen, auf denen die Theorie des Foucaultschen Versuches beruht, stammen von Poisson, *Mémoire sur le mouvement des projectiles dans l'air en ayant égard à la rotation de la terre*, Journal de l'école polytechnique, Cah. 26, p. 1 (1838).

Auflösung. Wir nehmen die Masse des Punktes $= 1$ an. Aus den beiden Gleichungen

$$r^2\dot{\theta} = c, \quad \ddot{r} = f(r) + \frac{c^2}{r^3}$$

folgt, da $\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} = -\frac{1}{c}\frac{dr}{dt}$ und $\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} = -\frac{r^2}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}$ wird, für

$$u = \frac{1}{r}, \quad \varphi(u) = -r^2 f(r)$$

sofort

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{c^2}\varphi(u). \tag{a}$$

Soll die Bahn ein Kreis mit dem Radius a sein, so muß für $b = \frac{1}{a}$ $u = b$ werden, also

$$b = \frac{1}{c^2}\varphi(b),$$

und außerdem wird $c = av_0 = \frac{v_0}{b}$.

Wir verändern nun den Winkel $\frac{\pi}{2}$, den die Richtung der Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkte mit dem Radiusvektor bildet, in $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$, wobei ε sehr klein ist. Dann wird die in einer darauf folgenden sehr kurzen Zeit dt von dem Radiusvektor durchstrichene Fläche $av_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)dt = c\cos\varepsilon\, dt$. Wir wollen außerdem setzen

$$u = b + \varrho, \quad \text{also } r = a - a^2\varrho$$

und die sehr kleine Größe ϱ als Funktion von θ betrachten.

Vernachlässigen wir dann die höheren Potenzen von ε und ϱ, so ergibt sich

$$\frac{1}{c^2}\varphi(u) = b + \frac{b\varphi'(b)}{\varphi(b)}\varrho,$$

indem wir auf der rechten Seite c^2 durch seinen Wert $\varphi(b) : b$ ersetzen. So erhalten wir aus (a)

$$\frac{d^2\varrho}{d\theta^2} + \varrho\left[1 - \frac{b\varphi'(b)}{\varphi(b)}\right] = 0. \tag{b}$$

Wir nehmen zunächst

$$1 - \frac{b\varphi'(b)}{\varphi(b)} = k^2,$$

also > 0, an und erhalten dann als Lösung der Differentialgleichung (b) sofort

$$\varrho = A \sin k(\theta - \theta_0).$$

Die Konstanten A und θ_0 bestimmen sich daraus, daß für den Winkel $\theta = 0$ die Abweichung von der kreisförmigen Bahn beginnen möge, also

$$\text{für } \theta = 0: \quad \varrho = 0, \quad \frac{d\varrho}{d\theta} = -\frac{1}{a^2}\frac{dr}{d\theta} = b\varepsilon$$

werden soll. So finden wir

$$\varrho = \frac{b\varepsilon}{k} \sin k\theta,$$

und

$$r = a\left(1 - \frac{\varepsilon}{k} \sin k\theta\right).$$

Der Wert von r bleibt zwischen den Grenzen $a\left(1 - \frac{\varepsilon}{k}\right)$ und $a\left(1 + \frac{\varepsilon}{k}\right)$, die Bahn weicht also von der kreisförmigen sehr wenig ab und oszilliert zwischen zwei sehr nahe liegenden konzentrischen Kreisen hin und her. Ist dagegen

$$1 - \frac{b\varphi'(b)}{\varphi(b)} \leqq 0,$$

so liefert die Differentialgleichung (b) keine periodische Lösung, die Bewegung des Punktes hört also auf stationär zu sein, er rückt vielmehr dem Zentrum unausgesetzt näher oder ferner.

Wird insbesondere $f(r) = \mu \cdot r^n$, also $\varphi(u) = -\mu \cdot u^{-n-2}$, so ergibt sich

$$1 - \frac{b\varphi'(b)}{\varphi(b)} = n + 3,$$

mithin erhalten wir eine stationäre Bewegung, so lange $n + 3 > 0$.

Vgl. Thomson & Tait, *Natural Philosophy*, Vol. 1, p. 417.

2. Aufgabe. *Ein durch einen schweren Punkt P gespannter und im Punkte Q befestigter Faden schwingt so, daß er sich auf eine Zykloide mit horizontaler Grundlinie, die in Q eine Spitze hat, auf- und abwickelt (Zykloidenpendel). Die eintretende Bewegung des Punktes P zu untersuchen.*

Auflösung. Der Punkt P bewegt sich auf der Zykloide, welche die Evolvente der gegebenen Zykloide ist. Denken wir uns den erzeugenden Kreis dieser Evolvente in der Lage gezeichnet, in der er den Punkt P liefert und nennen C, M die Endpunkte seines verti-

kalen Durchmessers, O den Scheitel, A die Spitze der Zykloide. Dann ist die Bewegung des Punktes P nach M hin gerichtet, also verhält sich die Tangentialkomponente der Kraft zu der Schwerkraft mg selbst wie PM zu CM. Es wird aber infolge der Evolventeneigenschaft die Strecke PR gleich dem Zykloidenbogen AR und da noch $PC = CR$ ist, CR die Hälfte des Bogens AR und analog PM die Hälfte des Bogens $PQ = s$; ist also $l = 2\,CM$ der vierfache Radius des rollenden Kreises, also gleich QO, d. h. gleich der Pendellänge, so wird die Tangentialkomponente der Schwerkraft

$$= mg\,\frac{s}{l} = mk^2 s,$$

Fig. 12.

wenn wir $k^2 = g : l$ setzen. Demnach wird die Gleichung der Bewegung

$$\ddot{s} + k^2 s = 0,$$

und soll für $t = 0$ auch $s = 0$, d. h. der bewegliche Punkt in O sein, so wird das Integral dieser Differentialgleichung

$$s = c \sin kt.$$

Die Schwingungen sind daher isochron und ihre Periode ist

$$\frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Die Zykloide ist also die Tautochrone eines schweren Punktes im leeren Raum (Huyghens, *Horologium oscillatorium*, 1673).

Wir können auch umgekehrt nachweisen, daß die Zykloide die einzige tautochrone Kurve für einen schweren Punkt im leeren Raum ist, wenn wir von vornherein annehmen, daß die Kurve in einer vertikalen Ebene enthalten ist. Die Kurve muß sich von dem tiefsten Punkte nach beiden Seiten erheben, kehrt also die konkave Seite nach oben hin. Es sei O der tiefste Punkt, dessen Tangente horizontal ist. Ferner sei s die von O aus gerechnete Bogenlänge, z_0 die anfängliche Erhebung über die Tangente in O. Von dieser Anfangs-

lage läßt man den beweglichen Punkt ohne Anfangsgeschwindigkeit ausgehen, dann ergibt sich aus (7)

$$\dot{s}^2 = 2g(z_0 - z),$$

und die Zeit t, die der Punkt braucht, um den Weg bis O zu durchlaufen, wird durch die Gleichung gegeben

$$t\sqrt{2g} = \int_0^{z_0} \frac{ds}{dz} \frac{dz}{\sqrt{z_0 - z}},$$

wobei man s als Funktion von z aufzufassen hat.

Wir setzen nun wieder

$$s = \psi(z), \quad z = z_0 u$$

und finden, daß das Integral

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{z_0 u}\,\psi'(z_0 u)}{\sqrt{(1-u)u}}\,du$$

von z_0 unabhängig sein muß. Es muß also auch

$$\sqrt{z_0 u} \cdot \psi'(z_0 u)$$

von z_0 unabhängig, mithin

$$\sqrt{z} \cdot \psi'(z)$$

eine Konstante sein. Setzen wir demgemäß

$$\psi'(z) = \sqrt{\frac{2a}{z}},$$

so ergibt sich durch Integration

$$s = \sqrt{8az},$$

wobei a eine Konstante bedeutet. Die Schwingungsdauer wird für diesen Wert von s

$$T = 4t = 4\sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{z(z_0 - z)}} = 4\sqrt{\frac{a}{g}} \left[\arc\sin \frac{2z - z_0}{z_0}\right]_0^{z_0}$$

mithin

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Nennen wir α den Winkel, die die Kurventangente im Punkte P

mit der (horizontalen) x-Achse bildet, so wird

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dz}{ds} = \sin\alpha = \sqrt{\frac{z}{2a}}$$

und demnach

$$z = 2a\sin^2\alpha = a(1 - \cos 2\alpha),$$

ferner, da $ds = \frac{dz}{\sin\alpha} = 4a\cos\alpha\, d\alpha$ wird,

$$dx = \cos\alpha\, ds = 4a\cos^2\alpha\, d\alpha = 2a(1 + \cos 2\alpha)\, d\alpha,$$

woraus

$$x = a(2\alpha + \sin 2\alpha).$$

Die gefundenen Werte von x und z entsprechen aber einer Zykloide, bei der a der Radius des rollenden Kreises, O der Scheitel und der Wälzungswinkel mit 2α bezeichnet ist.

3. Aufgabe. *Die Tautochrone im widerstehenden Mittel.*

Auflösung. Es handele sich um einen schweren Massenpunkt von der Masse 1 und der Widerstand des Mittels sei dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional, also von der Form $\varkappa v^2$. Wir finden dann, indem s die Bogenlänge, x die zugehörige Abszisse bezeichnet, sofort die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2s}{dt^2} - \varkappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -g\frac{dx}{ds}. \tag{a}$$

Wir gehen nun von der Bemerkung aus, daß wenn $u = \varphi(s)$ eine eindeutige stetige Funktion der Bogenlänge ist und

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -a^2u \tag{b}$$

wird, die Schwingungen, die sich als Lösungen dieser Differentialgleichung ergeben, isochron sind. Denn die Veränderung von u hat die Periode $2\pi : a$, aber mit u kehrt auch s zu seinem Anfangswerte zurück.

Setzen wir aber in der Differentialgleichung (a)

$$s = -\frac{1}{\varkappa}\log(1 - \varkappa u), \quad \text{also } u = \frac{1 - e^{-\varkappa s}}{\varkappa},$$

so wird

$$\frac{d^2u}{dt^2} = e^{-\varkappa s}\left[\frac{d^2s}{dt^2} - \varkappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right],$$

mithin geht (a) in die Form (b) über, wenn wir

$$a^2u = ge^{-\varkappa s}\frac{dx}{ds}$$

setzen, oder

$$\varkappa \frac{dx}{ds} = \frac{a^2}{g}(e^{\varkappa s} - 1).$$

Dies ist die Differentialgleichung der gesuchten Kurve.

Vgl. Laplace, *Mécanique céleste*, Tome 1, p. 36; R. Leslie Ellis, The mathematical and other Writings, Cambridge (1863), p. 94; Appell, *Mécanique rationnelle;* Tome 1, p. 324; Jullien, *Problèmes de mécanique rationnelle,* Tome 1, p. 374, und die Monographien von C. Ohrtmann, *Le problème des tautochrones,* Rome 1875, und F. Amodeo, Avellino, 1883.

4. Aufgabe. *In einer vertikalen Ebene eine Kurve von der Beschaffenheit zu finden, daß ein schwerer Punkt P, der ohne Anfangsgeschwindigkeit von einem Punkte O ausgeht, einen beliebigen Bogen in derselben Zeit durchläuft, in der er die zugehörige Sehne durchlaufen würde.*

Auflösung. Wenn der Radiusvektor $OP = r$ einen Winkel θ mit der Vertikalen bildet, so haben wir

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2gz = 2gr\cos\theta,$$

und wenn die zugehörige Zeit, vom Anfange der Bewegung an gerechnet, t ist, so wird nach der Bedingung der Aufgabe

$$r = \tfrac{1}{2}gt^2\cos\theta.$$

Mithin ergibt sich durch Integration

$$2\sqrt{\frac{r}{\cos\theta}} = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{r\cos\theta}}.$$

Daraus finden wir wieder durch Differentiation

$$\cos\theta\, dr + r\sin\theta\, d\theta = \cos\theta\, ds = \cos\theta\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}.$$

Erheben wir die Gleichung ins Quadrat und reduzieren, so erhalten wir

$$\frac{dr}{r} = \operatorname{cotg} 2\theta \cdot d\theta$$

oder

$$d\log r = d\log\sqrt{\sin 2\theta},$$

woraus durch Integration

$$r = c\sqrt{\sin 2\theta}$$

folgt. Dies ist die Gleichung einer Lemniskate, deren Achse um

45 Grad gegen die Vertikale geneigt ist, die also eine vertikale und eine horizontale Doppelpunktstangente hat.

Dieses Problem wurde vorgelegt und behandelt von Bonati, *Nuova curva isocrona* (Raccolta ferrarese di opuscoli scientifici e letterari di autori italiani, Venezia 1781, p. 1, appendice p. 18). Malfatti fand gleichzeitig in der Schrift *Della curva cassiniana e di una nuova proprietà meccanica della quale essa è dotata,* Pavia 1781, auf synthetischem Wege die betrachtete Eigenschaft als Eigenschaft der Cassinischen Kurven, von denen die Lemniskate ein Spezialfall ist. Schließlich bewies Saladini, *Della discesa dei gravi per la lemniscata* ecc., Memorie dell'Istituto Naz. Italiano, t. I, parte 2, p. 43 (1806), daß die in Rede stehende Eigenschaft nur der Lemniskate zukommt.

5. Aufgabe. *Ein Punkt P bewegt sich auf einer Hypozykloide unter der Einwirkung einer Kraft, die nach dem Zentrum O des bei der Erzeugung der Hypozykloide auftretenden festen Kreises hin gerichtet und dem Abstande PO proportional ist. Die Bewegung zu untersuchen.*

Auflösung. Es sei A eine Spitze, D der auf diese Spitze folgende Scheitel der Hypozykloide, CD ein Durchmesser des rollenden Kreises. Wir schlagen noch um O den Kreis mit dem Radius $OM = OC^2 : OD$ und über MC als Durchmesser einen Kreis mit dem Mittelpunkt O_1, der, wenn er in dem großen Kreise um O rollt, eine zweite Hypozykloide MA beschreibt, die in ihrem Scheitel A den mittleren Kreis um O berührt und die Evolute der ersten Hypozykloide bildet. Ziehen wir nämlich durch O irgend einen Strahl, auf dem die Punkte N, E, L so liegen, daß $NO = MO$, $EO = CO$, $LO = DO$ wird, und schlagen über NE und EL als Durchmesser die Kreise, so nehmen wir auf ihnen die Punkte P und Q, die mit E in einer Geraden liegen, derart an, daß der Winkel NEQ, der gleich dem Winkel LEP ist, sich zu dem Winkel MON verhält wie $MO : MC = CO : CD$. Dann liegt P auf der ersten, Q auf der zweiten Hypozykloide, und es wird QE die Tangente der

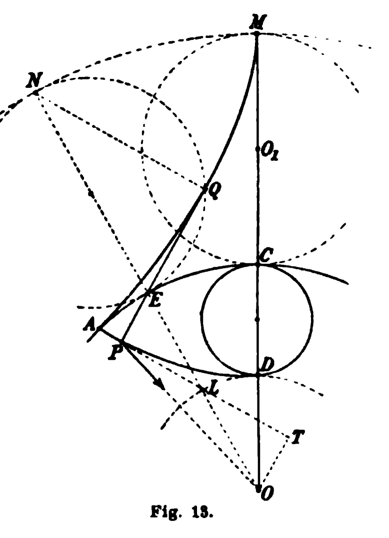


Fig. 13.

letzteren, PE die Normale der ersteren, womit in der Tat gezeigt ist, daß diese jene zur Evolute hat.

Wir zerlegen nun die Anziehung, die gleich $k^2 \cdot PO$ wird, in eine Komponente längs PQ und eine längs der Tangente PL oder PT, wobei T der Fußpunkt des aus O auf die Tangente gefällten Lotes ist. Es wird aber $PT : PL = EO : EL = CO : CD$, also konstant. Weiter wird der Bogen AQ der größeren Hypozykloide gleich dem Stück QP; weil nun $QE : QP = NE : NL = MC : MD$, also konstant ist, verhalten sich die Bogenlängen QA wie die zugehörigen Stücke QE, also auch die Bogenlängen PD wie die zugehörigen Stücke PL. Weil aber die Tangentialkomponente der Anziehungskraft gleich $k^2 \cdot PT$ und damit auch zu PL proportional wird, ergibt sich schließlich, daß diese Komponente der Bogenlänge PD proportional ist, und daraus folgt, daß die Schwingungen tautochron sind.

Setzen wir $OC = R$, $MC = 2r$, so wird $CD = 2r\dfrac{R}{R+2r}$, $MD = \dfrac{4r(R+r)}{R+2r}$ und weiter

$$PL : PT = 2r : R + 2r, \quad PL : \text{Bogen } PD = QE : \text{Bogen } QA$$
$$= MC : MD = R + 2r : 2(R + r)$$

also, wenn Bogen $PD = s$,

$$a^2 = \frac{k^2 \cdot PT}{s} = k^2 \frac{R+2r}{2r} \cdot \frac{R+2r}{2(R+r)}$$

oder

$$a^2 = k^2 \frac{(R+2r)^2}{4r(R+r)} = k^2 \frac{MO}{MD}.$$

Dann wird die wirksame Tangentialkraft gleich $a^2 s$ und die Periode der Schwingungen $2\pi : a$.

Vgl. Newton, Philosophiae nat. principia math. Lib. I, Prop. LI.

6. Aufgabe. *Ein Punkt P von der Masse 1 bewegt sich auf einem Kreise und wird von einem Punkte O dieses Kreises angezogen. Wie muß die Anziehung, die eine Funktion $\varphi(r)$ der Entfernung sein soll, beschaffen sein, damit der Druck P, den der Kreis auf den Punkt ausübt, konstant wird?*

Auflösung. Es sei die Polargleichung des Kreises für O als Pol

$$r = 2a \cos\theta.$$

Die Erhaltung der Energie liefert die Gleichung

$$v^2 = h - 2\int \varphi(r)\,dr.$$

Bilden wir anderseits die Normalkomponente der auf den Punkt P wirkenden Kräfte, so ergibt sich, da hier der Krümmungsradius $\varrho = a$ ist,

$$\frac{v^2}{a} = R + \varphi(r)\cos\theta = R + \frac{r\varphi(r)}{2a}.$$

Setzen wir die beiden so gefundenen Werte von v^2 einander gleich und differenzieren nach r, so finden wir

$$r\varphi'(r) + 5\varphi(r) = 0$$

also

$$d\log\varphi(r) = -5\,d\log r,\quad \varphi(r) = \frac{c}{r^5}.$$

7. Aufgabe. *Eine Gerade dreht sich um eine Vertikale, die sie unter dem Winkel α schneidet, mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Auf ihr ist ein schwerer Punkt von der Masse 1 beweglich; man soll dessen Bewegung untersuchen.*

Auflösung. Wir wählen die nach abwärts gerichtete Vertikale zur z-Achse, den Schnittpunkt der beiden Geraden zum Ursprung eines Koordinatensystems; ω sei die Winkelgeschwindigkeit der Drehung, $k = \operatorname{tang}\alpha$, dann haben wir die Gleichungen

$$y - x\operatorname{tang}(\omega t) = 0,\quad x^2 + y^2 - k^2z^2 = 0.$$

Die wirkende Kraft ist allein die Schwere, wir haben daher die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x} = -\lambda\operatorname{tang}\omega t + \mu x,\quad \ddot{y} = \lambda + \mu y,\quad \ddot{z} = g - \mu k^2 z,$$

aus denen die unbestimmten Koeffizienten λ, μ zu eliminieren sind. Multiplizieren wir die Gleichungen der Reihe nach mit x, y, z und addieren, so ergibt sich

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} + z(\ddot{z} - g) = 0.$$

Setzen wir aber

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = kz,$$

so wird

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2\omega^2 + \dot{r}^2,$$

ferner

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} \text{ und } r\ddot{r} + \dot{r}^2 = x\ddot{x} + y\ddot{y} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

oder

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} = r\ddot{r} - r^2\omega^2 = k^2z(\ddot{z} - z\omega^2)$$

mithin

$$(1 + k^2)\ddot{z} - k^2\omega^2 z - g = 0$$

Setzen wir weiter

$$z + \frac{g}{k^2\omega^2} = u, \quad m = \omega \sin \alpha = \frac{k\omega}{\sqrt{1+k^2}},$$

so wird die gefundene Differentialgleichung

$$\ddot{u} = m^2 u.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$u = A \operatorname{Cof} m(t - t_0)$$

und demnach wird

$$z = -\frac{g}{k^2\omega^2} + A \operatorname{Cof} m(t - t_0).$$

Legen wir durch die Vertikale zwei Ebenen, eine durch die Anfangslage des bewegten Punktes und eine durch seine Lage zur Zeit t, und nennen ihren Winkel θ, so haben wir

$$t - t_0 = \frac{\theta}{\omega}$$

und somit

$$z = -\frac{g}{k^2\omega^2} + A \operatorname{Cof} (\sin \alpha \cdot \theta)$$

für die Gleichung der Bahnkurve, welche die Form einer konischen Spirale hat.

8. Aufgabe. *Das ballistische Problem im engeren Sinne: Ein schwerer Punkt von der Masse m wird unter dem Elevationswinkel α mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 im widerstehenden Mittel geworfen, welches ist seine Bewegung?*

Auflösung. Wenn v die Geschwindigkeit des Punktes in einem gegebenen Augenblicke der Größe nach bezeichnet, so nehmen wir

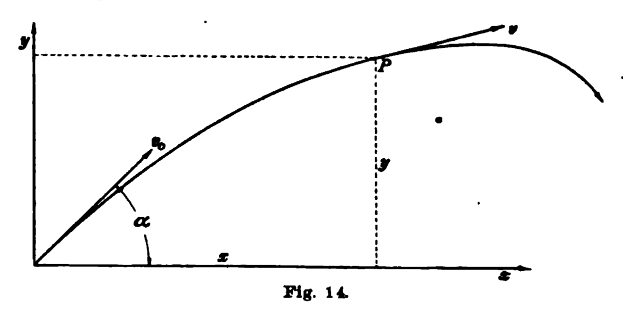


Fig. 14.

die Widerstandskraft gleich $mg\frac{v^2}{k^2}$ und der Bewegung entgegengesetzt gerichtet an. Dann werden die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\frac{v^2}{k^2}\frac{dx}{ds}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g\frac{v^2}{k^2}\frac{dy}{ds} - g. \tag{a}$$

Wir setzen nun $\frac{dy}{dx} = p$, also $\frac{dy}{ds} = p\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{dt} = p\frac{dx}{dt}$, und mithin

$$\frac{d^2y}{dt^2} = p\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dp}{dt}.$$

Demnach folgt aus den beiden Grundgleichungen, wenn wir die erste mit p multiplizieren und von der zweiten abziehen,

$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dp}{dt} = -g. \tag{b}$$

Die erste der Gleichungen (a) läßt sich aber direkt integrieren, wenn wir in ihr $v = \frac{ds}{dt}$ einsetzen und links und rechts durch $\frac{dx}{dt}$ dividieren. Es ergibt sich dann

$$\log\frac{dx}{dt} = -\frac{g}{k^2}s + \log(v_0 \cos\alpha).$$

Für $s = 0$ muß nämlich $\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha$ werden. So folgt

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha\, e^{-\frac{g}{k^2}s} \tag{c}$$

und dann aus (b)

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{g}{v_0 \cos\alpha}\, e^{\frac{g}{k^2}s}, \tag{d}$$

also durch Division dieser beiden Werte

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{g}{(v_0 \cos\alpha)^2}\, e^{\frac{2g}{k^2}s}. \tag{e}$$

Die Gleichung (c) zeigt, daß die horizontale Komponente der Geschwindigkeit mehr und mehr abnimmt, die Bewegungsrichtung sich also der Vertikalen asymptotisch nähert. Setzen wir in (e) ein $dx = ds : \sqrt{1+p^2}$, so folgt

$$-\sqrt{1+p^2}\,dp = \frac{g}{(v_0 \cos\alpha)^2}\, e^{\frac{2g}{k^2}s}\,ds.$$

Diese Gleichung ist sofort integrierbar. Für die Grenzen wählen wir die Werte 0 und s; das Integral der linken Seite wird dann $\frac{1}{2}(\varphi(p_0) - \varphi(p) + c^2)$, wenn wir

$$\varphi(p) = p\sqrt{1+p^2} + \log(p + \sqrt{1+p^2}),$$

ferner $p_0 = \operatorname{tang} \alpha$ und $c = \frac{k}{v_0 \cos \alpha}$ setzen. Somit ergibt sich

$$e^{\frac{2g}{k^2}s} = \left(\frac{v_0 \cos \alpha}{k}\right)^2 \{\varphi(p_0) - \varphi(p) + c^2\}. \tag{f}$$

Setzen wir hierin für die linke Seite ein

$$-\frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \frac{dp}{dx} \quad \text{oder} \quad -\frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} p \frac{dp}{dy}$$

und integrieren aufs neue, so folgt

$$x = \frac{k^2}{g} \int_p^{p_0} \frac{dp}{\varphi(p_0) - \varphi(p) + c^2}, \quad y = \frac{k^2}{g} \int_p^{p_0} \frac{p\,dp}{\varphi(p_0) - \varphi(p) + c^2}; \tag{g}$$

schließlich finden wir auf analoge Art

$$t = \frac{k}{g} \int_p^{p_0} \frac{dp}{\sqrt{\varphi(p_0) - \varphi(p) + c^2}}. \tag{h}$$

Damit ist das ganze Problem auf Quadraturen zurückgeführt. An der höchsten Stelle der Bahn wird $p = 0$, also ergeben sich die Koordinaten des höchsten Punktes

$$x_1 = \frac{k^2}{g} \int_0^{p_0} \frac{dp}{\varphi(p_0) - \varphi(p) + c^2}, \quad y_1 = \frac{k^2}{g} \int_0^{p_0} \frac{dp}{\varphi(p_0) - \varphi(p) + c^2}.$$

Da $v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = (1 + p^2) v_0^2 \cos^2 \alpha \, e^{-\frac{2g}{k^2}s}$ wird, haben wir noch

$$v^2 = k^2 \frac{1 + p^2}{\varphi(p_0) - \varphi(p) + c^2}.$$

Wird s mit der Zeit sehr groß, so erlangt p und damit $\varphi(p)$ sehr große negative Werte, derart, daß sich $\frac{\varphi(p)}{p^2}$ der Grenze -1 nähert. Damit ergibt sich k als Grenzwert von v: Die Geschwindigkeit nähert sich also asymptotisch einem konstanten Wert.

Vgl. Euler, Mémoires de l'Académie de Berlin 1753, p. 348 u. auch Poisson, Traité de mécanique, t. I, p. 399, Paris 1833.

9. Aufgabe. *Das vorige Problem unter der speziellen Voraussetzung zu behandeln, daß der Elevationswinkel α sehr klein ist.*

Auflösung. Unter dieser Voraussetzung kann $ds = dx$ gesetzt werden und demnach haben wir hier die Gleichung

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{g}{(v_0 \cos \alpha)^2} e^{\frac{2g}{k^2}x},$$

die integriert liefert

$$p = \operatorname{tang} \alpha - \frac{k^2}{2(v_0 \cos \alpha)^2}\left(e^{\frac{2g}{k^2}x} - 1\right),$$

denn für $x = 0$ muß $p = \operatorname{tang} \alpha$ werden. Setzen wir $p = dy/dx$ und integrieren aufs neue, so finden wir mit Rücksicht auf die Anfangsbedingung $x = 0$, $y = 0$

$$y = x \operatorname{tang} \alpha + \frac{k^2}{2(v_0 \cos \alpha)^2}\left[x - \frac{k^2}{2g}\left(e^{\frac{2g}{k^2}x} - 1\right)\right].$$

Da ferner hier

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha \, e^{-\frac{g}{k^2}x}$$

wird, ergibt sich mit Rücksicht darauf, daß $x = 0$ für $t = 0$ sein soll,

$$t = \frac{k^2}{g} \frac{e^{\frac{g}{k^2}x} - 1}{v_0 \cos \alpha}.$$

10. Aufgabe. *Die ballistische Kurve für eine Widerstandskraft, die von der Form*

$$R = g(a + bv^n)$$

ist, zu finden.

Auflösung. Wir zerlegen die Beschleunigung in die Tangential- und Normalkomponente, nehmen die Masse gleich 1, nennen v die Geschwindigkeit, φ den Winkel, den die Tangente der Bahn mit dem Horizonte einschließt, dann wird

$$\frac{dv}{dt} = -R - g \sin \varphi, \quad \frac{v^2}{\varrho} = g \cos \varphi. \tag{a}$$

Es wird aber

$$\varrho = -\frac{ds}{d\varphi} = -\frac{v\,dt}{d\varphi},$$

wenn man beachtet, daß φ mit wachsendem s beständig abnimmt, man also, um einen positiven Wert zu erhalten, vor den Differentialquotienten das negative Vorzeichen setzen muß. So folgt aus der zweiten Gleichung (a)

$$v\frac{d\varphi}{dt} = -g \cos \varphi \tag{b}$$

und eliminiert man aus dieser Gleichung und der ersten Gleichung (a) die Zeit, so wird

$$\cos\varphi \cdot \frac{dv}{d\varphi} - \sin\varphi \cdot v = \frac{R}{g} v. \tag{c}$$

Setzt man hierin für $\frac{R}{g}$ seinen Wert $a + bv^n$ ein, so erhält man

$$\cos\varphi \frac{dv}{d\varphi} - (a + \sin\varphi)v = bv^{n+1}$$

und substituiert man $w = \frac{1}{v^n}$, so findet man die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dw}{d\varphi} + \frac{n(a + \sin\varphi)}{\cos\varphi} w = -\frac{nb}{\cos\varphi}.$$

Bei der Integration hat man zu beachten, daß

$$\int \frac{a + \sin\varphi}{\cos\varphi} d\varphi = -a \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - \log\cos\varphi = -\log f(\varphi)$$

wird, wenn

$$f(\varphi) = \cos\varphi \left\{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right\}^a$$

gesetzt wird. Dann wird die Differentialgleichung

$$f(\varphi)^{-n} \frac{dw}{d\varphi} + \frac{d(f(\varphi)^{-n})}{d\varphi} w = -\frac{nb}{f(\varphi)^n \cos\varphi}$$

und demnach wird

$$f(\varphi)^{-n} w = C - nb \int \frac{d\varphi}{f(\varphi)^n \cos\varphi}$$

oder

$$\frac{1}{v^n} = f(\varphi)^n \left\{C - nb \int \frac{d\varphi}{f(\varphi)^n \cos\varphi}\right\}.$$

Nehmen wir $v_0 = 0$, tritt also der Punkt aus der Ruhelage sich selbst überlassen heraus, so muß, damit er überhaupt fällt, $R < g$, also muß allgemein $a < 1$ sein. Anderseits sind a, $b > 0$, da es sich stets um eine der Bewegung entgegenwirkende Kraft handelt. Ebenso ist auch $n > 0$, da der Widerstand mit der Geschwindigkeit zunehmen soll.

Da $a < 1$ ist, nähert sich $f(\varphi)$ dem Werte 0, wenn φ sich dem Werte $-\frac{\pi}{2}$ nähert, denn setzen wir in

$$f(\varphi) = \cos\varphi \left(\frac{\cos\varphi}{1 + \sin\varphi}\right)^a$$

$\varphi = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon$, so wird in erster Annäherung $f(\varphi) = 2^a \varepsilon^{1-a}$. Der Ausdruck $nf(\varphi)^n \int \frac{d\varphi}{f(\varphi)^n \cos\varphi}$ nähert sich dann aber der Grenze

$$\frac{nf(\varphi)^{-n}}{\cos\varphi} : \frac{df(\varphi)^{-n}}{d\varphi} = \frac{n}{\cos\varphi} : \frac{d\log(f(\varphi)^{-n})}{d\varphi} = \frac{n}{\cos\varphi} : \frac{n(a+\sin\varphi)}{\cos\varphi}$$
$$= 1 : a + \sin\varphi$$

also der Grenze $-1 : 1 - a$, und demnach hat v eine endliche Grenze. Aus (b) folgt aber

$$gt = -\int \frac{v\,d\varphi}{\cos\varphi}$$

und dies wird unendlich groß für $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Beachtet man schließlich, daß

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\varphi, \quad \frac{dy}{dt} = v\sin\varphi$$

und sonach wegen $\cos\varphi = -\frac{v}{g}\frac{d\varphi}{dt}$

$$gx = -\int v^2 d\varphi, \quad gy = -\int v^2 \operatorname{tang}\varphi\, d\varphi$$

wird, so sieht man, daß, wenn φ sich der Grenze $-\frac{\pi}{2}$ nähert, x einem endlichen Werte zustrebt, während y über alle Grenzen wächst. Also finden wir:

Die Bahn hat eine vertikale Asymptote, der sich der Punkt mit immer mehr gleichförmig werdender Bewegung nähert.

In dem besonders interessanten Falle, wo $a = 0$ ist, kommt man rascher zum Ziel auf dem folgenden Wege.

Man setze

$$u = v\cos\varphi,$$

so ergibt sich sofort aus (c)

$$\frac{du}{d\varphi} = b\left(\frac{u}{\cos\varphi}\right)^{n+1}$$

und daraus

$$\frac{1}{u^n} - \frac{1}{u_0^n} = -nb\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi^{n+1}}$$

oder

$$= -nb\int^{p} (\sqrt{1+p^2})^{n-1} dp,$$

wenn wir $p = \operatorname{tang} \varphi$ setzen. Darauf finden wir der Reihe nach

$$gt = -\int u\,dp,$$

$$gx = -\int u^2\,dp, \quad gy = -\int u^2 p\,dp.$$

Joh. Bernoulli hat in den Acta Eruditorum 1719, p. 216, zuerst den Fall betrachtet, wo der Widerstand einer beliebigen Potenz von v proportional ist. Eine vollständige Behandlung gab d'Alembert, Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides 1744, p. 359, und darauf Legendre, Académie de Berlin, Prix de 1782, Paris 1846, p. 59, endlich Jacobi, Journal für Math. Bd. 24, 1842, S. 5, Ges. Werke Bd. 4 S. 287. Neuerdings hat Siacci 14 weitere Funktionen bekannt gegeben, bei welchen sich das Problem auf Quadraturen zurückführen läßt: Comptes Rendus T. 132, p. 1175 (1901), T. 133, p. 381 (1901) und Rivista d'artigl. e gen. vol. 3, p. 5, vol. 4, p. 5 (1901).

11. Aufgabe. *Ein Punkt wird von einem festen Zentrum nach dem Newtonschen Gesetze angezogen; seine Masse ist eine lineare Funktion der Zeit. Die Bewegung zu bestimmen.*

Auflösung. Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{P} + \varkappa^2 \frac{P - O}{r^3} = 0.$$

Dabei ist

$$m = a + bt, \quad r = \operatorname{mod}(P - O).$$

Machen wir die Substitution

$$P - O = m(Q - O), \quad dt = m^2\,d\tau,$$

so ergibt sich

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{1}{m^3}\frac{d^2Q}{d\tau^2},$$

und demnach erhalten wir, für $\varrho = \operatorname{mod}(Q - O)$,

$$\frac{d^2Q}{d\tau^2} + \varkappa^2 \frac{Q - O}{\varrho^3} = 0.$$

Die Bewegung des Punktes Q ist also dieselbe wie die eines Punktes von konstanter Masse.

Dieselbe Substitution $P - O = m(Q - O)$ führt auch zum Ziele in dem allgemeineren Falle, wo

$$m = \sqrt{\alpha + \beta t + \gamma t^2}.$$

Man setze dann

$$dt = m^2 d\tau, \quad n = \tfrac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma$$

und erhält

$$\frac{d^2 Q}{d\tau^2} + \varkappa^2 \frac{Q - O}{\varrho^3} - n(Q - O) = 0.$$

Der Punkt Q ist demnach aufzufassen als ein Punkt von der konstanten Masse 1, der sich unter der Einwirkung zweier Zentralkräfte bewegt: die eine ist umgekehrt proportional dem Quadrat der Distanz, die andere direkt proportional der Distanz selbst. Dies ist ein besonderer Fall eines berühmten Problems. Vgl. Meschtschersky, Über die Integration der Bewegungsgleichungen im Problem zweier Körper von veränderlicher Masse, Astronomische Nachrichten Bd. 159, S. 229 (1902).

12. Aufgabe. *Die Gleichungen für die Bewegung eines freien Punktes mit denen für das Gleichgewicht eines biegsamen Fadens zu vergleichen.*

Auflösung. Die Gleichung

$$m\ddot{P} = F$$

kann man, indem man sie durch $m\frac{ds}{dt} = mv$ dividiert und beachtet, daß $\dot{P} = vt$ ist, auch in der Form schreiben

$$\frac{F}{mv} - \frac{d(vt)}{ds} = 0.$$

Vergleichen wir dies mit der Gleichung

$$F + \frac{d(\tau t)}{ds} = 0$$

für das Gleichgewicht eines biegsamen Fadens, so sieht man, daß die Bahnkurve des bewegten Punktes und die Gleichgewichtskurve des Fadens sich entsprechen, wenn man die Spannung τ durch die Geschwindigkeit v und die spannende Kraft F durch die bewegende Kraft $-m\tau F$ ersetzt. So folgt z. B. daß ein materieller Punkt, der einer der Geschwindigkeit proportionalen vertikalen Kraft unterworfen ist, eine Kettenlinie beschreibt.

13. Aufgabe. *Das Problem der Brachistochrone.*

Auflösung. Die Frage lautet: Ein Punkt bewegt sich unter der Einwirkung einer Kraft, die ein Potential U besitzt, auf einer vorgeschriebenen Kurve. Wie muß die Kurve beschaffen sein, damit die Zeit, die der Punkt gebraucht, um von einem gegebenen Anfangs-

punkte zu einem gegebenen Endpunkte zu gelangen, ein Minimum wird?

Wir nehmen die Masse des Punktes = 1 an, dann ergibt die Erhaltung der kinetischen Energie die Gleichung

$$v^2 = h - 2U,$$

und da $v = ds : dt$, folgt

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{h - 2U}} = \int V ds,$$

wenn wir $V = \frac{1}{v} = (h - 2U)^{-\frac{1}{2}}$ setzen. Wir variieren diesen Integralausdruck und erhalten als Bedingung des Minimums

$$\int \delta V ds + \int V \delta ds = 0$$

oder ausgeführt

$$\int \left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right) ds + \int V\left(\frac{dx}{ds}\frac{d\delta x}{ds} + \frac{dy}{ds}\frac{d\delta y}{ds} + \frac{dz}{ds}\frac{d\delta z}{ds}\right) ds = 0;$$

durch partielle Integration des zweiten Integrals folgt

$$\int \left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right) ds - \int \left(\frac{d(Vx')}{ds}\delta x + \frac{d(Vy')}{ds}\delta y + \frac{d(Vz')}{ds}\delta z\right) ds = 0,$$

wobei die Integration von dem festen Anfangspunkt zu dem festen Endpunkt zu erstrecken ist, und daraus ergeben sich die Bedingungsgleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d(Vx')}{ds} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d(Vy')}{ds} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{d(Vz')}{ds} = 0.$$

Multipliziert man die Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{dx}{ds} = x'$, $\frac{dy}{ds} = y'$, $\frac{dz}{ds} = z'$, so ergibt sich eine identisch erfüllte Gleichung. Also ist die dritte der vorstehenden Gleichungen eine Folge der beiden ersten. Die Gleichungen kann man aber auch schreiben

$$\frac{1}{v^3}X = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{v}\frac{dx}{ds}\right), \quad \frac{1}{v^3}Y = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{v}\frac{dy}{ds}\right), \quad \frac{1}{v^3}Z = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{v}\frac{dz}{ds}\right),$$

denn es ist $V = \frac{1}{v}$, $X = \frac{\partial u}{\partial x} = -v\frac{\partial v}{\partial x}$, $Y = -v\frac{\partial v}{\partial y}$, $Z = -v\frac{\partial v}{\partial z}$. Beachten wir nun, daß $v\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt}$ wird und die Vektoren mit den Komponenten $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ und $\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2z}{ds^2}$ sich in der früheren Bezeichnung $\mathbf{t}$ und $\frac{1}{\varrho}\mathbf{n}$ schreiben, nennen wir ferner $\mathbf{F}$ den Kraftvektor mit den Komponenten X, Y, Z, so ergibt sich

$$\mathbf{F} = \frac{dv}{dt}\mathbf{t} - \frac{v^2}{\varrho}\mathbf{n},$$

und da wir allgemein

$$\mathbf{F} = F_t\mathbf{t} + F_n\mathbf{n} + F_b\mathbf{b}$$

haben, folgt aus den Gleichungen (6)

$$F_b = -R_b = 0, \quad F_n = -\tfrac{1}{2}R_n.$$

Die ganze Reaktion fällt also in die Hauptnormale $\mathbf{n}$.

Die gefundene Gleichung sieht der Gleichung für die von einem freien Massenpunkte unter der Einwirkung einer Kraft $\mathbf{F}'$ beschriebenen Kurve

$$\mathbf{F}' = \frac{dv'}{dt'}\mathbf{t} + \frac{v'^2}{\varrho}\mathbf{n}$$

sehr ähnlich. Wir können die beiden Gleichungen aus einander folgen lassen, indem wir

$$v = \frac{1}{v'}, \qquad dt = v'^2 dt', \qquad \mathbf{F} = -\frac{1}{v'^4}\mathbf{F}'$$

setzen. Die Brachistochrone wird also unter der Einwirkung einer entgegengesetzt gerichteten Kraft $\mathbf{F}'$, die gegen die Kraft $\mathbf{F}$ im Verhältnis $1 : v^4$ verändert ist, mit einer Geschwindigkeit, die das Reziproke der früheren ist, frei durchlaufen.

Wir spezialisieren das Problem auf die Bewegung eines schweren Massenpunktes. Dann wird

$$v^2 = h - 2gz.$$

Die Kraft $\mathbf{F}$ ist vertikal nach abwärts gerichtet und seine Intensität ist gleich g. Die Kraft $\mathbf{F}'$ ist also vertikal nach aufwärts gerichtet und hat die Intensität

$$g : (h - 2gz)^2.$$

Unter der Einwirkung dieser Kraft wird die Brachistochrone frei beschrieben. Sie muß also in einer vertikalen Ebene enthalten sein.

Wir können daher $y = 0$ annehmen und finden als die Differentialgleichung sofort, da $X = 0$ wird,

$$\frac{1}{v}\frac{dx}{ds} = c \text{ oder } \frac{dx}{ds} = c\sqrt{h - 2gz}.$$

Daraus folgt $\frac{dz}{ds} = \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{ds}\right)^2} = \sqrt{1 - c^2h + 2c^2gz}$ und somit

$$\frac{dx}{dz} = \sqrt{\frac{a-z}{b+z}},$$

wenn wir $a = \frac{h}{2g}$, $b = \frac{1 - c^2h}{2c^2g}$ setzen.

Um zu integrieren, führen wir einen Winkel ω ein durch die Gleichung

$$z = \frac{a-b}{2} - \frac{a+b}{2}\cos\omega,$$

dann wird

$$a - z = \frac{a+b}{2}(1 + \cos\omega), \quad b + z = \frac{a+b}{2}(1 - \cos\omega),$$

$$dz = \frac{a+b}{2}\sin\omega\, d\omega,$$

und demnach die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{d\omega} = \frac{a+b}{2}(1 + \cos\omega),$$

indem man beachtet, daß $\sqrt{\frac{1+\cos\omega}{1-\cos\omega}} = \frac{1+\cos\omega}{\sin\omega}$ ist. Durch Integration ergibt sich also

$$x + d = \frac{a+b}{2}(\omega + \sin\omega),$$

wodurch in Verbindung mit

$$z + b = \frac{a+b}{2}(1 - \cos\omega)$$

die Parameterdarstellung der Kurve gefunden ist. Diese Kurve ist eine Zykloide.

Vgl. Pascal, Variationsrechnung, S. 172, Kneser, Variationsrechnung, S. 37, 248, über das Geschichtliche Loria, Spezielle ebene Kurven, S. 474.

14. Aufgabe. *Die Bewegung eines schweren Punktes aufe iner Rotationsfläche mit vertikaler Achse zu untersuchen.*

Auflösung. Wie beim sphärischen Pendel haben wir zwei Gleichungen:

$$v^2 = 2g(z_0 - z), \quad r^2 \frac{d\theta}{dt} = c.$$

Hierbei ist $r^2 = x^2 + y^2$, und es wird

$$0 < c < vr.$$

Betrachten wir die Fläche dritter Ordnung γ, deren Gleichung lautet

$$r^2(z_0 - z) = \frac{c^2}{2g},$$

dann muß das r für den beweglichen Punkt größer sein als das r der gleich hohen Punkte der Fläche γ. Diese Fläche teilt aber die gegebene Fläche in Zonen, die durch Kreise begrenzt sind. Die Bewegung bleibt also auf die Zonen beschränkt, die weiter von der Achse entfernt sind, als die entsprechenden Zonen von γ, und in einer dieser Zonen haben wir eine Bewegung, die der des sphärischen Pendels analog ist. Wenn γ die gegebene Fläche berührt, so findet in diesem Berührungskreis eine gleichförmige Bewegung statt.

Kobb, Acta mathematica, Bd. 10, S. 89 (1887), hat außer Kegel, Kugel und Rotationsparaboloid noch zwei andere Flächen angegeben, für welche sich das Problem auf elliptische Quadraturen reduziert, vgl. dazu Staude, ebenda Bd. 11, S. 303 (1888). Stäckel fand eine sechste Fläche: Math. Annalen Bd. 41, S. 571 (1893). Salkowski, Zur Bewegung eines Punktes auf Rotationsflächen, Diss. Jena 1904, fand endlich eine siebente, deren Gleichung lautet

$$r^6 + 2a^6 = 8a^3r^2z$$

und zeigte, daß es keine weiteren gibt.

15. Aufgabe. *Das Problem der stationären Bewegung.*

Auflösung. Eine Bewegung heißt stationär, wenn die Lage des bewegten Punktes um eine gewisse Mittellage schwankt. Um in diesem Falle die Bewegungsgleichung

$$m\frac{d^2(P-O)}{dt^2} = F$$

umzuformen, gehen wir von der Identität aus

$$m\frac{d^2(P-O)}{dt^2} \times (P-O) = \tfrac{1}{2}m\frac{d^2}{dt^2}(P-O)^2 - m\left[\frac{d(P-O)}{dt}\right]^2.$$

Setzen wir hierin auf der linken Seite F ein und integrieren von 0 bis t, so ergibt sich

$$\int^{t} F \times (P - O)\, dt = \frac{m}{2}\left[\frac{d(P-O)^2}{dt}\right]_0^t - m \int^{t} \left(\frac{dP}{dt}\right)^2 dt.$$

Dividieren wir diese Gleichung durch $2t$ und denken uns entweder, die Zeit t sei eine Periode der Bewegung, so daß die Lage des Punktes P zur Zeit 0 und zur Zeit t dieselbe ist, oder die Zeit t sei sehr groß gegenüber der Zeit eines Hin- und Herganges des Punktes, so wird im ersten Fall das erste Glied auf der rechten Seite der Gleichung exakt Null, im zweiten Falle sehr klein, in beiden Fällen können wir es weglassen und die Gleichung demnach schreiben

$$\frac{1}{2t}\int^{t} F \times (P - O)\, dt = -\tfrac{1}{2} m \frac{1}{t} \int^{t} \left(\frac{dP}{dt}\right)^2 dt.$$

Die beiden Seiten dieser Gleichung bedeuten nun Mittelwerte bei einer Periode oder aber bei einer sehr langen Zeit. Drücken wir diese Mittelwerte durch einen übergesetzten Strich aus, so können wir demnach schreiben

$$-\tfrac{1}{2}\overline{F \times (P - O)} = \tfrac{1}{2} m \overline{v^2},$$

wenn $v = \dfrac{dP}{dt}$ die Geschwindigkeit bezeichnet. Die rechte Seite dieser Gleichung ist die mittlere kinetische Energie, die linke Seite das negative halbe mittlere Virial.

Aus diesem Virialsatz läßt sich eine sehr einfache Folgerung ziehen. Bilden wir dieselbe Gleichung noch einmal für einen veränderten Bezugspunkt O', so muß sich, da die rechte Seite der Gleichung ungeändert bleibt, ergeben

$$\overline{F \times (P - O)} = \overline{F \times (P - O')}$$

also

$$\overline{F} \times (O - O') = 0 \quad \text{oder} \quad \overline{F} = 0:$$

Der Mittelwert der Kraft für eine relativ lange Zeit verschwindet bei der stationären Bewegung.

16. Aufgabe. *Bewegung der in horizontaler Richtung geschleuderten Geschosse mit Rücksicht auf die Drehung der Erde.*

Auflösung. Die Gleichungen (16) lassen sich sofort integrieren, wenn wir, wie wir es hier dürfen, ω als so klein ansehen, daß seine Potenzen von der zweiten an vernachlässigt werden können. Fügen wir die Bedingungen hinzu, daß für $t = 0$

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0;\quad \dot{x} = \alpha,\ \dot{y} = \beta,\ \dot{z} = 0$$

sein soll, so erhalten wir

$$x = \alpha t + \omega \beta t^2 \sin \varphi + \tfrac{1}{3} \omega g t^3 \cos \varphi,$$
$$y = \beta t - \omega \alpha t^2 \sin \varphi,$$
$$z = -\tfrac{1}{2} g t^2 + \omega \alpha t^2 \cos \varphi.$$

Wird das Geschoß insbesondere nach Norden gerichtet, ist also $\alpha = 0$, $\beta = v > 0$, so wird

$$x = \omega t^2 (v \sin \varphi + \tfrac{1}{3} g t \cos \varphi),\ y = vt,\ z = -\tfrac{1}{2} g t^2.$$

Da aber nur eine Zeit in Betracht zu ziehen ist, bei der die Fallgeschwindigkeit gt sehr klein gegen die Geschwindigkeit v des Geschosses ist, wird $x > 0$, d. h. das Geschoß weicht nach Osten ab. Hätten wir dagegen nach Süden geschossen, so würde sich eine Abweichung nach Westen ergeben haben

ZWEITER TEIL

DYNAMIK
DER PUNKTSYSTEME

Drittes Kapitel.

Das d'Alembertsche Prinzip und die allgemeinen Gleichungen der Dynamik.

1. Das d'Alembertsche Prinzip. Wir gehen nunmehr von der Betrachtung eines einzelnen materiellen Punktes zu der Betrachtung eines Systems, das aus einer beliebigen Anzahl n solcher Punkte besteht, über, und wollen sofort annehmen, daß das System beliebigen Bedingungen unterworfen sei. Wir wollen dabei, ebenso wie in der Statik, das Prinzip der Reaktionskräfte zugrunde legen, d. h. wir wollen voraussetzen, daß bei jedem in Bewegung befindlichen System die Wirkung, welche durch eine Bedingung des Systems auf irgendeinen Punkt P_i von ihm ausgeübt wird, ersetzbar sei durch eine in P_i angreifende Kraft, welche wir als die Reaktionskraft bezeichnen. Die Resultante aller dieser auf den Punkt P_i wirkenden Kräfte wollen wir durch R_i darstellen. Ist m_i die Masse von P_i, F_i die äußere Kraft, die auf diesen Punkt wirkt, so liefert das zweite Bewegungsgesetz die Gleichung

$$m_i \ddot{P}_i = F_i + R_i$$

für jeden Punkt des Systems.

Wir wollen nunmehr bemerken, daß alles, was wir bei der Auseinandersetzung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen gesagt haben, vollständig unabhängig von dem Zustand der Ruhe oder Bewegung ist, in dem sich das System befindet, und wir wollen wiederum mit δP_i eine (umkehrbare oder nicht umkehrbare) virtuelle Verschiebung des Punktes P_i bezeichnen, unter der Voraussetzung, daß die Zeit als unverändert angesehen wird; eine solche Verschiebung ist im allgemeinen ver-

schieden von der wirklichen Verrückung, die wir mit dP_i bezeichnen.

Wir werden außerdem das ebenfalls im zweiten Kapitel der Statik besprochene Prinzip annehmen, daß die virtuelle Arbeit der Reaktionskräfte null oder positiv ist, je nachdem die Verschiebungen umkehrbar sind oder nicht. Dies Prinzip drückt sich durch die Gleichung aus

$$\sum R_i \times \delta P_i \geqq 0,$$

in der die Summation über alle Punkte des Systems zu erstrecken ist. Folglich wird

$$\sum [F_i - m_i \ddot{P}_i] \times \delta P_i \leqq 0. \tag{1}$$

Der Vektor $m_i \ddot{P}_i$ heißt die Trägheitskraft der Masse m_i, und die beiden angenommenen Postulate ziehen sonach den folgenden Satz nach sich:

Bei der Bewegung eines beliebigen Systems halten die wirkenden äußeren Kräfte den Trägheitskräften das Gleichgewicht.

Das in diesem Satze ausgesprochene Prinzip, das jedes dynamische Problem auf ein Problem der Statik zurückführt, heißt das d'Alembertsche Prinzip.[1])

---

1) Es wurde von d'Alembert im Jahre 1742 ausgesprochen und in seinem *Traité de Dynamique* (Paris 1743, 2me partie, chap. I; deutsche Übersetzung in Ostwalds Klassikern) ausführlich entwickelt. D'Alembert betrachtete die einem System mitgeteilten Bewegungen als zusammengesetzt aus den wirklichen Bewegungen und anderen, die sich gegenseitig aufheben; er formulierte dann das Prinzip so, daß die Kräfte, welche die verlorenen Bewegungen hervorrufen würden, im Gleichgewicht sein müssen. Auf einzelne besondere Fälle, z. B. auf das physische Pendel, war das Prinzip schon vorher von Jacob Bernoulli, Acta Eruditorum 1686, angewandt worden. Seine gegenwärtige Formulierung verdankt man Euler (vgl. Lagrange, *Mécanique analytique*, Œuvres t. 11, p. 255; Mach, Die Mechanik, 3. Aufl. S. 331). Das Prinzip beruht nach der modernen Auffassung nur auf der Grundlage der Erfahrung und bildet im wesentlichen eine Verallgemeinerung des dritten Bewegungsgesetzes. Vgl. Comte, *Cours de philos. positive*, 4. éd. 1877, t. 1, p. 408, 492; Thomson u. Tait, *Natural philosophy*, vol. 1, p. 248;

Wir können dasselbe Prinzip noch in einer anderen Form aussprechen, indem wir die Kraft F_i als die Resultante der Trägheitskraft $m_i\ddot{P}_i$ und einer anderen Kraft, der **verlorenen Kraft**, die der Resultante der auf den Punkt wirkenden Reaktionskräfte entgegengesetzt gleich ist, ansehen; wir können dann sagen:

Bei der Bewegung des Systems halten sich in jedem Augenblicke die verlorenen Kräfte das Gleichgewicht.

Im Falle der umkehrbaren Verschiebungen wird die Gleichung (1), wenn wir ein rechtwinkliges Achsenkreuz zugrunde legen,

$$\sum[(X_i - m_i\ddot{x}_i)\delta x_i + (Y_i - m_i\ddot{y}_i)\delta y_i + (Z_i - m_i\ddot{z}_i)\delta z_i] = 0. \quad (2)$$

Ziehen wir die linearen und homogenen Bedingungsgleichungen, denen die umkehrbaren Verschiebungen des Systems genügen müssen, in Rechnung und verfahren mit der Gleichung (2) ebenso wie in der Statik mit der Gleichung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen, so erhalten wir die Bewegungsgleichungen in der Form

$$m_i\ddot{x}_i = X_i + \lambda A_i + \lambda' A_i' + \cdots,$$
$$m_i\ddot{y}_i = Y_i + \lambda B_i + \lambda' B_i' + \cdots,$$
$$m_i\ddot{z}_i = Z_i + \lambda C_i + \lambda' C_i' + \cdots.$$

Ist insbesondere das System holonom und sind dann

$$\mathfrak{L}_1 = 0, \quad \mathfrak{L}_2 = 0, \quad \ldots, \quad \mathfrak{L}_r = 0$$

die endlichen Bedingungsgleichungen, so erhalten wir die Bewegungsgleichungen in der **ersten Lagrangeschen Form**[1]):

$$m_i\ddot{x}_i = X_i + \sum_{\varkappa=1}^{r} \lambda_\varkappa \frac{\partial \mathfrak{L}_\varkappa}{\partial x_i}, \quad m_i\ddot{y}_i = Y_i + \sum_{\varkappa=1}^{r} \lambda_\varkappa \frac{\partial \mathfrak{L}_\varkappa}{\partial y_i},$$
$$m_i\ddot{z}_i = Z_i + \sum_{\varkappa=1}^{r} \lambda_\varkappa \frac{\partial \mathfrak{L}_\varkappa}{\partial z_i}. \quad (3)$$

Volkmann, *Einführung in das Studium d. theoret. Physik*, Lpz. 1900, p. 335. Für die Kritik der gewöhnlichen Begründung des Prinzips s. u. a. Maggi, *Principii di Stereodinamica*, Milano 1903, p. 80.

1) Lagrange, Mécanique analytique, Œuvres t. 11, p. 267.

Sie enthalten als sehr speziellen Fall die Gleichungen (2) und (3) des vorigen Kapitels.

Die Gleichungen (3) und die Bedingungsgleichungen sind hinreichend zur Bestimmung der r unbekannten Funktionen λ_x und der $3n$ Werte x_i, y_i, z_i. Eliminieren wir die λ_x aus den $3n$ für sie linearen Gleichungen (3), so behalten wir $3n - r$ Gleichungen übrig, welche die **reinen Bewegungsgleichungen** heißen und mit den r Gleichungen $\mathfrak{L}_x = 0$ zusammen zur Berechnung der x_i, y_i, z_i hinreichen.

Wenn die Kräfte gegeben sind, so wird die Integration dieses Gleichungssystems durch die Integration einer einzigen Differentialgleichung von der Ordnung $6n - 2r$ vermittelt. Die $6n - 2r$ Konstanten, welche hierbei in die Lösung hereinkommen, werden durch die Anfangsbedingungen vollkommen festgelegt, nämlich durch die Anfangswerte der Koordinaten, unter denen zufolge der r Systembedingungen $3n - r$ unabhängige sind, und die Komponenten der Anfangsgeschwindigkeiten, von denen zufolge der r Relationen

$$\frac{\partial \mathfrak{L}_x}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{L}_x}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \cdots = 0$$

ebenfalls $3n - r$ unabhängig sind. Ist die Integration ausgeführt, so finden wir die λ_x als Funktionen der Zeit und der Anfangskonstanten. Diese Funktionen müssen für den ganzen Verlauf der Bewegung, d. h. für jeden beliebigen Wert von t, und für beliebige Werte der Anfangskonstanten bestimmte Vorzeichen behalten. Es bestimmt sich nämlich das Vorzeichen von λ_x dadurch, daß für alle nicht umkehrbaren Verschiebungen

$$\lambda_x \sum_i \left(\frac{\partial \mathfrak{L}_x}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \mathfrak{L}_x}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \mathfrak{L}_x}{\partial z_i} \delta z_i \right) > 0$$

sein muß.

Hätte dagegen λ_x ein entgegengesetztes Vorzeichen, so dürften wir die x^{te} Bedingung nicht mehr berücksichtigen und müßten entsprechend in den Bewegungsgleichungen $\lambda_x = 0$ annehmen.

Eine einfache Erläuterung des Gesagten bietet das Problem

des sphärischen Pendels, Kap. II, § 5. Behalten wir die dort gebrauchten Bezeichnungen bei, so sind die Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{x} = \lambda x, \quad m\ddot{y} = \lambda y, \quad m\ddot{z} = \lambda z - mg,$$

und daraus folgt, da $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v^2$, also $x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} = -v^2$,

$$v^2 = h - 2gz, \quad \lambda = -\frac{m}{a^2}(h - 3gz).$$

Wird für $z = z_0$ die Größe der Geschwindigkeit $= 0$, so erhalten wir

$$v^2 = 2g(z_0 - z), \quad \lambda = -\frac{mg}{a^2}(2z_0 - 3z).$$

Nehmen wir nun an, der Punkt befindet sich anfänglich in der unteren Hälfte der hohl gedachten Kugel, d. h. es sei $z_0 < 0$. Aus der ersten der angeschriebenen Relationen folgt aber $z < z_0$, aus der zweiten also $\lambda < 0$, d. h. es wird, weil $x\delta x + y\delta y + z\delta z \leqq 0$,

$$\lambda(x\delta x + y\delta y + z\delta z) > 0.$$

Der Punkt verläßt die Kugel nie, wenn er sich zu Anfang auf ihr befindet.

Befindet sich dagegen der Punkt anfänglich auf der oberen Hälfte der Kugel, so wird $z_0 > 0$, z nimmt von z_0 ausgehend beständig ab; der Wert von λ ist anfänglich < 0 und bleibt es, bis $z = \frac{2}{3}z_0$ wird. So lange ist also

$$\lambda(x\delta x + y\delta y + z\delta z) \geqq 0$$

und der Punkt bleibt auf der Kugel. Wird aber $z < \frac{2}{3}z_0$, so ist $\lambda > 0$, die Bedingungsgleichung muß also getilgt und $\lambda = 0$ angenommen werden; die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -g;$$

der Punkt hat die Kugel verlassen und bewegt sich in einer parabolischen Wurfbahn weiter.

In vielen Fällen führt das d'Alembertsche Prinzip direkt zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen. Wir wollen dies an einigen Beispielen zeigen.[1])

1) Vgl. Maggi, Principii di Stereodinamica, Milano 1903, p. 20, 61.

1) Ein starres System mit einem festen Punkte O ist ein holonomes System, dessen Lage bestimmt ist, wenn die Orientierung eines mit dem starren System fest verbundenen Koordinatensystems, dessen Ursprung in O liegt, in jedem Augenblicke bekannt ist. Das System hat also drei Freiheitsgrade. Wenn die äußeren Kräfte und die Trägheitskräfte sich das Gleichgewicht halten sollen, so müssen ihre Momente für den Punkt O einander gleich werden und es ergeben sich die Bedingungen

$$\sum m_i[(y_i - y_0)\ddot{z}_i - (z_i - z_0)\ddot{y}_i] = M_x,$$
$$\sum m_i[(z_i - z_0)\ddot{x}_i - (x_i - x_0)\ddot{z}_i] = M_y,$$
$$\sum m_i[(x_i - x_0)\ddot{y}_i - (y_i - y_0)\ddot{x}_i] = M_z,$$

in denen x_0, y_0, z_0 die auf ein im Raume festes Koordinatensystem bezogenen Koordinaten des Punktes O und M_x, M_y, M_z die Komponenten des Momentes der äußeren Kräfte für den Punkt O sind. Dies sind die Gleichungen der Bewegung.

2) Ein starres System, von dem ein Punkt O gezwungen ist auf einer festen Fläche zu bleiben, ist ebenfalls ein holonomes System und besitzt fünf Grade der Freiheit. Zunächst gelten dieselben drei Gleichungen wie vorhin, denn zu den virtuellen Verschiebungen gehören wieder die Drehungen um den Punkt O. Weiter kann aber das System auch einer Parallelverschiebung in der Richtung einer Geraden, die in O die Fläche berührt, unterworfen werden. Nennen wir also α, β, γ die Richtungskosinus dieser Tangente und machen

$$\delta x_i = \alpha\tau, \quad \delta y_i = \beta\tau, \quad \delta z_i = \gamma\tau,$$

so ergibt sich aus der Gleichung des d'Alembertschen Prinzipes

$$\sum m_i(\alpha\ddot{x}_i + \beta\ddot{y}_i + \gamma\ddot{z}_i) = \sum(\alpha X_i + \beta Y_i + \gamma Z_i)$$
$$= \alpha R_x + \beta R_y + \gamma R_z.$$

3) Ein starres System, das um eine feste Achse drehbar ist, wird seiner Lage nach fixiert durch den Winkel, den eine durch die Achse gehende und mit dem System fest verbundene Ebene gegen eine im Raume feste Ebene durch diese Achse bildet. Es ist also ein holonomes System mit einem Freiheitsgrade.

Mögliche Verschiebungen sind nur die Drehungen um die feste Achse, und es ergibt sich, daß das Moment der Trägheitskräfte und das Moment der äußeren Kräfte für diese Achse einander gleich werden müssen. Wählt man die feste Achse zur z-Achse, so wird die Bewegungsgleichung:

$$\sum m_i(y_i \ddot{z}_i - z_i \ddot{y}_i) = M_z.$$

4) Ein starrer Körper mit überall konvexer Begrenzung sei in beständiger Berührung mit einer in vorgeschriebener Bewegung befindlichen Ebene. Außerdem sollen der Punkt der Ebene und der Punkt an der Oberfläche des Körpers, die gerade zusammenfallen, stets dieselbe Geschwindigkeit besitzen. Dann sagt man, der Körper sei gezwungen, auf der Ebene ohne Gleitung zu rollen. Das System ist nicht holonom und hat drei Freiheitsgrade. Die drei Gleichungen des Falles 1) bleiben aber hier bestehen, wenn wir für den Bezugspunkt O den augenblicklichen Berührungspunkt wählen. Denn die virtuellen Verschiebungen sind hier die Drehungen um den momentanen Berührungspunkt O.

2. Die Stoßbewegung eines allgemeinen Massensystems. Wir betrachten den Fall, wo zu einer bestimmten Zeit t auf das materielle System Momentankräfte wirken. Eine solche Momentankraft wird festgelegt durch das Vektorintegral $\mathfrak{F} = \int_t^{t+\tau} F\,dt$, wo τ die sehr kurze Wirkungsdauer der Momentankraft bezeichnet. Hat hier $\mathfrak{F}$ einen endlichen Wert, so wird auch die Geschwindigkeit des betreffenden Systempunktes in der Zeit τ sich um einen endlichen Wert ändern, während die Änderung des Ortes während dieser Zeit nur unendlich gering ist.

Integrieren wir nun die Gleichung (1) des d'Alembertschen Prinzipes nach der Zeit von t bis $t + \tau$, so erhalten wir

$$\sum \Big[\int_t^{t+\tau} m_i \ddot{P}_i\,dt \times \delta P_i - \int_t^{t+\tau} F_i\,dt \times \delta P_i \Big] = 0.$$

Das erste Integral in der eckigen Klammer integrieren wir partiell, dann finden wir

$$\int_t^{t+\tau} m_i \ddot{P}_i\, dt \times \delta P_i = [m_i \dot{P}_i \times \delta P_i]_t^{t+\tau} - \int_t^{t+\tau} m_i \dot{P}_i \times \delta \dot{P}_i\, dt.$$

Das Integral auf der rechten Seite wird aber für sehr kleines τ sehr klein auch gegen die Größenordnung der Variationen, weil der Integrand die Variation einer endlichen Größe, nämlich der kinetischen Energie $\frac{1}{2} m_i \dot{P}_i^2$ des materiellen Punktes, ist. In dem ersten Gliede der rechten Seite können wir ferner die Variationen δP_i vor und nach der Zeit τ als unendlich wenig verschieden ansehen und deswegen die ganze rechte Seite der vorstehenden Gleichung schließlich schreiben

$$[m_i \dot{P}_i]_t^{t+\tau} \times \delta P_i = \Delta(m_i \dot{P}_i) \times \delta P_i.$$

Die Differenz $\Delta(m_i \dot{P}_i)$ heißt der verlorene Impuls.

Nach dem Mittelwertsatz der Integrale finden wir weiter

$$\int_t^{t+\tau} F_i\, dt \times \delta P_i = \overline{\delta P_i} \times \int_t^{t+\tau} F_i\, dt = \overline{\delta P_i} \times \mathfrak{F}_i,$$

wenn $\overline{\delta P_i}$ einen Mittelwert der virtuellen Verschiebungen von P_i während der Zeit τ bezeichnet. Diese virtuellen Verschiebungen sind aber unendlich wenig verschieden und wir können daher $\overline{\delta P_i} = \delta P_i$ setzen. So erhalten wir endlich an Stelle der Gleichung des d'Alembertschen Prinzipes die Gleichung

$$\sum [\Delta(m_i P_i) - \mathfrak{F}_i] \times \delta P_i = 0; \tag{3a}$$

die verlorenen Impulse halten den wirkenden Momentenkräften das Gleichgewicht.[1])

3. Die zweite Form der Lagrangeschen Gleichungen. Wir betrachten jetzt den Fall, wo die Bedingungen des Systems derart gegeben sind, daß die $3n$ Koordinaten x_i, y_i, z_i der Punkte des Systems bekannte Funktionen von k un-

1) Vgl. Duhamel, Note sur divers points de mécanique, Journal de l'école polytechnique, Cah. 24 (1835), p. 1.

abhängigen Parametern $q_1, q_2, \ldots, q_k$ werden. Diese Parameter heißen die **allgemeinen Koordinaten** des Systems.

Um bequemer schreiben zu können, wollen wir die $3n$ Koordinaten $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots$ durchnumerieren und mit $u_1, u_2, u_3, \ldots$ bezeichnen, so daß $x_i = u_{3i-2}, y_i = u_{3i-1}, z_i = u_{3i}$ wird, dann haben wir zu setzen

$$u_s = u_s(q_1, q_2, \ldots, q_k, t). \tag{4}$$

Die früheren Bedingungsgleichungen $\mathfrak{L}_\varkappa((u_\sigma)) = 0$ müssen identisch erfüllt sein, wenn wir diese Werte von u_σ einsetzen und wir erhalten also, indem wir diese Bedingungsgleichungen nach q_ϱ differenzieren,

$$\sum_s \frac{\partial \mathfrak{L}_\varkappa}{\partial u_s} \frac{\partial u_s}{\partial q_\varrho} = 0. \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, k).$$

Multiplizieren wir jetzt die Gleichungen (3) der Reihe nach mit $\frac{\partial u_{3i-2}}{\partial q_\varrho}, \frac{\partial u_{3i-1}}{\partial q_\varrho}, \frac{\partial u_{3i}}{\partial q_\varrho}$ und addieren sie alle zu einander, so finden wir

$$\sum_s \mu_s \ddot{u}_s \frac{\partial u_s}{\partial q_\varrho} = \sum_s \Phi_s \frac{\partial u_s}{\partial q_\varrho}, \tag{5}$$

indem wir noch

$$\mu_{3i-2} = \mu_{3i-1} = \mu_{3i} = m_i, \quad \Phi_{3i-2} = X_i, \quad \Phi_{3i-1} = Y_i, \quad \Phi_{3i} = Z_i$$

setzen.

Wir schreiben ferner

$$Q_\varrho = \sum_s \Phi_s \frac{\partial u_s}{\partial q_\varrho}, \tag{6}$$

und nennen diese Größe die **verallgemeinerte Kraftkomponente** nach der Koordinate q_ϱ, aus einem Grunde, den wir später noch erkennen werden.

Um die linke Seite von (5) umzuformen, beachten wir die Identität

$$\sum_s \mu_s \ddot{u}_s \frac{\partial u_s}{\partial q_\varrho} = \sum_s \mu_s \left[\frac{d}{dt}\left(\dot{u}_s \frac{\partial u_s}{\partial q_\varrho}\right) - \dot{u}_s \frac{d}{dt} \frac{\partial u_s}{\partial q_\varrho}\right].$$

Nun wird, wenn wir annehmen, daß die Ausdrücke, die u_s als Funktion der q_ϱ geben, mit der Zeit sich verändern,

$$\dot{u}_s = \frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{\partial u_s}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial u_s}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots, \tag{7}$$

wobei das erste Glied auf der rechten Seite von der Differentiation der Koeffizienten in dem Ausdruck von u_s herrührt. Aus dieser Gleichung (7) folgt sofort

$$\frac{\partial \dot{u}_s}{\partial \dot{q}_\varrho} = \frac{\partial u_s}{\partial q_\varrho} \tag{8}$$

für alle Indizes s, ϱ. Ferner folgt aus (7)

$$\frac{\partial \dot{u}_s}{\partial q_\varrho} = \frac{\partial^2 u_s}{\partial q_\varrho \partial t} + \frac{\partial^2 u_s}{\partial q_\varrho \partial q_1}\dot{q}_1 + \cdots;$$

anderseits ergibt sich aber direkt

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial u_s}{\partial q_\varrho} = \frac{\partial^2 u_s}{\partial t \partial q_\varrho} + \frac{\partial^2 u_s}{\partial q_1 \partial q_\varrho}\dot{q}_1 + \cdots,$$

also wird

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial u_s}{\partial q_\varrho} = \frac{\partial \dot{u}_s}{\partial q_\varrho}. \tag{9}$$

Damit wird nun

$$\sum_s \ddot{u}_s \frac{\partial u_s}{\partial q_\varrho} = \sum_s \frac{d}{dt}\left(\dot{u}_s \frac{\partial \dot{u}_s}{\partial \dot{q}_\varrho}\right) - \sum_s \dot{u}_s \frac{\partial \dot{u}_s}{\partial q_\varrho}.$$

Um die Ausdrücke auf der rechten Seite bequemer schreiben zu können, führen wir den Ausdruck ein

$$T = \sum_s \tfrac{1}{2}\mu_s \dot{u}_s^2 = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i^2, \tag{10}$$

den wir aus später noch zu erörternden Gründen als die **kinetische Energie des Systems** bezeichnen, und können dann schreiben

$$\sum_s \ddot{u}_s \frac{\partial u_s}{\partial q_\varrho} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varrho} - \frac{\partial T}{\partial q_\varrho}.$$

Somit wird endlich

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varrho} - \frac{\partial T}{\partial q_\varrho} = Q_\varrho. \tag{11}$$

Dies ist die **zweite Form der Lagrangeschen Gleichungen.**[1])

1) Lagrange, Mécanique analytique, Œuvres t. 12, p. 325.

Die Funktion T, die kinetische Energie, die als die halbe Summe der Produkte aller Massen des Systems mit den Quadraten der zugehörigen Geschwindigkeiten definiert ist, wird, da zufolge (7) Gleichungen von der Form

$$\dot{u}_s = a_0^{(s)} + a_1^{(s)}\dot{q}_1 + a_2^{(s)}\dot{q}_2 + \cdots$$

gelten und daraus sich der Ausdruck

$$2\,T = \sum_s \mu_s \left[a_0^{(s)} + a_1^{(s)}\dot{q}_1 + \cdots\right]^2 \tag{12}$$

ergibt, eine quadratische Funktion der allgemeinen Geschwindigkeitskomponenten, wobei die Koeffizienten Funktionen der q_t und von t sind, und zwar ist diese quadratische Funktion wesentlich positiv. Wenn wir uns T in solcher Form gegeben denken, wollen wir es zur größeren Deutlichkeit mit T_q bezeichnen.

Die Zahl der Gleichungen (11) ist dieselbe wie die der Freiheitsgrade des Systems und ihre Bauart ist sehr einfach, indem sie lediglich die Kenntnis von T in Abhängigkeit von q_ϱ und $\dot{q}_\varrho$ fordern; die Gleichungen erlauben aber nicht, die Reaktionskräfte des Systems zu ermitteln. Sie sind Differentialgleichungen zweiter Ordnung und gelten nur für holonome Systeme.

Wir beachten noch, daß aus (6) folgt

$$Q_1\,\delta q_1 + Q_2\,\delta q_2 + \cdots = \sum \Phi_s\,\delta u_s = \sum \mathbf{F}_i \times \delta \mathbf{P}_i, \tag{13}$$

der Ausdruck links liefert demnach die virtuelle Arbeit des Kräftesystems bei der allgemeinen virtuellen Verschiebung, die sich auf die Zeit t bezieht. Ist diese Arbeit durch die q_ϱ und ihre Variationen ausgedrückt, so findet man sofort die Q_ϱ.

a) Wir betrachten insbesondere den Fall, wo die Bedingungen von der Zeit unabhängig sind, wo also $\frac{\partial u_s}{\partial t} = 0$ wird. Dann ergibt sich zufolge (7) für T ein Ausdruck von der Form

$$T = \tfrac{1}{2} \sum a_{\sigma\tau}\,\dot{q}_\sigma \dot{q}_\tau. \tag{14}$$

Nach seiner Definition ist aber T immer positiv und nur dann 0, wenn alle $\dot{u}_\sigma$ d. h. alle $\dot{q}_\varrho$ verschwinden. T ist also eine quadra-

tische, definite, positive Form der Variabeln $\dot{q}_\varrho$. Führen wir an dem Ausdruck (14) die durch (11) geforderten Differentiationen aus, so ergibt sich

$$\sum_\tau \left\{ a_{\varrho\tau}\ddot{q}_\tau + \sum_\sigma \frac{\partial a_{\varrho\tau}}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma \cdot \dot{q}_\tau \right\} - \frac{1}{2} \sum_\sigma \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial q_\varrho} \dot{q}_\sigma \dot{q}_\tau = Q_\varrho$$

oder

$$\sum_\tau a_{\varrho\tau}\ddot{q}_\tau + \sum_{\sigma\tau} \begin{bmatrix} \sigma\tau \\ \varrho \end{bmatrix} \dot{q}_\sigma \dot{q}_\tau = Q_\varrho, \tag{15}$$

indem wir annehmen

$$\begin{bmatrix} \sigma\tau \\ \varrho \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial q_\tau} + \frac{\partial a_{\varrho\tau}}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial q_\varrho} \right] \tag{16}$$

und beachten, daß

$$\sum_{\sigma\tau} \frac{\partial a_{\varrho\tau}}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma \dot{q}_\tau = \frac{1}{2} \sum_{\sigma\tau} \left(\frac{\partial a_{\varrho\tau}}{\partial q_\sigma} + \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial q_\tau} \right) \dot{q}_\sigma \dot{q}_\tau$$

gesetzt werden kann.

Wir können die Gleichungen (15) noch nach $\ddot{q}_\nu$ auflösen, indem wir sie mit geeigneten Faktoren $\alpha_{\varrho\nu}$ multiplizieren und addieren. Dann finden wir

$$\ddot{q}_\nu + \sum_{\sigma\tau} \begin{Bmatrix} \sigma\tau \\ \nu \end{Bmatrix} \dot{q}_\sigma \dot{q}_\tau = \sum_\varrho Q_\varrho \alpha_{\varrho\nu}, \tag{17}$$

indem wir setzen

$$\begin{Bmatrix} \sigma\tau \\ \nu \end{Bmatrix} = \sum_\varrho \alpha_{\varrho\nu} \begin{bmatrix} \sigma\tau \\ \varrho \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Hierbei ist, wenn Δ die Determinante $|a_{\varrho\sigma}|$ bedeutet,

$$\alpha_{\varrho\sigma} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{\varrho\sigma}}.$$

b) Von besonderer Bedeutung ist ferner der Fall, in welchem das System der äußeren Kräfte ein konservatives ist, d. h. die Kräfte ein Potential besitzen, das eine Funktion allein von den allgemeinen Koordinaten q_ϱ und eventuell von der Zeit t ist. In diesem Falle wird

$$\sum \mathbf{F}_i \times \delta \mathbf{P}_i = \delta U,$$

und mithin folgt aus (13) wegen der Willkürlichkeit der δq_ϱ

$$Q_\varrho = \frac{\partial U}{\partial q_\varrho}. \tag{19}$$

Die Funktion $\mathfrak{L}$, die durch den Ausdruck

$$\mathfrak{L} = T + U$$

definiert wird, heißt das kinetische Potential oder die Lagrangesche Funktion, sie ist, was ihre Abhängigkeit von den $\dot{q}_\varrho$ angeht, dieselbe quadratische Funktion dieser Größen wie T. Die Gleichungen (11) nehmen dann die einfachere Form an

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_\varrho} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_\varrho} = 0. \tag{11a}$$

Enthält $\mathfrak{L}$ nicht die Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_l$, d. h. ist es eine Funktion der $\dot{q}_\varrho$ und von $q_{l+1}, q_{l+2}, \ldots, q_k$, so sagt man, daß die Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_l$ des mechanischen Systems verborgen seien. Die Gleichungen (11a) zeigen dann sofort, daß man folgende l erste Integrale der Bewegung findet:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_1} = \alpha_1, \quad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_2} = \alpha_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_l} = \alpha_l,$$

wobei die α willkürliche Konstanten bedeuten. Setzen wir voraus, daß wir aus diesen für die $\dot{q}_\varrho$ linearen Gleichungen die Komponenten $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_l$ als Funktionen der q_ϱ und von $\dot{q}_{l+1}, \ldots, \dot{q}_k$ ableiten können, so behaupte ich, daß die Integration der Gleichungen (11a) für das vorliegende System mit k Freiheitsgraden abhängt von der Integration der Gleichungen für ein analoges System mit $k - l$ Freiheitsgraden, dessen kinetisches Potential

$$R = \mathfrak{L} - \alpha_1 \dot{q}_1 - \alpha_2 \dot{q}_2 - \cdots - \alpha_l \dot{q}_l$$

ist, und von l Quadraturen (Methode der verborgenen Koordinaten).

In der Tat, denken wir uns $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_l$ in der angegebenen Weise ausgedrückt, so finden wir

$$\frac{\partial R}{\partial q_\varrho} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_\varrho} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_1}\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_\varrho} + \cdots - \alpha_1 \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_\varrho} - \cdots$$

und mithin wird mit Rücksicht auf die obenstehenden Gleichungen allgemein

$$\frac{\partial R}{\partial q_\varrho} = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial q_\varrho}.$$

Ebenso wird

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\sigma} = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{q}_\sigma}. \qquad (\sigma = l+1, l+2, \cdots, k)$$

Wir müssen also das Gleichungssystem integrieren

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_\sigma} = 0.$$

Nachdem die Integration ausgeführt ist und die q_σ durch t und $2(k-l)$ Konstante ausgedrückt sind, ergeben sich aus

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_1} = -\dot{q}_1, \ \ldots, \ \frac{\partial R}{\partial \alpha_l} = -\dot{q}_l$$

durch l Quadraturen die Ausdrücke von $q_1, q_2, \ldots, q_l$ und wir haben im ganzen $2k$ Konstanten eingeführt.[1])

c) Wir betrachten schließlich den Fall eines anholonomen Systems; zwischen den Variationen der Koordinaten q_ϱ besteht dann eine gewisse Anzahl nicht integrabler, linearer Beziehungen. Auch in diesem Falle ergeben sich für die Variationen der kartesischen Koordinaten Ausdrücke von der Form

$$\delta u_s = a_1^{(s)} \delta q_1 + a_2^{(s)} \delta q_2 + \cdots + a_w^{(s)} \delta q_w,$$

in denen $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_w$ vollständig willkürlich bleibt. Führen wir diese Werte in die Fundamentalgleichung (2) oder

$$\sum (\Phi_s - \mu_s \ddot{u}_s) \delta u_s = 0$$

ein, so zerfällt sie in die folgenden

$$\sum_s \mu_s a_\sigma^{(s)} \ddot{u}_s = \sum_s a_\sigma^{(s)} \Phi_s = Q_\sigma. \qquad (\sigma = 1, 2, \cdots, w).$$

Man beachte nun, daß

$$\sum_s \mu_s a_\sigma^{(s)} \ddot{u}_s = \frac{d}{dt} \sum_s \mu_s a_\sigma^{(s)} \dot{u}_\sigma - \sum_s \mu_s \dot{a}_\sigma^{(s)} \dot{u}_\sigma$$

---

1) E. J. Routh, A Treatise on the stability of a given state of motion, London (1877); Die Dynamik der Systeme starrer Körper (Deutsche Ausgabe, Leipzig 1898) I. Band, S. 378.

und daß wegen $a_\sigma^{(s)} = \frac{\partial \dot{u}_s}{\partial \dot{q}_\sigma}$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} = \sum_s \mu_s \dot{u}_s a_\sigma^{(s)}$$

wird; dann ergibt sich, indem wir

$$R_\sigma = \sum_s \mu_s \dot{a}_\sigma^{(s)} \dot{u}_\sigma$$

setzen, daß die Bewegungsgleichungen die zu (11) analoge Form annehmen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - R_\sigma = Q_\sigma. \tag{11b}$$

Man kann auch direkt $\sum \mu_s a_\sigma^{(s)} \ddot{u}_s$ transformieren, indem man beachtet, daß

$$\ddot{u}_s = a_1^{(s)} \ddot{q}_1 + \cdots + \dot{a}_1^{(s)} \dot{q}_1 + \cdots$$

wird und mithin

$$a_\sigma^{(s)} = \frac{\partial \ddot{u}_s}{\partial \ddot{q}_\sigma}.$$

Daraus folgt

$$\sum_s \mu_s a_\sigma^{(s)} \ddot{u}_s = \sum_s \mu_s \ddot{u}_s \frac{\partial \ddot{u}_s}{\partial \ddot{q}_s} = \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s},$$

wenn wir setzen

$$2S = \sum_s \mu_s \ddot{u}_s^2 = \sum_i m_i \ddot{P}_i^2,$$

also mit den Beschleunigungen denselben Ausdruck bilden, den wir für die Geschwindigkeiten mit T bezeichnet haben. Die Gleichungen nehmen dann die Form von Gibbs und Appell an

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\sigma} = Q_\sigma.$$ [1]

---

1) J. W. Gibbs, *On the Fundamental Formulae of Dynamics*, American Journ. of Math. vol. 2, p. 49 (1879), Scientific Papers vol. 2, p. 1; Appell, Comptes Rendus t. 129, p. 317, 459 (1899), Journ. für Math. Bd. 121, S. 310 (1899), Bd. 122, S. 205 (1900), *Les mouvements de roulement en dynamique*, in der Sammlung Scientia, 1899, p. 46 und zahlreiche Arbeiten im Journal de Math. (5) t. 6, 7, 9. Man vgl. auch Maggi, *Principii di Stereodinamica*, p. 199.

4. Die Hamiltonschen Gleichungen. Wenn wir die Gleichung (12) entwickeln, so erhalten wir $2T$ ausgedrückt als die Summe zweier Teile, von denen der eine eine homogene quadratische Funktion der $\dot{q}_\varrho$ und der andere linear ist, d. h. wir finden einen Ausdruck von der Form

$$2T_{\dot{q}} = P_{11}\dot{q}_1^2 + P_{22}\dot{q}_2^2 + \cdots + 2P_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \cdots$$
$$\cdots + 2(\alpha_0 + \alpha_1\dot{q}_1 + \cdots), \qquad (20)$$

in dem alle Koeffizienten von den Komponenten $\dot{q}_\varrho$ und der Massenverteilung des Systems abhängen. In dem besonderen Falle eines freien Punktes sind die Impulskomponenten $m\dot{x}$, $m\dot{y}$, $m\dot{z}$ (vgl. Kap. I) die Derivierten der kinetischen Energie nach den Geschwindigkeitskomponenten, wie man sofort verifizieren kann. Wir wollen nun allgemein als die Impulskomponenten eines Systems die Derivierten der kinetischen Energie nach den allgemeinen Geschwindigkeitskomponenten bezeichnen.

Nennen wir sie p_ϱ, so haben wir demnach zu setzen

$$p_\varrho = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varrho} \qquad (21)$$

und demnach

$$p_1 = P_{11}\dot{q}_1 + P_{12}\dot{q}_2 + \cdots + \alpha_1, \text{ usw.} \qquad (22)$$

In einem holonomen System sind die Impulskomponenten lineare Funktionen der allgemeinen Geschwindigkeitskomponenten.

Die Determinante der Gleichungen (22) ist nichts anderes wie die Diskriminante des in den $\dot{q}_\varrho$ homogenen quadratischen Teils T_2 von $2T_{\dot{q}}$.

Wenn die Koordinaten u_s die Zeit t nicht explizit enthalten, so reduziert sich T auf T_2. Die Diskriminante ist dann immer von Null verschieden, sie ist es aber auch im allgemeinen Falle, denn wäre sie Null, so ließe sich durch die Auflösung des linearen Gleichungssystems

$$P_{\varrho 1}\dot{q}_1 + P_{\varrho 2}\dot{q}_2 + \cdots = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \cdots, k).$$
$$\alpha_1\dot{q}_1 + \alpha_2\dot{q}_2 + \cdots = -\alpha_0$$

eine Kombination von Geschwindigkeitskomponenten $\dot{q}_\varrho$ angeben, für welche die kinetische Energie verschwindet, ohne daß alle $\dot{q}_\varrho$ gleich Null sind, es gäbe also eine Bewegung des Systems, bei der die kinetische Energie Null ist, und das ist nach deren Definition unmöglich. Das Gleichungssystem (22) läßt sich mithin nach den $\dot{q}_\varrho$ auflösen, und wir finden auch:

Die allgemeinen Geschwindigkeitskomponenten sind lineare Funktionen der Impulskomponenten.

Setzen wir in (12) diese Ausdrücke der $\dot{q}_\varrho$ ein, so geht T in eine Form über, in der es als eine quadratische Funktion der p_ϱ erscheint, wobei die Koeffizienten Funktionen der q_ϱ und von t sind. Diese Form wollen wir durch T_p bezeichnen.

Halten wir uns sodann gegenwärtig, daß die Anfangskoordinaten und Anfangsgeschwindigkeiten, d. h. die q_ϱ und $\dot{q}_\varrho$, willkürlich sind und wir einen beliebigen Augenblick für den Anfang der Bewegung wählen können, so erkennen wir, daß wir zu einer bestimmten Zeit t die Größen q_ϱ und p_ϱ als durchaus willkürlich und unabhängig ansehen können.

Dies vorausgeschickt, betrachten wir die folgende Funktion der q_ϱ und p_ϱ:

$$\Theta = \sum p_\varrho \dot{q}_\varrho - T, \tag{23}$$

wobei die $\dot{q}_\varrho$ nur zur Abkürzung für die sie darstellenden linearen Funktionen der p_ϱ stehen.

Erteilen wir den p_ϱ und q_ϱ willkürliche Zuwächse δp_ϱ, δq_ϱ, indem wir t invariabel lassen, so erhalten wir

$$\delta\Theta = \sum\left(p_\varrho\,\delta\dot{q}_\varrho + \dot{q}_\varrho\,\delta p_\varrho - \frac{\partial T}{\partial q_\varrho}\delta q_\varrho - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varrho}\delta\dot{q}_\varrho\right)$$

oder wegen (21)

$$\delta\Theta = \sum\left(\dot{q}_\varrho\,\delta p_\varrho - \frac{\partial T}{\partial q_\varrho}\delta q_\varrho\right).$$

Mithin ergibt sich

$$\frac{\partial\Theta}{\partial p_\varrho} = \dot{q}_\varrho, \quad \frac{\partial\Theta}{\partial q_\varrho} = -\frac{\partial T}{\partial q_\varrho}.$$

Das Gleichungssystem (11) geht hierdurch in das folgende über

$$\dot{p}_\varrho = Q_\varrho - \frac{\partial\Theta}{\partial q_\varrho}, \quad \dot{q}_\varrho = \frac{\partial\Theta}{\partial p_\varrho}. \tag{24}$$

Wir finden also ein System von $2k$ Differentialgleichungen erster Ordnung, welches das System (11) der k Lagrangeschen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vollständig ersetzt.

Haben die Kräfte ein Potential U (das eine Funktion der q_ϱ und eventuell der Zeit t ist), so folgt aus (19), wenn wir

$$H = \Theta - U \tag{25}$$

setzen,

$$\dot{p}_\varrho = -\frac{\partial H}{\partial q_\varrho}, \quad \dot{q}_\varrho = \frac{\partial H}{\partial p_\varrho}. \tag{26}$$

Besonders zu beachten ist der Fall, wo die Bedingungen von der Zeit unabhängig sind, d. h. wo die u_s sich allein durch die q_ϱ ausdrücken. Man folgert dann sofort, daß δu_s von der Form

$$\delta u_s = a_1^{(s)} \delta q_1 + a_2^{(s)} \delta q_2 + \cdots$$

und mithin T eine homogene quadratische Funktion der $\dot{q}_\varrho$ wird, während die p_ϱ homogene lineare Funktionen der $\dot{q}_\varrho$ sind. Aus dem Eulerschen Theorem für die homogenen Funktionen findet man weiter

$$2T = \sum \dot{q}_\varrho \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varrho} = \sum p_\varrho \dot{q}_\varrho,$$

demnach ergibt sich aus (23)

$$\Theta = T_p$$

und die zweite der Gleichungen (24) liefert

$$\dot{q}_\varrho = \frac{\partial T_p}{\partial p_\varrho}. \tag{27}$$

Die allgemeinen Geschwindigkeitskomponenten sind somit die Derivierten der kinetischen Energie nach den Impulskomponenten.

Die Gleichungen (24) werden dann

$$\dot{q}_\varrho = \frac{\partial T_p}{\partial p_\varrho}, \quad \dot{p}_\varrho = Q_\varrho - \frac{\partial T_p}{\partial q_\varrho}, \tag{24a}$$

und, unter der Voraussetzung, daß die Kräfte ein Potential U besitzen, ergibt sich, wenn wir

$$H = T_p - U \tag{25a}$$

setzen,

$$\dot{p}_\varrho = -\frac{\partial H}{\partial q_\varrho}, \quad \dot{q}_\varrho = \frac{\partial H}{\partial p_\varrho}. \tag{26a}$$

Die Gleichungen (26) oder (26a) heißen die **kanonischen** oder **Hamiltonschen Bewegungsgleichungen**[1]; um diese Gleichungen zu bilden, muß man nur H als Funktion der Koordinaten und Impulskomponenten kennen.

Im Falle der Gleichungen (26a) und unter der Voraussetzung, daß U und mithin H die Zeit nicht explizit enthält, findet man

$$\frac{dH}{dt} = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial q_\varrho} \dot{q}_\varrho + \frac{\partial H}{\partial p_\varrho} \dot{p}_\varrho \right) = 0,$$

also ist

$$H = h,$$

wobei h eine Konstante bedeutet, ein Integral der Gleichungen (26a), dessen mechanische Bedeutung wir im nächsten Kapitel noch erkennen werden.

Übungsbeispiele.

1. Aufgabe. *Die Bewegungsgleichungen eines Punktes in Polarkoordinaten aufzustellen.*

Auflösung. Die Polarkoordinaten seien r, θ, λ, nämlich Radiusvektor, Polabstand (Breitenkomplement) und geographische Länge, dann ergibt sich

$$T = \tfrac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\lambda}^2).$$

Es seien nun R, Θ, Λ die Kraftkomponenten nach dem Radiusvektor, nach der Tangente des Meridians und nach der Tangente des Breitenparallels, so wird der Arbeitsausdruck

$$R\,dr + \Theta\,ds + \Lambda\,ds',$$

wenn ds, ds' die Bogenelemente von Meridian und Breitenparallel bedeuten. Es ist aber

$$ds = r\,d\theta, \quad ds' = r \sin\theta\, d\lambda$$

1) W. R. Hamilton, *Second Essay on a general method in Dynamics,* Philos. Transactions 1835, part 1, p. 95.

und damit wird der Arbeitsausdruck

$$R\,dr + r\Theta\,d\theta + r\sin\theta\,\Lambda\,d\lambda.$$

Die Lagrangeschen Gleichungen in der zweiten Form werden demnach

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\cdot\dot{\lambda}^2 = R$$

$$\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} - r^2\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\lambda}^2 = \Theta r,$$

$$\frac{d(r^2\sin^2\theta\cdot\dot{\lambda})}{dt} = \Lambda r\sin\theta.$$

2. Aufgabe. *Ein freier Punkt bewegt sich unter der Einwirkung von Kräften, die ein Potential von der Form*

$$U = f_1(r) + \frac{1}{r^2}f_2(\theta) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}f_3(\lambda)$$

besitzen. Zu zeigen, daß die Bestimmung der Bewegung durch Quadraturen zu erreichen ist.

Auflösung. Da hier

$$\Lambda = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{df_3(\lambda)}{r\sin\theta\,d\lambda}$$

wird, liefert die dritte der Gleichungen in der vorigen Aufgabe nach einmaliger Integration

$$\tfrac{1}{2}(r^2\sin^2\theta\cdot\dot{\lambda})^2 = f_3(\lambda) + A.$$

Die zweite hingegen gibt

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - r^2\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\lambda}^2 = \frac{df_2(\theta)}{d\theta}\cdot\frac{1}{r^2} - \frac{2f_3(\lambda)\cos\theta}{r^2\sin^3\theta}.$$

Eliminiert man $\dot{\lambda}$ aus den beiden gefundenen Gleichungen und integriert, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}(r^2\dot{\theta})^2 = -\frac{A}{\sin^2\theta} + f_2(\theta) + B.$$

Aus der Energiegleichung folgt ferner

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\cdot\dot{\lambda}^2 - 2U = h;$$

durch Elimination von $\dot{\theta}$ und $\dot{\lambda}$ findet man

$$\dot{r}^2 + \frac{2B}{r^2} = 2f_1(r) + h,$$

daraus durch eine Quadratur r als Funktion von t. Die Bestimmung

von θ und λ ist dann leicht zu erkennen; sie erfordert ebenfalls lediglich Quadraturen. Vgl. Routh, Dynamics of a particle, p. 307. Cambridge 1908.

3. Aufgabe. *Die kanonischen Gleichungen des sphärischen Pendels aufzustellen.*

Auflösung. Hat der bewegliche Punkt die Masse 1 und die Kugel den Radius $r = 1$, so wird

$$T = \tfrac{1}{2}(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \cdot \dot{\lambda}^2)$$

und, da hier (vgl. die erste Aufgabe)

$$dr = 0, \quad \Theta = g \sin\theta, \quad \Lambda = 0$$

wird, ist der Arbeitsausdruck

$$-d\Pi = g \sin\theta \, d\theta;$$

also werden die Lagrangeschen Gleichungen, wenn wir $q_1 = \theta$, $q_2 = \lambda$ machen,

$$\ddot{q}_1 - \sin q_1 \cos q_1 \cdot \dot{q}_2 = g \sin q_1, \quad \frac{d}{dt}(\sin^2 q_1 \cdot \dot{q}_2) = 0.$$

Diese Gleichungen lassen sich in die folgenden zerlegen

$$\dot{q}_1 = p_1, \quad \dot{q}_2 = \frac{1}{\sin^2 q_1} p_2,$$

$$\dot{p}_1 = g \sin q_1 + \frac{\cos q_1}{\sin^3 q_1} p_2^2, \quad \dot{p}_2 = 0,$$

oder

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2},$$

wenn wir

$$H = \tfrac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{1}{\sin^2 q_1} p_2^2\right) + g \cos q_1 = T_p + \Pi$$

setzen. Dies sind die kanonischen Gleichungen.

4. Aufgabe. *Ein Punkt liegt auf einer Kugel vom Radius 1 und wird vom Nordpol N mit einer Kraft angezogen, deren Potential $k \operatorname{cotg}\theta$ ist, wenn θ den Polabstand bedeutet. Die Bewegung zu untersuchen.*

Auflösung. Wir haben nach der ersten Aufgabe die Gleichungen

$$\ddot{\theta} - \sin\theta \cos\theta \cdot \dot{\lambda}^2 = \frac{k}{\sin^2\theta}, \quad \frac{d}{dt}(\sin^2\theta \cdot \dot{\lambda}) = 0.$$

Um sie umzuformen, setzen wir

$$\varrho = \operatorname{tang}\theta, \quad dt = \cos^2\theta \cdot d\tau.$$

Dabei bezeichnet ϱ den Abstand des Nordpols N von der Projektion P' des beweglichen Punktes P aus dem Kugelmittelpunkt auf die Tangentialebene in N. Die Bewegungsgleichungen lassen sich dann mit Leichtigkeit in die folgenden transformieren

$$\frac{d^2\varrho}{d\tau^2} - \varrho\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^2 = \frac{k}{\varrho^2}, \quad \frac{d}{d\tau}\left(\varrho^2\frac{d\lambda}{d\tau}\right) = 0,$$

diese legen die Bewegung des Projektionspunktes P' fest, der, wie man sieht, von dem Nordpol N im umgekehrten Verhältnis zum Quadrat der Entfernung angezogen wird. Die Bahn von P' ist ein Kegelschnitt, von dem N einen Brennpunkt bildet; die Bahn von P ist deshalb ein sphärischer Kegelschnitt, von dem ebenfalls N einen Brennpunkt bildet. Vgl. Appell, Amer. Journ. of Mathem., t. XIII, p. 153 (1891); C. Neumann, Leipziger Berichte 1879, S. 53.

5. Aufgabe. *Ein biegsamer und unausdehnbarer Faden von der Länge l verbindet durch ein in einer horizontalen Ebene angebrachtes Loch O hindurch zwei der Schwere unterworfene Massen m und m'; m liegt auf der Ebene, m' hängt vertikal herunter. Die Bewegung zu untersuchen.*

Auflösung. Die Polarkoordinaten der Masse m seien, auf O bezogen, r, θ; die Entfernung der Masse m' von O ist dann $l - r$, hieraus folgt

$$T = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \tfrac{1}{2}m'\dot{r}^2.$$

Die Bewegungsgleichungen lauten sonach

$$(m + m')\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -m'g, \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0.$$

Nach der zweiten Gleichung wird

$$r^2\dot{\theta} = c.$$

Dann ergibt sich aus der ersten Gleichung

$$\begin{aligned}(m + m')\dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr} &= mr\dot{\theta}^2 - m'g\\ &= m\frac{c^2}{r^3} - m'g.\end{aligned}$$

Hieraus folgt durch eine erste Integration $\dot{r}$ als Funktion von r und durch eine zweite Integration r als Funktion von t. Aus der Gleichung $\dot{\theta} = c/r^2$ finden wir dann auch θ als Funktion von t.

Thomson und Tait, Vol. 1 p. 309; Schell, Theorie der Bewegung u. der Kräfte, Bd. 2, S. 551.

6. Aufgabe. *Ein gerader Stab, dessen Masse vernachlässigt wird, liegt in einer horizontalen Ebene und kann sich um seinen einen Endpunkt O drehen. Er trägt zwei Massen: eine feste m in seinem freien Endpunkte A und eine bewegliche m', die an dem Stabe entlang gleiten kann. Die eintretende Bewegung zu untersuchen.*

Auflösung. Es sei θ der Winkel, den die Richtung des Stabes mit einer festen Richtung bildet, a seine Länge, r die Entfernung der beweglichen Masse von O. Die kinetische Energie des Systems wird dann

$$T = \tfrac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2} m' (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2),$$

die zweite Form der Lagrangeschen Gleichungen ergibt daher

$$m'(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = 0, \quad \frac{d}{dt}[(ma^2 + m'r^2)\dot{\theta}] = 0.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$(ma^2 + m'r^2)\dot{\theta} = c,$$

und setzen wir daraus $\dot{\theta}$ in die erste ein, so ergibt sich

$$\dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr} = \frac{rc^2}{(ma^2 + m'r^2)^2},$$

woraus

$$\dot{r}^2 = c' - \frac{c^2}{m'} \frac{1}{ma^2 + m'r^2};$$

durch eine erneute Integration findet man r als Funktion von t, also die Bewegung der Masse m' auf dem Stabe, und dann auch θ als Funktion von t, d. h. die Drehung des Stabes. Vgl. Clairaut, Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 1742; d'Alembert, ebenda und Traité de Dynamique, p. 104.

7. Aufgabe. *Eine im Punkte A liegende Masse m kann an einer festen Geraden entlang gleiten und ist mit einer anderen, in einem Punkte B liegenden Masse m' durch einen starren Stab von verschwindender Masse verbunden. Man soll die Bewegung des in eine horizontale Ebene gelegten Systems untersuchen.*

Auflösung. Es sei O ein fester Punkt der Geraden, $OA = x$, $AB = a$ und der Winkel $OAB = \theta$. Die kinetische Energie von m ist $\frac{1}{2} m \dot{x}^2$; um die kinetische Energie von m' zu finden, beachten wir, daß seine Geschwindigkeit v sich aus zwei Komponenten zusammensetzt: erstens der gemeinsamen Bewegung von m und m', d. h. einer Translation in der Richtung der Geraden, die gleich $\dot{x}$ wird, und zweitens der Rotation um A, die gleich $a\dot{\theta}$ ist. Diese beiden

Komponenten schließen den Winkel $\frac{\pi}{2} - \theta$ ein, somit wird

$$v^2 = a^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta.$$

Die kinetische Energie des Systems ist sonach

$$T = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}m'(a^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta)$$

und die Gleichungen der Bewegung werden

$$\frac{d}{dt}[(m + m')\dot{x} + m'a\dot{\theta}\sin\theta] = 0,$$

$$\frac{d}{dt}[m'a^2\dot{\theta} + m'a\dot{x}\sin\theta] - m'a\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta = 0.$$

Aus der ersten finden wir

$$(m + m')\dot{x} + m'a\dot{\theta}\sin\theta = c,$$

entwickeln wir die zweite, so ergibt sich

$$a\ddot{\theta} + \ddot{x}\sin\theta = 0.$$

Aber aus der ersten Gleichung folgt

$$(m + m')\ddot{x} + m'a(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) = 0;$$

eliminieren wir $\ddot{x}$, so erhalten wir

$$\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{m'\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta}{m + m'\cos^2\theta}.$$

Integrieren wir, so finden wir die Gleichung

$$\dot{\theta} = \frac{c'}{\sqrt{m + m'\cos^2\theta}},$$

die eine Pendelbewegung festlegt. Vgl. Clairaut, Mémoires de l'Acad. des Sciences de Paris, 1736.

8. Aufgabe. *Ein schwerer Punkt P von der Masse m bewegt sich auf einem geraden Kreiszylinder, dessen Grundkreis den Radius a hat und dessen Achse um den Winkel α gegen die Vertikale geneigt ist. Die Bewegung zu untersuchen.*

Auflösung. Wir legen durch den Punkt P zwei Ebenen: eine, die durch die Zylinderachse geht, und eine senkrecht zu dieser Achse; φ sei der Winkel, den die erste Ebene mit der vertikalen Ebene durch die Achse bildet, r der Abstand der zweiten Ebene von einer zu ihr parallelen, festen Ebene, welche die Achse des Zylinders in O schneidet. Dann wird die kinetische Energie

$$T = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + a^2\dot{\varphi}^2).$$

ferner die vertikale Ordinate des Punktes P, wenn O der Ursprung ist,

$$z = r\cos\alpha + a\sin\alpha\cos\varphi$$

also der elementare Arbeitsausdruck

$$-mg\,dz = Q_r\,dr + Q_\varphi\,d\varphi$$

für

$$Q_r = -mg\frac{\partial z}{\partial r} = -mg\cos\alpha,$$

$$Q_\varphi = -mg\frac{\partial z}{\partial\varphi} = mg\,a\sin\alpha\sin\varphi.$$

Daraus folgt

$$\ddot r = -g\cos\alpha, \quad a^2\ddot\varphi = ag\sin\alpha\sin\varphi.$$

Die Bewegung längs der Achse ist gleichförmig beschleunigt mit der Beschleunigung $g\cos\alpha$, die Bewegung senkrecht zur Achse ist eine pendelnde Bewegung, bei der die Beschleunigung gleich $g\sin\varphi$ wird.

9. Aufgabe. *Zwei Massen m_1, m_2 bewegen sich auf zwei Geraden, die sich in einem Punkte O unter dem Winkel α schneiden, und ziehen sich an mit einer Kraft, die direkt proportional der Entfernung ist. Die Bewegung zu untersuchen.*

Auflösung. Wir nennen r_1, r_2 die Entfernungen der beiden Massen von O, r ihre gegenseitige Entfernung, dann wird die kinetische Energie

$$T = \tfrac{1}{2}(m_1\dot r_1^2 + m_2\dot r_2^2)$$

und der elementare Arbeitsausdruck

$$Q_1\,dr_1 + Q_2\,dr_2 = -k^2 r\,dr.$$

Es ergeben sich also, da

$$r\,dr = r_1\,dr_1 + r_2\,dr_2 - (r_2\,dr_1 + r_1\,dr_2)\cos\alpha$$

wird, die Gleichungen

$$\ddot r_1 = h_1^2(r_2\cos\alpha - r_1), \quad \ddot r_2 = h_2^2(r_1\cos\alpha - r_2),$$

wobei $h_1^2 = \frac{k^2}{m_1}$, $h_2^2 = \frac{k^2}{m_2}$ gesetzt ist. Eliminieren wir aus diesen beiden Gleichungen r_2 durch erneutes zweimaliges Differenzieren der ersten Gleichung, so finden wir

$$\frac{d^4 r_1}{dt^4} + (h_1^2 + h_2^2)\frac{d^2 r_1}{dt^2} + h_1^2 h_2^2\sin^2\alpha\cdot r_1 = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich durch einen Ausdruck von der Form

$$r_1 = A_1\cos\mu_1(t - t_1) + A_2\cos\mu_2(t - t_2)$$

integrieren. Die Bewegung ist also eine Superposition zweier harmonischen Bewegungen.

10. Aufgabe. *Auf zwei Geraden, die sich in O schneiden und in einer vertikalen Ebene liegen, bewegen sich zwei schwere Massen m_1, m_2, die durch einen biegsamen, unausdehnbaren und bei O über eine Rolle geführten Faden verbunden sind. Die Bewegung zu untersuchen.*

Auflösung. Wir setzen $Om_1 = x_1$, $Om_2 = x_2$, $x_1 + x_2 = l$ und nennen α_1, α_2 die Winkel, welche die Geraden mit der Vertikalen bilden, dann ergibt das d'Alembertsche Prinzip

$$m_1(\ddot{x}_1 - g\cos\alpha_1)\delta x_1 + m_2(\ddot{x}_2 - g\cos\alpha_2)\delta x_2 = 0.$$

Da aber $\delta x_2 = -\delta x_1$, $\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$ wird, folgt hieraus

$$\ddot{x}_1 = g\frac{m_1\cos\alpha_1 - m_2\cos\alpha_2}{m_1 + m_2}.$$

Da die Größe auf der rechten Seite konstant ist, wird die Bewegung gleichmäßig beschleunigt, im allgemeinen Falle, und gleichförmig, wenn $m_1\cos\alpha_1 = m_2\cos\alpha_2$ ist. Die gefundene Lösung gilt so lange, bis die eine Masse den Punkt O (d. h. die Rolle) erreicht hat.

11. Aufgabe. *Dasselbe Problem unter der Voraussetzung, daß die beiden Massen durch eine schwere homogene Kette, die bei O über eine Rolle geführt wird, ersetzt sind.*

Auflösung. Wir nennen dl das Längenelement und μdl das zugehörige Massenelement der Kette, dann ergibt das d'Alembertsche Prinzip, wenn x_1, x_2 die Entfernungen der Enden der Kette von O sind, wobei wieder $x_1 + x_2 = l$ wird,

$$\int_0^{x_1}\mu(\ddot{x}_1 - g\cos\alpha_1)\,dl = \int_0^{x_2}\mu(\ddot{x}_2 - g\cos\alpha_2)\,dl$$

woraus

$$\mu(\ddot{x}_1 - g\cos\alpha_1)x_1 = \mu(\ddot{x}_2 - g\cos\alpha_2)x_2,$$

und da wieder $x_2 = l - x_1$, $\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$,

$$l\ddot{x}_1 = g[x_1\cos\alpha_1 - (l - x_1)\cos\alpha_2].$$

Das Integral dieser Differentialgleichung lautet

$$x_1 = \frac{l\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2} + A\,\mathfrak{Cof}\,k(t - t_0),$$

wobei

$$k^2 = \frac{g(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)}{l}$$

gesetzt ist.

Viertes Kapitel.

Allgemeine Prinzipien der Bewegung eines materiellen Systems.

1. Arbeit. Potentielle Energie. Wenn ein materieller Punkt oder ein materielles System eine wirkliche Bewegung ausführt, so läßt der in der Statik für die virtuellen Verschiebungen aufgestellte Begriff der Arbeit sich sofort auch auf die effektiven Verschiebungen erweitern, welche die Punkte des Systems bei der Bewegung während des Zeitelementes dt wirklich erfahren. Wir haben dann, wenn F_i die auf den Punkt P_i des Systems wirkende Kraft ist, zu bilden den Ausdruck

$$F_i \times dP_i \tag{1}$$

und nennen ihn den elementaren Arbeitsausdruck.

Das Wort Arbeit ist dem täglichen Leben entlehnt und bezeichnet dort dem Sinne nach dasselbe, was hier damit ausgedrückt ist: bei allen mechanischen Arbeitsleistungen handelt es sich um die Bewegung eines Körpers gegen einen Widerstand, ob dieser nun von der Schwere, der Reibung, einem widerstehenden Mittel oder sonst einer Kraft herrührt. Wenn z. B. ein Kilogramm zur Höhe eines Meters über den Erdboden gehoben wird, so ist dazu eine gewisse Arbeitsmenge notwendig, deren Aufwendung uns durch das Muskelgefühl sofort wahrnehmbar gemacht wird; diese Menge heißt ein Kilogrammeter und bildet das technische Maß der Arbeit. Die Arbeit, die zum Heben eines Gewichtes von p Kilogramm nötig ist, ist dann p mal so groß, und dieselbe Arbeitsmenge wiederholt sich, so oft das Gewicht noch weiter um einen Meter gehoben wird, sie wird also $p \cdot h$ Kilogrammeter, wenn das Gewicht zur Höhe von h Metern gehoben wird. Allgemeiner können wir

sagen: die Arbeit, die bei der Bewegung um die Strecke s gegen eine dieser Bewegung genau entgegenwirkende Kraft von der Stärke f zu leisten ist, ist gleich $f \cdot s$ Arbeitseinheiten. Dieser aufgewendeten Arbeit ist die von der widerstehenden Kraft geleistete Arbeit entgegengesetzt gleich zu setzen.

Diese beiden besonderen Festsetzungen ordnen sich der allgemeineren Definition unter, daß bei einer Bewegung, die unter einem Winkel α gegen die Richtung der wirkenden Kraft erfolgt, der Arbeitsausdruck lauten soll

$$fs \cos \alpha$$

Daraus folgt z. B., daß zur Hebung eines Gewichtes um eine gewisse Höhe immer dieselbe Arbeit erforderlich ist, gleich gültig, ob man das Gewicht senkrecht in die Höhe hebt oder längs einer schiefen Ebene aufwärts bewegt.[1])

Aus dieser Definition ergibt sich dann der Ausdruck (1), wenn man nur ein unendlich kleines Bahnelement in Betracht zieht, um so einen auch für variable Kräfte geltenden Ansatz zu finden. Bilden wir das Integral des Ausdruckes (1) von einer Anfangslage a bis zu einer Endlage b, so erhalten wir den allgemeinen Arbeitsausdruck

$$W_{ab}^{(i)} = \int_a^b \mathbf{F}_i \times d\mathbf{P}_i \qquad (2)$$

für einen Punkt des Massensystems.

Um den analogen Arbeitsausdruck für das ganze Massensystem zu gewinnen, haben wir die Ausdrücke (1) für die einzelnen Punkte des Systems zu bilden und zu summieren, und erhalten für die elementare Arbeit den Ausdruck

$$dW = \sum \mathbf{F}_i \times d\mathbf{P}_i, \qquad (3)$$

wobei dW eine unendlich kleine Größe, aber nicht notwendig ein exaktes Differential bezeichnet.

1) Die Bezeichnung Arbeit (travail, work, lavoro) und ihre präzise Definition stammt von Coriolis, Traité de la mécanique, 1829, Préface. Die Betrachtungsweise der Mechanik, die durch diesen Begriff bedingt wird, hat dagegen schon Carnot eröffnet, Essai sur les machines en général, 1784.

Endlich wird die **totale Arbeit** für den Übergang des Systems aus der Anfangslage a in die Endlage b

$$W_{ab} = \int_a^b \sum F_i \times dP_i. \tag{4}$$

Im absoluten Maßsystem ist die Arbeitseinheit das **Erg**: es ist die Arbeit, die geleistet wird, wenn der Angriffspunkt einer Kraft, deren Intensität ein Dyn ist, sich in der Kraftrichtung um einen Zentimeter verschiebt. Die Dimensionsgleichung der Arbeit ist

$$[W] = [m, l^2, t^{-2}].$$

An einem Orte, an dem $g = 981$ (cm, sec^{-2}) ist, hat das Dyn den Wert des Grammgewichtes geteilt durch 981, d. h. 1,02 mg. Man kann also sagen, daß das Erg ungefähr gleich der Arbeit wird, die nötig ist, um ein Milligrammgewicht um einen Zentimeter zu heben. Man betrachtet, um praktisch nutzbare Einheiten zu haben, auch das

$$\text{Megaerg} = 10^6 \text{ Erg} = 1{,}02 \text{ (kg, cm)} = 0{,}0102 \text{ (kg, met)}$$

und das

$$\text{Joule} = 10 \text{ Megaerg} = 0{,}102 \text{ (kg, met)}.$$

Bei der Quadratur, die im allgemeinen den endlichen Arbeitsausdruck liefert, ist zu beachten, daß die Kräfte von der Lage und Geschwindigkeit der Angriffspunkte und außerdem von der Zeit abhängen; man muß daher, um die Quadratur ausführen zu können, zuvor Lage und Geschwindigkeit als Funktion der Zeit kennen, d. h. das Bewegungsproblem gelöst haben.

Sind indessen die Kräfte bloße Funktionen von der Lage der einzelnen Systempunkte und hängen weder von den Geschwindigkeiten noch direkt von der Zeit ab, so verwandelt sich auch der Integralausdruck (4) in einen solchen, der von der Zeit unabhängig ist und nur von der örtlichen Anordnung des Überganges aus der Anfangslage a in die Endlage b abhängt. Es ist aber keineswegs dies der einzige Fall, in dem der Arbeitsausdruck von der Zeit unabhängig wird. Dies tritt vielmehr z. B. auch ein, wenn F_i von der Form $f_i + u \wedge \dot{P}_i$

wird, wobei f_i eine willkürliche Vektorfunktion von P_i bezeichnet und u auch die Zeit enthalten kann; denn dann wird

$$F_i \times dP_i = f_i \times dP_i,$$

also von der Zeit unabhängig.

Die Fälle, welche die Natur darbietet, sind aber zum größten Teil noch viel einfacher; bei ihnen ist zur Berechnung der Arbeit überhaupt die Kenntnis der Bahnkurven nicht nötig, sondern der Arbeitsausdruck hängt lediglich von der Anfangslage und Endlage des Systems ab. Wir werden also dazu geführt, die Bedingungen aufzusuchen, unter denen die Arbeit von der Art des Überganges aus der Anfangs- in die Endlage völlig unabhängig wird.

Wir können dann

$$W_{ab} = \Pi(a, b)$$

setzen. Ist aber o eine beliebige dritte Lage, so können wir den Übergang aus der Lage a in die Lage o über die Lage b wählen und demgemäß setzen

$$\Pi(a, o) = \Pi(a, b) + \Pi(b, o).$$

Es folgt also, daß wir

$$W_{ab} = \Pi(a, o) - \Pi(b, o)$$

oder noch einfacher

$$W_{ab} = \Pi(a) - \Pi(b) \tag{5}$$

setzen können, indem wir allgemein

$$\Pi(p) = -\int_o^p \sum F_i \times dP_i$$

annehmen, wobei p eine beliebige Systemlage, o aber eine ein für allemal festgelegte Nullage bedeutet. Solche Systeme heißen konservative Systeme. Wir können sie auch durch die Eigenschaft charakterisieren, daß, sowie im Verlaufe der Bewegung das System in seine Anfangslage zurückgekehrt, die insgesamt aufgewendete Arbeit gleich Null wird.

Ersetzen wir die allgemeine Lage p durch eine unendlich nahe benachbarte Lage $p + dp$, so ergibt sich

$$-\sum F_i \times dP_i = \Pi(p + dp) - \Pi(p) = d\Pi(p), \tag{6}$$

es wird also hier die elementare Arbeit ein vollständiges Differential.

Die Funktion $\Pi(p)$ der Systemlage p heißt in diesem Falle die potentielle Energie des Systems. Wir können also die Gleichung (5) auch in Worte kleiden, indem wir sagen: die geleistete Arbeit ist bei einem konservativen System gleich der Abnahme der potentiellen Energie.

Da die Nullage o willkürlich bleibt, ist die potentielle Energie nur bis auf eine additive Konstante bestimmt.

2. Beispiele konservativer Systeme. Wir haben drei Fälle konservativer Systeme besonders hervorzuheben. Der erste Fall ist der, wo die Bedingungen des Systems dadurch gegeben sind, daß die Lage der Systempunkte in jedem Augenblick durch k unabhängige Parameter festgelegt wird. Dann nimmt die Gleichung (6) die folgende Form an

$$\sum F_i \times dP_i = - d\Pi(q_1, q_2, \ldots, q_k),$$

denn Π als Funktion der Systemlage muß eine Funktion der diese Systemlage festlegenden Parameter sein. Wir hatten im vorigen Kapitel aber gefunden

$$\sum F_i \times dP_i = \sum Q_\varrho dq_\varrho,$$

und sonach ergibt sich

$$\sum Q_\varrho dq_\varrho = - d\Pi(q_1, \ldots, q_k).$$

Daraus folgt

$$Q_\varrho = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_\varrho},$$

die allgemeine Kraftkomponente Q_ϱ ist also gleich der negativen Derivierten der potentiellen Energie nach der entsprechenden Koordinate q_ϱ. Gleichzeitig rechtfertigt sich jetzt die Bezeichnung von Q_ϱ als allgemeine Kraftkomponente, denn wenn nur der Parameter q_ϱ um dq_ϱ vermehrt wird, alle anderen Parameter aber ungeändert bleiben, so wird die Arbeit

$$Q_\varrho dq_\varrho,$$

Q_ϱ tritt also ebenso wie ursprünglich die Kraftkomponente, in dem Arbeitsausdruck als der Faktor der Wegkomponente auf.

Zu dem zweiten Falle, den wir betrachten wollen, gelangen wir, indem wir die Forderung aufstellen, daß der elementare Arbeitsausdruck ein exaktes Differential werden soll unabhängig von den Bedingungen des Systems und unabhängig auch von seiner Zusammensetzung. Es muß dann der Arbeitsausdruck für jeden einzelnen Punkt des Systems ein exaktes Differential werden. Man findet also

$$F_i \times dP_i = dU_i$$

oder

$$F_i = \text{grad } U_i.$$

Die Funktionen U_i sind im allgemeinen verschieden für die einzelnen Massenpunkte des Systems, nehmen wir aber

$$\frac{U_1}{m_1} = \frac{U_2}{m_2} = \cdots = U$$

an, so hängen die Kräfte nicht mehr an den einzelnen Massenpunkten als bestimmten Individuen, sondern nur an dem Ort, den die Massenpunkte augenblicklich einnehmen; die Massenpunkte des Systems befinden sich in einem bestimmten Kraftfeld, und dies Kraftfeld besitzt ein Potential U. Das ist z. B. der Fall, wenn das Massensystem im Bereich der Erde der Schwere unterworfen ist; es hat dann das Potential den einfachen Ausdruck

$$U = -gz,$$

wenn z die Höhe über einem Normalniveau bezeichnet.

In dem Falle, wo ein Massenpunkt einer konstanten Kraft unterworfen ist, sprechen wir von einem gleichförmigen Feld; bedeutet dann k einen zu der Kraft parallelen und gleichsinnigen Einheitsvektor, der die Feldrichtung angibt, und ist f die Intensität der Kraft oder die Feldintensität, so haben wir

$$W_{ab} = \int_a^b fk \times dP$$

und daraus

$$W_{ab} = f(P_b - P_a) \times k,$$

wenn P_a, P_b Anfangs- und Endlage des Punktes bezeichnen. Aber $(P_b - P_a) \times k$ ist die Projektion des Vektors $P_b - P_a$

auf k, der Arbeitsausdruck hängt also nur von der Entfernung der beiden Ebenen ab, die man durch P_a und P_b senkrecht zu k legt; er ist unabhängig von der Lage der beiden Punkte in diesen Ebenen und von der Bahnkurve. Die Ebenen heißen Niveauflächen und ihre Normalen, welche die Feldrichtung liefern, heißen die Kraftlinien des Feldes. Der Fall der Schwere gehört hierzu.

Nehmen wir dagegen einen Punkt, der einer nach einem festen Zentrum O hin gerichteten Kraft unterworfen ist, und sei diese Kraft eine Funktion $f(r)$ allein von der Entfernung r des Punktes und des festen Zentrums. Der elementare Arbeitsausdruck wird dann

$$\varphi(r)\frac{P-O}{r}\times dP = \varphi(r)\,dr$$

und daraus folgt

$$W_{ab} = \int_a^b \varphi(r)\,dr.$$

Die Niveauflächen sind hier konzentrische Kugeln mit dem Mittelpunkt O, die Kraftlinien sind die Radien, die Arbeit, die beim Übergang von P_a nach P_b verrichtet wird, hängt nur von den Radien a, b der durch P_a und P_b hindurchgehenden Kugeln ab, sie ist unabhängig von der Lage der Punkte auf diesen Kugeln und von der Bahnkurve.

Von hier aus ist der Übergang zu dem dritten allgemeinen Falle, den wir besonders besprechen wollen, sehr naheliegend. Es ist der, wo die wirkenden Kräfte Zentralkräfte sind, d. h. wo

$$F_i = \sum_j F_{ij}$$

und

$$F_{ij} = m_i m_j \frac{\varphi(r_{ij})}{r_{ij}}(P_i - P_j)$$

für $r_{ij} = \mathrm{mod}\,(P_i - P_j)$ wird. Dies bedeutet, daß die auf den Punkt P_i wirkende Kraft F_i die Resultante einer Reihe von Kräften ist, die in den Verbindungslinien dieses Punktes mit den übrigen Systempunkten wirken. Die Größen dieser Kräfte sind $m_i m_j \varphi(r_{ij})$, sie sind also den Massen proportional und

werden im übrigen allein durch die Entfernung der betreffenden beiden Punkte bestimmt, so daß die auf den Punkt i wirkende und in die Verbindungslinie mit dem Punkte j fallende Kraft entgegengesetzt gleich wird der auf den letzteren Punkt wirkenden und in dieselbe Verbindungslinie fallenden Kraft. Wir finden dann

$$\begin{aligned}\sum_i F_i \times dP_i &= \sum_i (dP_i \times \sum_j F_{ij}) \\ &= \sum_i m_i \, dP_i \sum_j m_j \frac{\varphi(r_{ij})}{r_{ij}} (P_i - P_j) \\ &= \sum_{ij} m_i m_j \frac{\varphi(r_{ij})}{r_{ij}} (P_i - P_j) \times (dP_i - dP_j) \\ &= \sum_{ij} m_i m_j \frac{\varphi(r_{ij})}{2 r_{ij}} d(P_i - P_j)^2 = \sum_{ij} m_i m_j \varphi(r_{ij}) dr_{ij},\end{aligned}$$

und dies ist in der Tat ein vollständiges Differential. Wir wollen ferner annehmen, daß $\varphi(r)$ zwischen r und ∞ integrierbar ist, dann können wir setzen

$$\sum F_i \times dP_i = -d\mathfrak{P}$$

für

$$\mathfrak{P} = \sum_{ij} m_i m_j \int_{r_{ij}}^{\infty} \varphi(r)\, dr.$$

Man sieht dann sofort, daß der Ausdruck für die Gesamtarbeit gleich $\mathfrak{P}$ wird, wenn man der Reihe nach alle Punkte des Systems in unendliche Entfernung bringt, d. h. das Selbstpotential $\mathfrak{P}$ des Systems ist die Arbeit, die von den Kräften verrichtet wird, wenn das System aus der betrachteten Lage in unendliche Zerstreuung übergeht.

Die vorstehenden Betrachtungen lassen sich sofort auf zwei Systeme ausdehnen, die eine Einwirkung aufeinander ausüben. Wenn wir die Massen des einen mit m_i, die des anderen mit m_j' bezeichnen, so haben wir jetzt den Ausdruck zu bilden

$$\mathfrak{Q} = \sum_i \sum_j m_i m'_j \int_{r_{ij}}^{\infty} \varphi(r)\, dr,$$

er bedeutet die Arbeit, die verrichtet wird, wenn die beiden

Systeme in unendliche Entfernung von einander übergehen. Anderseits stellt $-\Omega$ die Arbeit dar, die verrichtet wird, wenn man die beiden Systeme aus unendlicher Entfernung einander bis zu der betrachteten gegenseitigen Lage nähert. Dieser Ausdruck $-\Omega$ heißt dann das gegenseitige Potential der beiden Systeme. Man kann aber schreiben

$$\Omega = \sum_j m_j' U(P_j),$$

indem man

$$U(P) = \sum_i m_i \int_{r_i}^{\infty} \varphi(r) \cdot dr$$

setzt, wobei die r_i die Entfernungen des Punktes P von den einzelnen Massen m_i des ersten Massensystems bezeichnen. Diese skalare Funktion des Punktes P heißt dann die Potentialfunktion des Systems, und wir können sagen: Der Wert der Potentialfunktion für einen Punkt P ist gleich dem gegenseitigen Potential des vorgelegten Massensystems und der in dem Punkte P konzentrierten Masse 1; oder auch: der Wert der Potentialfunktion in einem Punkte P ist gleich der Arbeit, die von den Zentralkräften verrichtet wird, wenn die Masse 1 aus unendlicher Entfernung in die Lage P gebracht wird.

Der Gradient des Potentials liefert die Kraft, die das Massensystem auf die Masse 1 im Punkte P ausübt.

Sind die Kräfte Newtonsche Attraktionskräfte, so wird

$$\varphi(r) = \frac{f}{r^2}$$

und mithin

$$\int_r^{\infty} \varphi(r)\, dr = f \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{f}{r},$$

woraus

$$U = f \sum \frac{m_i}{r_i}$$

folgt. Im Falle kontinuierlich ausgebreiteter Massen verwandelt sich diese Summe in ein Integral.

3. Die kinetische Energie. Satz von der Erhaltung der Energie. Bei der Bewegung eines freien oder an eine feste Fläche oder Kurve gefesselten Punktes wird

$$F \times dP = m\ddot{P} \times dP = d(\tfrac{1}{2} m \dot{P}^2),$$

woraus

$$\int_a^b F \times dP = \tfrac{1}{2} m v_b^2 - \tfrac{1}{2} m v_a^2.$$

Diese Gleichung wollen wir jetzt auf Massensysteme zu übertragen suchen und wollen deswegen wie im vorigen Kapitel

$$\sum \tfrac{1}{2} m_i \dot{P}_i^2 = T$$

setzen und als die kinetische Energie des Systems bezeichnen. Dieser Ausdruck hat die Dimensionen $[m, l^2, t^{-2}]$ ebenso wie die Arbeit. Die kinetische Energie ist die halbe Summe der Produkte der Massen aller Punkte des Systems mit den Quadraten ihrer Geschwindigkeiten zu einer bestimmten Zeit t.

Differenzieren wir die vorstehende Gleichung nach der Zeit, so ergibt sich

$$\frac{dT}{dt} = \sum m_i \dot{P}_i \times \ddot{P}_i$$

oder

$$dT = \sum m_i \ddot{P}_i \times dP_i, \tag{7}$$

d. h. die Zunahme der kinetischen Energie ist gleich der elementaren Arbeit der Trägheitskräfte.

Bezeichnen wir mit S den Schwerpunkt des Systems und mit $\dot{P}_i^{(r)} = \dot{P}_i - \dot{S}$ die Relativgeschwindigkeit des Punktes P_i in bezug auf den Schwerpunkt, so finden wir, da

$$\sum m_i (P_i - S) = 0, \text{ also auch } \sum m_i (\dot{P}_i - \dot{S}) = \sum m_i \dot{P}_i^{(r)} = 0$$

ist,

$$2T = \sum m_i (\dot{P}_i^{(r)} + \dot{S})^2 = \sum m_i \dot{P}_i^{(r)2} + \sum m_i \cdot \dot{S}^2:$$

die kinetische Energie des Systems ist gleich der kinetischen Energie der Relativbewegung gegen den Schwerpunkt, vermehrt um die kinetische Energie der

in dem Schwerpunkte konzentrierten und mit dem Schwerpunkte bewegten Gesamtmasse.

Wir subtrahieren jetzt die Gleichungen (7) und (3) und erhalten

$$dT - dW = \sum (m_i \ddot{P}_i - F_i) \times dP_i.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist genau analog dem Ausdruck, der nach dem d'Alembertschen Prinzipe verschwinden soll, nur ist hier δP_i durch dP_i ersetzt. Wir fragen demnach, unter welchen Bedingungen zu den virtuellen Verschiebungen δP_i auch die wirkliche Verschiebung dP_i gehört.

Wir beschränken uns auf die Betrachtung holonomer Systeme und nehmen an, es sei eine der Bedingungsgleichungen von der Form

$$\mathfrak{L}(\!(x_i, y_i, z_i, t)\!) = 0,$$

woraus sich für die Komponenten δx_i, δy_i, δz_i der virtuellen Verschiebung die Bedingung ergibt

$$\sum \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0.$$

Dagegen muß die wirkliche Verschiebung in dem Zeitelement dt derart sein, daß

$$\mathfrak{L}(\!(x_i + dx_i, y_i + dy_i, z_i + dz_i, t + dt)\!) = 0$$

wird, also

$$\sum \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z_i} dz_i \right) + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} dt = 0.$$

Soll man also $\delta x_i = dx_i$, $\delta y_i = dy_i$, $\delta z_i = dz_i$ annehmen dürfen, so muß $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = 0$ werden, und umgekehrt, und da dasselbe für jede andere Bedingungsgleichung gilt, schließen wir:

Damit unter den umkehrbaren virtuellen Verschiebungen eines materiellen holonomen Systems auch die wirkliche Verschiebung enthalten sei, ist notwendig und hinreichend, daß die Bedingungsgleichungen die Zeit nicht explizite enthalten.

Man kann deshalb bei den Systemen, für die $\delta P_i = dP_i$ angenommen werden kann, sagen, daß die Bedingungen von der Zeit unabhängig sind.

Bei einem solchen System ergibt sich nun

$$dT - dW = 0 \quad \text{oder} \quad W_{ab} = T_b - T_a, \tag{8}$$

wenn wir die kinetische Energie in der Anfangslage mit T_a und in der Endlage mit T_b bezeichnen, oder:

In einem System, dessen Bedingungen von der Zeit unabhängig sind, ist die Zunahme der kinetischen Energie gleich der von den äußeren Kräften bei dem Übergange aus der Anfangslage a in die Endlage b verrichteten Arbeit.

Die Arbeit wird auf diese Weise ausgedrückt durch die Geschwindigkeiten der einzelnen Systempunkte in der Anfangs- und in der Endlage.

Nehmen wir nun an, das System sei ein konservatives, so wird nach (5) $W_{ab} = \Pi(a) - \Pi(b)$ und somit folgt aus (8)

$$\Pi(b) + T_b = \Pi(a) + T_a.$$

Die Größe $\Pi + T$ ist also, da sie für zwei beliebige Zeitpunkte bei der Bewegung dieselbe ist, unabhängig von der Zeit und wir können sagen:

In einem konservativen System, dessen Bedingungen von der Zeit unabhängig sind, ist die Summe der potentiellen und der kinetischen Energie, d. h. die gesamte Energie des Systems, konstant während des ganzen Verlaufes der Bewegung.

Diese Energie ist also eine Quantität, die weder vermehrt noch vermindert werden kann: die kinetische Energie nimmt um ebensoviel zu oder ab, wie die potentielle Energie ab- oder zunimmt. Man kann dies auch so ausdrücken, daß man sagt, die eine Energieart transformiert sich in die andere, aus Arbeit wird kinetische Energie gewonnen oder kinetische Energie löst sich in Arbeit auf.

Dies ist das Prinzip der Erhaltung der Energie, das in seiner Ausdehnung auf alle Naturerscheinungen als ein grundlegendes Prinzip der Naturbetrachtung aufgestellt worden ist.[1])

1) Als mechanischen Satz hat das Prinzip zuerst Huygens in seinem Horologium oscillatorium (Pars IV, prop. 4) für das zusammen-

Bei der Bewegung eines Systems unter der Einwirkung von Zentralkräften ergibt sich

$$T + \mathfrak{P} = T_0 + \mathfrak{P}_0,$$

wo $\mathfrak{P}$ den oben eingeführten Ausdruck bedeutet und der Index 0 sich auf einen Anfangszustand bezieht.

Im allgemeinen ergibt sich die Relation

$$\Pi + T = h, \tag{9}$$

wobei h von der Zeit unabhängig ist, und diese Gleichung ist als ein erstes Integral der Bewegungsgleichungen aufzufassen, das bezüglich der Geschwindigkeiten vom zweiten Grade ist.

Ist die Lage des Systems von einem einzigen Parameter q abhängig, d. h. hat das System nur einen Freiheitsgrad, so wird

$$\Pi = -\int Q\,dq,$$

wobei Q eine Funktion von q ist, und außerdem

$$2T = \sum \left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial q}\right)^2\right]\dot{q}^2 = \dot{q}^2 F(q).$$

Dann liefert die Gleichung (9) sofort eine Differentialgleichung erster Ordnung, aus der man durch Quadratur q als Funktion von t ableiten kann, so daß das eine Integral (9) die Lösung des ganzen Problems liefert. Dies wird benutzt bei zwangläufigen Maschinen, bei der Bewegung eines Körpers um eine feste Achse, bei der Bewegung eines Punktes auf einer festen Kurve usw.

Allgemeiner läßt sich zeigen: Wenn in einem System mit k Freiheitsgraden das Prinzip der Erhaltung der Energie gilt, so läßt sich die Integration der Bewegungsgleichungen zurückführen auf die für ein System mit $k-1$ Freiheitsgraden, für das aber im

---

gesetzte Pendel benutzt, weitere Beispiele gab Joh. Bernoulli, Commentarii Petrop. t. 2 (1727), p. 200; allgemein behandelte es D. Bernoulli, Mém. de l'Acad. de Berlin 1748, p. 356. Vgl. die Bemerkungen von Helmholtz in der Neuausgabe seiner *Erhaltung der Kraft* (Ostwalds Klassiker Nr. 1).

allgemeinen das Integral der Erhaltung der Energie nicht mehr besteht.

Und es folgt weiter: Die Bewegung eines Systems mit k Freiheitsgraden, das konservativen Kräften unterworfen ist und außerdem $k-1$ verborgene Koordinaten besitzt, läßt sich auf Quadraturen zurückführen.[1])

Im Falle eines einzigen Punktes kann man aus (9) ableiten

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \Pi = h;$$

die Flächen $\Pi =$ konst. sind die Niveauflächen des Potentials, und aus der über Π gemachten Voraussetzung kann man folgern, daß zwei Niveauflächen sich nie schneiden.

Der bewegliche Punkt trifft zufolge der vorstehenden Gleichung bei gegebener Anfangslage dieselbe Niveaufläche immer mit derselben Geschwindigkeit. Im Falle der Schwere sind diese Flächen horizontale Ebenen, und daraus folgt ein bekannter Satz über die aus bestimmter Höhe auf verschiedenen Bahnen fallenden Körper.

Analoge Folgerungen lassen sich bezüglich der Stoßkräfte ziehen, indem man von der Grundgleichung

$$\sum[\mathfrak{F}_i - \Delta(m_i \dot{P}_i)] \times \delta P_i = 0$$

ausgeht. Nehmen wir an, daß die Bedingungen unmittelbar nach dem Stoß dieselben seien wie vorher und sonach unter den unendlich vielen mit den Bedingungen verträglichen Verschiebungen auch die wirkliche Verschiebung enthalten sei, wie sie in einem bestimmten Augenblicke während des Stoßes eintritt, wählen wir dann für diese Verschiebung die Ortsänderung während des letzten Augenblickes dt des Stoßes, die wir mit $\dot{P}_{i+}\,dt$ bezeichnen wollen, während die Verschiebung in dem ersten Zeitelement dt des Stoßes $\dot{P}_{i-}\,dt$ sei, dann wird die vorige Gleichung

$$\sum[\mathfrak{F}_i + m_i \dot{P}_{i-} - m_i \dot{P}_{i+}] \times \dot{P}_{i+} = 0.$$

1) Whittaker, Messenger of Math. (2) Vol. 30 (1900), p. 93, Analytical Dynamics, Cambridge 1904, p. 63 seq.

Wir wollen nun voraussetzen, statt des Stoßes werden plötzlich neue Fesselungen des Systems eingeführt, ohne daß eine eigentliche Stoßwirkung eintritt, dann haben wir $\mathfrak{F}_i = 0$ zu setzen und finden

$$\sum (m_i \dot{P}_{i-} - m_i \dot{P}_{i+}) \times \dot{P}_{i+} = 0$$

oder

$$\sum m_i \dot{P}_{i+} \times \dot{P}_{i-} = \sum m_i \dot{P}_{i+}^2$$

oder

$$\sum m_i (\dot{P}_{i+} - \dot{P}_{i-})^2 = \sum m_i (\dot{P}_{i-} - \dot{P}_{i+}) \times \dot{P}_{i-} = \sum m_i \dot{P}_{i-}^2 - \sum m_i \dot{P}_{i+}^2.$$

So ergibt sich das Theorem von Carnot: Die kinetische Energie der verlorenen Bewegung ist gleich der verlorenen kinetischen Energie.

4. Stabilität des Gleichgewichtes. Die vorstehenden Betrachtungen erlauben nun ein schon in der Statik benutztes Prinzip exakt zu begründen. Es seien $q_1, q_2, \ldots, q_k$ die allgemeinen Koordinaten eines Systems, dessen Bedingungen von der Zeit unabhängig sind, Π die potentielle Energie oder das Entgegengesetzte der Kräftefunktion U, die eine Funktion aller der q ist. In einer Lage α, für welche q_i den Wert a_i haben möge, werde Π ein Minimum, und wir können, da Π nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, annehmen, dieses Minimum sei 0. Dann können wir, etwa indem wir

$$(q_1 - a_1)^2 + (q_2 - a_2)^2 + \cdots + (q_k - a_k)^2 < \varepsilon^2$$

fordern, um die Lage α ein Gebiet benachbarter Lagen abgrenzen, innerhalb dessen Π nur positive Werte hat. Die Grenze dieses Gebietes wird durch die Gesamtheit der Lagen gebildet, für die

$$(q_1 - a_1)^2 + (q_2 - a_2)^2 + \cdots + (q_k - a_k)^2 = \varepsilon^2$$

ist. Im Bereich dieser Lagen sei $\mathfrak{m}$ der kleinste Wert, den Π annimmt. Wir entfernen nun das System aus der Lage, für die $\Pi = 0$ wird, ein wenig, indem wir den Punkten des Systems eine geringe Geschwindigkeit erteilen. Dies können wir immer so einrichten, daß für die so erreichte potentielle Energie Π_0 und die kinetische Energie T_0 die Beziehung gilt

$$T_0 + \Pi_0 < \mathfrak{m}.$$

Das System wird nun anfangen, sich zu bewegen, und dabei wird $T + \Pi = T_0 + \Pi_0$, also

$$T + \Pi < \mathfrak{m}$$

und da notwendig $T > 0$, auch

$$\Pi < \mathfrak{m}$$

bleiben. Es ist also nicht möglich, daß die Lage des Systems aus dem abgegrenzten Bereich heraustritt, da, wenn sie die Grenze dieses Bereiches passierte, $\Pi \geqq \mathfrak{m}$ werden müßte. Die Bewegung bleibt mithin immer in der Nähe der Minimumslage α. Aus dieser Lage heraus kann aber, wenn das System zu Anfang in Ruhe ist, überhaupt keine Bewegung eintreten, denn wenn $\Pi_0 = 0$ und $T_0 = 0$ ist, so bleibt während der ganzen Bewegung $T + \Pi = 0$, also da Π in der Umgebung von α nur positive Werte haben kann, muß $\Pi = 0$ und $T = 0$ sein, d. h. es tritt überhaupt keine Bewegung ein.

Das System ist also in einer Lage, für welche die potentielle Energie ein Minimum wird, in stabilem Gleichgewichte.[1])

Es ist ferner bewiesen worden, daß, wenn Π in der Gleichgewichtslage ein Maximum ist und die Existenz eines solchen Maximums sich aus den Gliedern niedrigster Ordnung in der Entwicklung von Π erkennen läßt, das Gleichgewicht instabil ist.[2])

Wenn hingegen Π weder ein Maximum noch ein Minimum ist, so läßt sich nichts mit Sicherheit aussagen, so ist z. B., wenn das Nichtvorhandensein des Minimums sich aus den Gliedern zweiter Ordnung in der Entwicklung von Π erkennen

---

1) Lagrange, Mécanique anal., Œuvres Vol. 11, p. 67 u. 457. Der allgemeine, strenge Beweis wurde gegeben von Minding, Mechanik, Berlin 1838, S. 268 und Lejeune-Dirichlet, Journ. für Math. Bd. 32, S. 85 (1846), Werke Bd. 2, S. 3. Daß Π von allen q_ϱ abhängen muß, findet man bei Appell, Mécanique rationnelle, T. II, p. 353.

2) Liapunoff, Journal de Math. (5) t. 3 (1897), p. 81; Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (2) t. 9, pp. 203—474 (1908), insbesondere p. 295, und Hadamard, Journal de Math. (5) t. 3 (1897), p. 331—387, insbesondere p. 364; Kneser, Journ. für Math. Bd. 115, S. 308 (1895), Bd. 118, S. 186 (1897).

läßt, das Gleichgewicht instabil, während allgemeine Fälle bekannt sind, in denen, trotzdem kein Minimum vorhanden ist, doch das Gleichgewicht stabil ist.[1])

5. Der Impuls eines Systems. Schwerpunkt- und Flächensatz. Wir betrachten die Impulse $m_i \dot{P}_i$ eines irgendwelchen Bedingungen unterworfenen Systems; sie vereinigen sich zu dem Impulssystem, das dem materiellen System von der Ruhelage ausgehend augenblicklich die Geschwindigkeiten verleiht, die seine Punkte zur Zeit t besitzen. Wir nennen dies Impulssystem den Impuls des materiellen Systems zur Zeit t.

Mit $\boldsymbol{R}$ bezeichnen wir den resultierenden Impulsvektor, mit $\boldsymbol{M}$ das resultierende Impulsmoment bezüglich eines festen Punktes O, wir setzen demnach

$$\boldsymbol{R} = \sum m_i \dot{P}_i, \quad \boldsymbol{M} = \sum m_i (P_i - O) \wedge \dot{P}_i \tag{10}$$

und nennen $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{M}$ die Vektorkoordinaten des Impulses.

Eine erste Eigenschaft des Impulses ist die folgende: Der Impulsvektor ist gleich dem Impuls des Schwerpunktes, wenn man sich in diesem die ganze Masse des Systems konzentriert denkt.

Es folgt dies unmittelbar aus der Gleichung

$$(S - O) \sum m_i = \sum m_i (P_i - O),$$

aus der wir durch Differentiation nach der Zeit erhalten

$$\dot{S} \sum m_i = \boldsymbol{R}. \tag{11}$$

Mit $\mathfrak{R}$ wollen wir ferner die Resultante der äußeren Kräfte bezeichnen und mit $\mathfrak{M}$ ihr Moment für den Punkt O, wir setzen also

$$\mathfrak{R} = \sum \boldsymbol{F}_i, \quad \mathfrak{M} = \sum (P_i - O) \wedge \boldsymbol{F}_i. \tag{12}$$

Wir beweisen nun einige grundlegende Eigenschaften des Impulses.

1. Wenn die Bedingungen des Systems eine um-

1) Liapunoff, a. a. O.; Painlevé, Comptes Rendus t. 125, p. 1021 (1897), t. 138 p. 1555 (1904); Hamel, Math. Ann. Bd. 57, S. 541 (1903).

kehrbare virtuelle Verschiebung zulassen, die in einer Translation von bestimmter Richtung besteht, so ist die Derivierte der Komponente des Impulsvektors nach dieser Richtung gleich der Komponente der Resultante aller äußeren Kräfte nach derselben Richtung.

Zum Beweise gehen wir aus von der Gleichung des d'Alembertschen Prinzips

$$\sum (\boldsymbol{F}_i - m_i \ddot{\boldsymbol{P}}_i) \times \delta \boldsymbol{P}_i = 0$$

und setzen hierin der Voraussetzung gemäß, indem wir mit $\boldsymbol{a}$ einen Einheitsvektor in der gegebenen Richtung und mit k eine konstante Zahl bezeichnen

$$\delta \boldsymbol{P}_i = k\boldsymbol{a},$$

dann erhalten wir

$$\sum m_i \ddot{\boldsymbol{P}}_i \times \boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}_i \times \boldsymbol{a}$$

und mithin nach (10) und (12)

$$\frac{d(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{a})}{dt} = \mathfrak{R} \times \boldsymbol{a},$$

woraus der Satz folgt.

2. Wenn die Bedingung des vorstehenden Satzes für drei willkürliche, nicht einer Ebene angehörende Richtungen erfüllt ist, so wird die Derivierte des Impulses selbst gleich der Resultante der äußeren Kräfte, also

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \mathfrak{R}. \tag{13}$$

Weil dann nämlich aus den in die drei Richtungen fallenden Einheitsvektoren sich jeder andere Einheitsvektor linear zusammensetzen läßt, kann in der obigen Gleichung jetzt $\boldsymbol{a}$ einen willkürlichen Einheitsvektor bedeuten, und die Gleichung muß unabhängig von der Wahl dieses Einheitsvektors erfüllt sein, woraus sofort die Formel (13) folgt.

3. Unter der Voraussetzung des vorigen Satzes bewegt sich der Schwerpunkt des Massensystems so, als ob in ihm die ganze Masse des Systems konzentriert

wäre und die Resultante der äußeren Kräfte auf ihn wirkte.

Mit Rücksicht auf (11) kann (13) in der Tat geschrieben werden

$$\ddot{S}\sum m_i = \mathfrak{R}. \tag{14}$$

Wir müssen hier indes bemerken, daß im allgemeinen $\mathfrak{R}$ von der Lage und der Geschwindigkeit der einzelnen Punkte des Systems abhängt, die sich durch die Koordinaten und die Geschwindigkeitskomponenten von S nicht ausdrücken lassen, da ja ein und derselbe Punkt Schwerpunkt von unbegrenzt vielen Massensystemen sein kann. Die Gleichung (14) drückt daher zwar eine bemerkenswerte Eigenschaft des Schwerpunktes aus, daß nämlich die Bewegung eines solchen Punktes sich nicht ändert, wenn das materielle System durch irgend ein anderes von gleicher Masse und mit demselben Schwerpunkte ersetzt wird, wofern nur dabei die Resultante der äußeren Kräfte dieselbe bleibt; aber diese Eigenschaft gestattet nicht, die Bewegung des Schwerpunktes unabhängig zu bestimmen.

Der ausgesprochene Satz heißt das Prinzip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes oder kurz das Prinzip des Schwerpunktes. Wir folgern nun weiter:

4. Wenn unter der Voraussetzung des zweiten Satzes die Resultante der äußeren Kräfte verschwindet, so ist der Impuls konstant und der Schwerpunkt bewegt sich gleichförmig in gerader Linie oder befindet sich in Ruhe.

Wenn nämlich $\mathfrak{R} = 0$ wird, so folgt aus (13) und (14)

$$\boldsymbol{R} = \text{konst.}, \quad \ddot{S} = 0. \tag{15}$$

Die letzte Eigenschaft führt sofort dazu, in diesem Falle die sechs Schwerpunktsintegrale anzugeben, indem sich für ein festes Achsenkreuz durch zweimalige Integration ergibt

$$\left.\begin{aligned} \sum m_i\dot{x}_i = a, \quad \sum m_i\dot{y}_i = b, \quad \sum m_i\dot{z}_i = c, \\ \sum m_i x_i = at + a', \quad \sum m_i y_i = bt + b', \quad \sum m_i z_i = ct + c'. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Diese Integrale sind algebraisch und linear für die Geschwindigkeitskomponenten und die Koordinaten.

Wir wollen noch bemerken, daß in dem Falle, wo die Bedingungen eine Translation längs der x-Achse zulassen und außerdem $\mathfrak{R} \times e_1 = 0$ wird, wir nur die zwei Integrale haben

$$\sum m_i \dot{x}_i = a, \quad \sum m_i x_i = at + a'.$$ [1]

Genau analoge Sätze lassen sich nun auch für das Impulsmoment ableiten. Zunächst beweisen wir:

5. **Wenn die Bedingungen des Systems eine umkehrbare virtuelle Verschiebung zulassen, die in einer Drehung um eine durch den Punkt O gehende feste Achse besteht, dann wird die Derivierte der Komponente des Impulsmomentes bezüglich dieser Achse gleich der Komponente des Momentes der äußeren Kräfte für dieselbe Achse.**

Ist a ein Einheitsvektor von der Richtung der Achse, k eine konstante Zahl, so können wir in die Gleichung des d'Alembertschen Prinzips einsetzen

$$\delta P_i = ka \wedge (P_i - O)$$

und finden

$$\sum m_i \ddot{P}_i \times a \wedge (P_i - O) = \sum F_i \times a \wedge (P_i - O)$$

oder

$$a \times \sum m_i (P_i - O) \wedge \ddot{P}_i = a \times \sum (P_i - O) \wedge F_i,$$

folglich

$$\frac{d(M \times a)}{dt} = \mathfrak{M} \times a. \tag{17}$$

6. **Wenn die Bedingung des vorstehenden Satzes für irgend zwei durch O gehende Achsen erfüllt ist, so wird die Derivierte des Impulsmomentes gleich dem Moment der äußeren Kräfte für den Punkt O, also**

$$\frac{dM}{dt} = \mathfrak{M}. \tag{18}$$

---

1) Newton, Philos. natur. princ. math. Lib. I, p. 17; d'Alembert, Traité de Dynamique, 2. partie, Chap. II; Lagrange, Méc. anal. I Œuvres t. 11, p. 277.

In der Tat ist dann a willkürlich, und aus (17) folgt sofort (18).

7. **Wenn unter der Voraussetzung des vorigen Satzes das Moment der äußeren Kräfte verschwindet, so ist das Impulsmoment konstant.** Denn aus $\mathfrak{M} = 0$ folgt für die ganze Dauer der Bewegung

$$M = \text{konst.}$$

Den bisher gewonnenen Resultaten lassen sich noch andere bemerkenswerte Deutungen geben. Zunächst deuten wir die Größe $M \times a$, die in den Formeln (17) erscheint. Wir projizieren die Punkte P_i und $P_i + \dot{P}_i$ auf eine zu dem Vektor a senkrechte Ebene in die Punkte Q_i und Q_i'; es ist aber

$$a \times M = \sum m_i a \times (P_i - O) \wedge \dot{P}_i,$$

dabei bedeutet $a \times (P_i - O) \wedge \dot{P}_i$ das Volumen des Parallelepipeds, von dem die Vektoren a, $P_i - O$, $\dot{P}_i$ drei Kanten bilden, und dies Volumen hat zur Maßzahl den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks $O Q_i Q_i'$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{A}_i$ die Fläche, die von dem Vektor $O Q_i$ in der zur a senkrechten Ebene durchstrichen

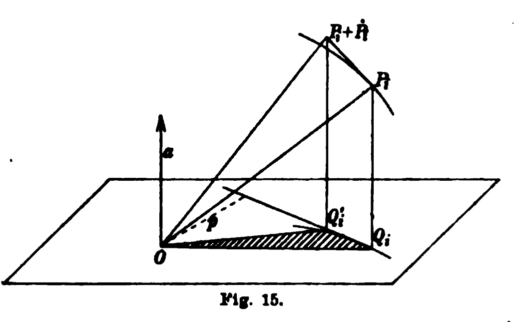


Fig. 15.

wird, von irgend einem Anfangsvektor an gerechnet, ferner mit s die von Q_i beschriebene Bogenlänge, mit p die Länge des aus O auf $Q_i Q_i'$, d. h. auf die Bahntangente in Q gefällten Lotes, dann wird

$$\text{Fläche } O Q_i Q_i' = \tfrac{1}{2} p \bmod (Q_i' - Q_i) = \tfrac{1}{2} p \frac{ds}{dt} = \frac{d\mathfrak{A}_i}{dt},$$

und die Gleichung (17) verwandelt sich in folgende

$$\frac{d}{dt} \sum m_i \frac{d\mathfrak{A}_i}{dt} = \tfrac{1}{2} \mathfrak{M} \times a.$$

Man findet also:

8. Wenn unter der Voraussetzung des fünften Satzes $\mathfrak{M} \times a = 0$ wird, so ist:

$$\tfrac{1}{2} a \times M = \sum m_i \frac{d\mathfrak{A}_i}{dt} = \mathfrak{a}, \quad \sum m_i \mathfrak{A}_i = \mathfrak{a} t + \mathfrak{a}', \tag{19}$$

indem $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ Konstanten bezeichnen. Wenn z. B. der Einheitsvektor a der x-Achse parallel ist, so finden wir

$$\tfrac{1}{2} \sum m_i (y_i \dot{z}_i - y_i \dot{z}_i) = \mathfrak{a}.$$

Diese Gleichung heißt das Flächenintegral für die yz-Ebene, sie ist algebraisch und bilinear für die Koordinaten und Geschwindigkeitskomponenten.[1])

Schließlich können wir sagen, daß, wenn unter der Voraussetzung des siebenten Satzes $\mathfrak{M} = 0$ wird, die erwähnte Eigenschaft für jede beliebige Ebene gilt und wir demnach drei Flächenintegrale für die drei Koordinatenebenen finden.

Die Konstante $\mathfrak{a}$ in (19) ist gleich der halben Projektion des Momentvektors M auf die Richtung des Einheitsvektors a, sie erlangt also den größten Wert für die Ebene, die senkrecht zu der Richtung des (konstanten) Impulsvektors ist. Diese Ebene heißt die invariable Ebene des Systems; sie heißt invariabel, weil ihre Stellung sich im Verlaufe der Bewegung nicht ändert und aus der bloßen Kenntnis der momentanen Bewegung des Systems ermittelt werden kann.[2])

Wenn das System aus n freien Punkten besteht und die Kräfte, denen sie unterworfen sind, in ihre Verbindungslinien zu zweien fallen, indem sie paarweise gleich werden und Funktionen allein von der Entfernung r_{ij} der beiden betreffenden Punkte sind, wenn also das System ein sogen. Newtonsches System ist, so finden wir folgende Integrale: das Integral der Erhaltung der Energie, die sechs Integrale des Schwer-

---

1) Newton, Philos. naturalis princ. math., Lib. I, Sectio II, Prop. I, D. Bernoulli, *Nouveau problème de Mécanique*, Mém. de l'Acad. de Berlin 1745, p. 54; Euler, *Solutio problematis mechanici*, etc., Opuscula varii argumenti vol. 1, p. 1 (1746); d'Arcy, Mémoires de l'Acad. de Paris 1747, p. 344.

2) Laplace, Mécanique céleste, Livre I, Nr. 21.

punktes und die drei Flächenintegrale, im ganzen also zehn Integrale, die für $n > 2$ zur Bestimmung der Bewegung nicht ausreichen.

Es wird in diesem Falle

$$\boldsymbol{F}_i = \sum_j \frac{\varphi(r_{ij})}{r_{ij}} (P_i - P_j),$$

woraus unmittelbar

$$\mathfrak{R} = \sum \boldsymbol{F}_i = 0,$$

$$\mathfrak{M} = \sum (P_i - O) \wedge \boldsymbol{F}_i = \sum_{ij} (P_i - P_j) \wedge \frac{\varphi(r_{ij})}{r_{ij}} (P_i - P_j) = 0$$

folgt.

Bildet man das Impulsmoment $\boldsymbol{M}'$ für irgend einen anderen festen Punkt O', so ergibt sich (Erster Band, S. 206)

$$\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M} - (O' - O) \wedge \boldsymbol{R};$$

wenn also $\boldsymbol{M}$ und $\boldsymbol{R}$ konstant sind, so ist es auch $\boldsymbol{M}'$. Diese Gleichung zeigt auch, wie man die invariable Ebene für irgend einen anderen Punkt O' des Raumes finden kann, denn diese Ebene ist senkrecht zu dem Vektor $\boldsymbol{M}'$ und geht durch O' hindurch.

Wählt man statt des im Raume festen Punktes O' den Schwerpunkt S des materiellen Systems, so hat man bei der Berechnung des Momentes $\boldsymbol{M}_0$ für diesen Schwerpunkt zu beachten, daß nach dem Schwerpunktsatz

$$S - O = \boldsymbol{r}t + \boldsymbol{r}'$$

wird, wenn $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}'$ zwei konstante Vektoren bezeichnen, und zwar wird, da $\dot{S} \sum m_i = \boldsymbol{R}$ ist, $\boldsymbol{r} \sum m_i = \boldsymbol{R}$. Es folgt also

$$\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{M} - (S - O) \wedge \boldsymbol{R} = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{r}' \wedge \boldsymbol{R},$$

da $\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{R} = 0$ wird. Demnach ist auch das Impulsmoment für den Schwerpunkt konstant, und es gilt der Flächensatz und das Prinzip der invariablen Ebene auch für den Schwerpunkt. Multipliziert man den Ausdruck

$$\boldsymbol{M}_0 = \sum m_i (P_i - S) \wedge \dot{P}_i$$

mit $\sum m_j$ und setzt ein $(S - P_i)\sum m_j = \sum m_j(P_j - P_i)$, so findet man leicht

$$\boldsymbol{M}_0 \sum m_j = \sum_{ij} m_i m_j (P_i - P_j) \wedge (\dot{P}_i - \dot{P}_j).$$

Dieser Ausdruck zeigt unmittelbar, daß der Wert von $\boldsymbol{M}_0$ allein durch die relative Bewegung der Massenpunkte gegen einander bestimmt wird.

Im Falle eines freien Punktes drückt die Bedingung $a \times \mathfrak{M} = 0$ aus, daß die an dem Punkte angreifende Kraft die durch O parallel zu a gezogene Achse trifft, es gilt mithin der Flächensatz für eine zu einer solchen Achse senkrechte Ebene.

Wenn der Punkt auf einer Fläche bleibt, so drückt die auf die Bedingungen des Systems bezügliche Voraussetzung des fünften Satzes aus, daß die Fläche eine Rotationsfläche mit derselben Achse ist, und wenn außerdem die Voraussetzung erfüllt ist, daß die Kraft die Achse trifft, so findet man wieder, was in Kap. II, § 1 auseinandergesetzt wurde.

Wir wollen schließlich bemerken, daß die auf die Systembedingungen bezüglichen Voraussetzungen der Sätze 2. und 6. sicher erfüllt sind in dem Falle, wo das System aus freien oder aus starr mit einander verbundenen Punkten besteht. Wir finden also:

9. In einem System von freien Punkten oder in einem freien starren System gelten die beiden Impulssätze, das heißt, es ist die Änderung des Impulsvektors und des Impulsmomentes in der Zeiteinheit beziehungsweise gleich der Resultante und dem resultierenden Moment der äußeren Kräfte, oder

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \mathfrak{R}, \quad \frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = \mathfrak{M}.$$

Dieser Satz ist die Verallgemeinerung des zweiten Bewegungsgesetzes.

6. Die Aktion eines materiellen Systems. Wir setzen ein holonomes System mit irgendwelchen Bedingungen, die auch die Zeit explizit enthalten können, voraus und für die

Kräfte eine Kräftefunktion U, dann können wir, nachdem die Bewegungsgleichungen integriert sind, die Funktion bilden

$$V = \int_{t_0}^{t} (T + U)\, dt, \tag{19}$$

die nach Hamilton die Aktion des Systems bei dem Übergang aus der Lage zur Zeit t_0 in die Lage zur Zeit t heißt. Diese Funktion offenbart ihre Bedeutung, wenn wir ihre Variation bilden, indem wir die Zeit unvariiert lassen. Wir nehmen an, daß die Lagenkoordinaten durch die allgemeinen Systemkoordinaten q_μ ausgedrückt seien, daß also T als Funktion der q_μ und $\dot{q}_\mu$, U als Funktion der q_μ allein bekannt sei, dann finden wir

$$\delta V = \int_{t_0}^{t} \sum_{\mu} \left(\frac{\partial T}{\partial q_\mu} \delta q_\mu + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} \delta \dot{q}_\mu + \frac{\partial U}{\partial q_\mu} \delta q_\mu \right) dt.$$

Es wird aber $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} = p_\mu$ und, da $\delta \dot{q}_\mu = \frac{d \delta q_\mu}{dt}$ ist, durch partielle Integration

$$\int_{t_0}^{t} p_\mu \delta \dot{q}_\mu\, dt = [p_\mu \delta q_\mu]_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} \dot{p}_\mu \delta q_\mu\, dt,$$

also

$$\delta V = \sum [p_\mu \delta q_\mu]_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} \sum \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial T}{\partial q_\mu} - \frac{\partial U}{\partial q_\mu} \right) \delta q_\mu\, dt.$$

Zufolge der zweiten Form der Lagrangeschen Gleichungen verschwinden aber die Inhalte der Klammern unter dem Integralzeichen, und sonach wird einfach

$$\delta V = \sum [p_\mu \delta q_\mu]_{t_0}^{t}. \tag{20}$$

Die Variation von V und damit V selbst hängt also nur von dem Anfangs- und Endzustande des Systems, nicht aber von der Art des Überganges aus dem einen in den anderen ab. Dies ist das Theorem der variierenden Aktion.

Wir können aber insbesondere in dem Anfangs- und Endzustande alle Variationen $\delta q_\mu = 0$ annehmen, dann erhalten wir auch

$$\delta V = 0,$$

d. h. auch die Aktion bleibt ungeändert. Dies ist das Theorem der invariablen Aktion.

Umgekehrt können wir aber aus der Gleichung $\delta V = 0$, wobei wir noch allgemeiner

$$\delta V = \int_{t_0}^{t} [\delta T + \sum Q_\mu \delta q_\mu] dt \tag{21}$$

annehmen können, unter der Voraussetzung, daß für den Anfangs- und Endzustand die Variationen δq_μ verschwinden, die Lagrangeschen Gleichungen rückwärts ableiten. Die Gleichung $\delta V = 0$ bildet also unter den angegebenen Voraussetzungen einen vollgültigen Ersatz für die Bewegungsgleichungen. Dies ist das sogen. Hamiltonsche Prinzip.

Es ist zu beachten, daß die Größen q_μ, d. h. die Lagen der Punkte des Systems zu einer beliebigen Zeit, bestimmt sind durch die Größen q_μ, $\dot{q}_\mu$ zur Zeit t_0, d. h. den Anfangszustand des Systems, und die Zeit t. Es ist also durch die Integration der Bewegungsgleichungen möglich, in V die Größen q_μ und $\dot{q}_\mu$ durch die Anfangswerte dieser Größen und die Zeit t auszudrücken. Denkt man sich aber die Gleichungen, die die q_μ durch die Anfangswerte $q_\mu^{(0)}$ dieser Größen, ihre Derivierten $\dot{q}_\mu^{(0)}$ und die Zeit festlegen, nach den $\dot{q}_\mu^{(0)}$ aufgelöst, so kann man in V auch die $\dot{q}_\mu$ und $\dot{q}_\mu^{(0)}$ durch die q_μ, die $q_\mu^{(0)}$ und außerdem die Zeit ausdrücken. Dann würden wir

$$\delta V = \sum_\mu \left[\frac{\partial V}{\partial q_\mu} \delta q_\mu + \frac{\partial V}{\partial q_\mu^{(0)}} \delta q_\mu^{(0)} \right]$$

erhalten, und da anderseits nach (20)

$$\delta V = \sum [p_\mu \delta q_\mu - p_\mu^{(0)} \delta q_\mu^{(0)}]$$

werden soll, finden wir unter der angegebenen Voraussetzung

$$\frac{\partial V}{\partial q_\mu} = p_\mu, \quad \frac{\partial V}{\partial q_\mu^{(0)}} = -p_\mu^{(0)}. \tag{22}$$

Die Komponenten p_μ des Impulses sind also die Derivierten der Hamiltonschen Funktion V nach den

Koordinaten q_μ. Diese Gleichungen stellen $2k$ unabhängige Relationen zwischen den $2k$ Größen p_μ, q_μ und ihren $2k$ Anfangswerten dar. Sie lassen sich also als die Integrale der Bewegungsgleichungen deuten, welche Integrale derart von der Bestimmung der Funktion V abhängen. Wir wollen nun sehen, ob diese Bestimmung sich unabhängig von der Integration der Bewegungsgleichungen ausführen läßt.

7. Die Grundeigenschaft der Aktion. Das Jacobische Theorem. Die vollständige Derivierte von V nach der Zeit ist

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum \frac{\partial V}{\partial q_\mu} \dot{q}_\mu = T + U$$

gemäß der Definitionsgleichung (19). Nach (22) wird deshalb

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum p_\mu \dot{q}_\mu - T - U = 0.$$

Diese Gleichung wird

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0, \tag{23}$$

indem wir

$$H = \sum p_\mu \dot{q}_\mu - T - U$$

setzen. Die so eingeführte Funktion ist dieselbe wie die in Gleichung (25) des vorigen Kapitels definierte. Sie fällt, wenn die Bedingungen des Systems von der Zeit unabhängig sind, mit der Gesamtenergie des Systems zusammen. Denken wir uns in dem Ausdrucke von H die $\dot{q}_\mu$ als lineare Funktionen der p_μ ausgedrückt, so wird H eine Funktion der p_μ und q_μ, die für die p_μ vom zweiten Grade ist, und ersetzen wir die p_μ durch ihre Werte $\frac{\partial V}{\partial q_\mu}$, so erkennen wir, daß die Gleichung nur die ersten Derivierten von V und zwar nur im zweiten Grade enthält. Es ergibt sich also:

Die Aktion genügt einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades.

Nun gilt der grundlegende Satz von Jacobi: Es sei $V(t, q_1, q_2, \ldots, q_k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ ein vollständiges Integral der Differentialgleichung (23), womit gefordert ist,

daß unter den k willkürlichen Konstanten keine einfach als additive Konstante zu V hinzutritt, dann sind, wenn $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ k neue willkürliche Konstanten bezeichnen,

$$\frac{\partial V}{\partial q_\mu} = p_\mu, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_\mu} = \beta_\mu \quad (\mu = 1, 2, \cdots, k) \tag{24}$$

die Integrale der Bewegungsgleichungen.

Wir wollen diesen Satz derart kurz begründen, daß wir umgekehrt aus (24) die Bewegungsgleichungen herleiten. Variieren wir V, indem wir in der gewöhnlichen Weise die Zeit unvariiert lassen, so ergibt sich

$$\delta V = \sum \left(\frac{\partial V}{\partial q_\mu}\delta q_\mu + \frac{\partial V}{\partial \alpha_\mu}\delta \alpha_\mu\right) = \sum (p_\mu \delta q_\mu + \beta_\mu \delta \alpha_\mu)$$

und wenn wir nach der Zeit differenzieren,

$$\frac{d\delta V}{dt} = \sum (p_\mu \delta \dot{q}_\mu + \dot{p}_\mu \delta q_\mu).$$

Anderseits wird zufolge (23)

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum p_\mu \dot{q}_\mu = -H + \sum p_\mu \dot{q}_\mu,$$

und wenn wir diesen Ausdruck variieren

$$\delta \frac{dV}{dt} = -\sum \left(\frac{\partial H}{\partial q_\mu}\delta q_\mu + \frac{\partial H}{\partial p_\mu}\delta p_\mu\right) + \sum (p_\mu \delta \dot{q}_\mu + \dot{q}_\mu \delta p_\mu).$$

Also folgt aus

$$\frac{d\delta V}{dt} = \delta \frac{dV}{dt}$$

die Beziehung

$$\sum \left[\left(\dot{q}_\mu - \frac{\partial H}{\partial p_\mu}\right)\delta p_\mu - \left(\dot{p}_\mu + \frac{\partial H}{\partial q_\mu}\right)\delta q_\mu\right] = 0$$

und da hierin die δp_μ und δq_μ willkürlich bleiben, muß

$$\dot{q}_\mu = \frac{\partial H}{\partial p_\mu}, \quad \dot{p}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial q_\mu} \tag{25}$$

werden. Das Nähere findet man in Jacobis Vorlesungen über Dynamik, herausgegeben von Clebsch (Supplementband von Jacobis Werken).

Übungsbeispiele.

1. Aufgabe. *Den Ausdruck*

$$f = \sum \frac{1}{m_i}[(m_i\ddot{x}_i - X_i)^2 + (m_i\ddot{y}_i - Y_i)^2 + (m_i\ddot{z}_i - Z_i)^2]$$

bezeichnet man nach Gauß als den Zwang des materiellen Systems. Zu beweisen, daß dieser Zwang bei der wirklich eintretenden Bewegung ein Minimum ist (Prinzip des kleinsten Zwanges).

Auflösung. Wir nehmen an, daß die (holonomen oder nicht holonomen) Bedingungsgleichungen des Systems die Form haben

$$\sum(A_i\delta x_i + B_i\delta y_i + C_i\delta z_i) = 0. \tag{1}$$

Differenzieren wir diese Gleichung zweimal nach der Zeit, so erhalten wir

$$\sum\left(\frac{d^2A_i}{dt^2}\delta x_i + \frac{d^2B_i}{dt^2}\delta y_i + \frac{d^2C_i}{dt^2}\delta z_i\right)$$
$$+2\sum\left(\frac{dA_i}{dt}\delta\dot{x}_i + \frac{dB_i}{dt}\delta\dot{y}_i + \frac{dC_i}{dt}\delta\dot{z}_i\right)$$
$$+\sum(A_i\delta\ddot{x}_i + B_i\delta\ddot{y}_i + C_i\delta\ddot{z}_i) = 0.$$

Wählen wir also die Variation δ so, daß die Koordinaten und die Geschwindigkeiten der Punkte des Systems ungeändert bleiben und nur die Beschleunigungen sich ändern, so erhalten wir die Gleichung

$$\sum(A_i\delta\ddot{x}_i + B_i\delta\ddot{y}_i + C_i\delta\ddot{z}_i) = 0, \tag{2}$$

die zu (1) durchaus analog ist. Um diese Variationen auf die Gleichung des d'Alembertschen Prinzips anwenden zu können, muß man x_i zuvor ersetzen durch den Wert

$$x_i' = x_i + 2\dot{x}_i dt + \ddot{x}_i dt^2,$$

den es nach der Zeit $2dt$ annimmt, und analog y_i und z_i durch y_i' und z_i'. Dann wird

$$\delta x_i' = \delta\ddot{x}_i, \quad \delta y_i' = \delta\ddot{y}_i, \quad \delta z_i' = \delta\ddot{z}_i$$

und die Gleichung des d'Alembertschen Prinzips lautet

$$\sum\{(m_i\ddot{x} - X_i)\delta\ddot{x}_i + (m_i\ddot{y}_i - Y_i)\delta\ddot{y}_i + (m_i\ddot{z}_i - Z_i)\delta\ddot{z}_i\} = 0. \tag{3}$$

Diese Gleichung bedeutet aber, daß die erste Variation des Ausdrucks f verschwindet. Die zweite Variation des Ausdruckes f ist aber,

wie man sofort sieht, positiv, also ist f in der Tat ein Minimum für die wirkliche Bewegung.

Dieses Prinzip ist angegeben worden von Gauß, Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik, J. f. Math. Bd. 4 (1829) S. 232, Werke Bd. 5, S. 23. Vgl. Boltzmann, Vorl. über die Prinzipe der Mech. Bd. 1, S. 65; Gibbs, On the fundamental formulae of dynamics, American Journal of Math. Vol. 2 (1879), p. 49, Scientific Papers II, p. 1. Diese beiden Autoren haben eine tiefgehende Vergleichung des Gaußschen Prinzipes mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen angestellt.

Es ist wichtig zu bemerken, daß aus der Formel (3) sofort die schon im vorigen Kapitel abgeleiteten Gibbs-Appellschen Gleichungen folgen.

2. Aufgabe. *Den allgemeinsten Variationsausdruck für das d'Alembertsche Prinzip zu finden.*

Auflösung. Wir integrieren die Gleichung des d'Alembertschen Prinzips zwischen den Zeiten t_0 und t und finden so

$$\int_{t_0}^{t} \sum [(m_i \ddot{x}_i - X_i)\delta x_i + (m_i \ddot{y}_i - Y_i)\delta y_i + (m_i \ddot{z}_i - Z_i)\delta z_i] = 0.$$

Wir setzen nun zunächst symbolisch

$$\delta W = \sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i).$$

Ferner ergibt sich, wenn wir zu der Variation der Koordinaten auch eine Variation der Zeit hinzunehmen,

$$\delta \dot{x}_i = \frac{dx_i + d\delta x_i}{dt + d\delta t} - \frac{dx_i}{dt} = \frac{dt\, d\delta x_i - dx_i\, d\delta t}{dt^2} \quad \text{usw.}$$

Es wird also die Variation der kinetischen Energie

$$\begin{aligned} \delta T &= \sum m_i(\dot{x}_i \delta \dot{x}_i + \dot{y}_i \delta \dot{y}_i + \dot{z}_i \delta \dot{z}_i) \\ &= \sum m_i\left(\dot{x}_i \frac{d\delta x_i}{dt} + \dot{y}_i \frac{d\delta y_i}{dt} + \dot{z}_i \frac{d\delta z_i}{dt}\right) - 2T\frac{d\delta t}{dt} \end{aligned}$$

und, wenn wir zwischen t_0 und t integrieren und das erste Integral auf der rechten Seite durch partielle Integration ausführen,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} \delta T\, dt &= \left[\sum m_i(\dot{x}_i \delta x_i + \dot{y}_i \delta y_i + \dot{z}_i \delta z_i)\right]_{t_0}^{t} \\ &\quad - \int_{t_0}^{t} \sum m_i(\ddot{x}_i \delta x_i + \ddot{y}_i \delta y_i + \ddot{z}_i \delta z_i)\, dt - \int_{t_0}^{t} 2T\, d\delta t. \end{aligned}$$

Nehmen wir also die Variationen der Koordinaten an den Grenzen gleich Null, so ergibt sich

$$-\int_{t_0}^{t} \sum m_i(\ddot{x}_i\,\delta x_i + \ddot{y}_i\,\delta y_i + \ddot{z}_i\,\delta z_i)\,dt = \int_{t_0}^{t} (2\,T\,d\delta t + \delta T\,dt)$$

und somit geht die Gleichung des d'Alembertschen Prinzips schließlich über in

$$\int_{t_0}^{t} \left(2\,T\frac{d\delta t}{dt} + \delta T + \delta W\right) dt = 0.$$

3. Aufgabe. *Zu zeigen, daß*

$$\delta \int_{t_0}^{t} 2\,T\,dt = 0$$

wird, wenn die Variation der Zeit durch die Bedingung $\delta T = \delta W$ *bestimmt wird (Prinzip der kleinsten Aktion).*

Auflösung. Die Behauptung folgt sofort aus der Schlußgleichung der vorigen Aufgabe. In der Tat, macht man $\delta T = \delta W$, so folgt

$$\int_{t_0}^{t} (2\,T\,d\delta t + 2\delta T\,dt) = \delta \int_{t_0}^{t} 2\,T\,dt = 0.$$

Die Formulierung dieses Prinzips, das in der ausgesprochenen Form nichts als eine Umgestaltung des d'Alembertschen Prinzips ist, wird am einfachsten, wenn eine Kräftefunktion existiert, also $\delta W = -\delta \Pi$ wird, wobei $\delta \Pi$ die wirkliche Variation einer Funktion Π, der potentiellen Energie, bedeutet. Dann ist die Variation der Zeit so zu bestimmen, daß $\delta(T + \Pi) = 0$ wird, d. h. so, daß sie die Erhaltung der Energie befolgt.

Das Prinzip der kleinsten Aktion hat eine sehr merkwürdige Geschichte. Es wurde von Maupertuis, zuerst 1740 (*Accord des différentes lois de la nature*, Mémoires de l'Acad. de Paris, 1744) und darauf vollständiger 1745 (*Des lois de mouvement et de repos déduites d'un principe métaphysique*, Mémoires de l'Acad. de Berlin 1745, p. 286; beide Arbeiten in den Œuvres, Lyon 1768, vereinigt) in unklarer und unrichtiger Fassung und mit höchst mangelhafter Begründung mitgeteilt. In dem Streit, der sich an dies Prinzip bald nach seiner Veröffentlichung anknüpfte und dessen Geschichte man bei Montucla, Histoire des Math. Vol. 3, p. 645; A. Mayer, Geschichte des Princips der kleinsten Aktion, Leipzig 1877;

E. du Bois Reymond, Berliner Berichte 1892, S. 393 findet, wurde Euler als Verteidiger Maupertuis' hineingezogen (Mém. de l'Acad. de Berlin (1751), p. 169, p. 199, p. 246, auch als selbständige Schrift *Dissertatio de principio minimae actionis* 1753). Die eigentliche Richtigstellung erfolgte erst durch Lagrange (Miscellanea Taurinensia t. II (1760—61): *Application de la méthode des Maxima et minima,* Œuvres T. 1, p. 363), wo das Prinzip nur als ein nebensächliches Resultat der auf die Mechanik angewandten Variationsrechnung erscheint. An Interesse gewann das Prinzip erst wieder durch die kurze, aber schwerwiegende Abhandlung von Rodrigues, Correspondance sur l'école polyt. t. 3, p. 159, Paris 1815, und durch die Arbeiten von Hamilton. Durch Jacobi und Ostrogradsky wurde aufs Neue die Aufmerksamkeit auf die Unklarheiten und Unrichtigkeiten in der Begründung des Prinzips hingelenkt; auf die Bedeutung des Prinzips wies wieder Helmholtz hin (Berliner Berichte 1887, S. 225, Abhandlungen Bd. 3, S. 249); die wirkliche, endgültige Aufklärung gaben dann A. Mayer, Leipziger Berichte Bd. 38 (1886) S. 343, und O. Hölder, Göttinger Nachrichten 1896, S. 150.

4. Aufgabe. *Das Prinzip der kleinsten Aktion bestimmt unter der Voraussetzung, daß die Erhaltung der Energie gilt, bloß die Bahnen der einzelnen Punkte des Systems. Dies soll unmittelbar zum Ausdruck gebracht werden (Jacobische Form des Prinzips der kleinsten Aktion).*

Auflösung. Ist ds_i das Bahnelement des i^{ten} Systempunktes, so wird

$$T = \frac{1}{2} \frac{\Sigma m_i ds_i^2}{dt^2},$$

also

$$2T\,dt = \sqrt{2T} \cdot \sqrt{\Sigma m_i ds_i^2}.$$

Nun soll aber

$$T = h - \Pi$$

sein und diese Beziehung bei der Variation erhalten bleiben. Also können wir statt

$$\delta \int 2T\,dt = 0$$

schreiben

$$\delta \int \sqrt{h - \Pi}\, \sqrt{\Sigma m_i ds_i^2} = 0,$$

so daß aus dem variierten Integral die Zeit völlig verschwunden ist. Die Grenzen des Integrals, die unvariiert bleiben, sind durch die An-

fangs- und die Endlage des Systems gegeben. Vgl. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, hggb. von Clebsch, S. 43.

5. Aufgabe. *Das Variationsprinzip der vorigen Aufgabe für den besonderen Fall zu formulieren, daß auf das System keine äußeren Kräfte wirken.*

Auflösung. In diesem Falle wird $\Pi =$ konst., also

$$\delta \int \sqrt{\Sigma m_i \, ds_i^2} = 0.$$

Hertz (*Die Prinzipien der Mechanik*, Werke Bd. 3) setzt nun

$$\sqrt{\Sigma m_i \, ds_i^2} = \mathrm{M} \, ds,$$

indem er mit M die Gesamtmasse bezeichnet und ds als das Element der Systembahn, d. h. des Inbegriffes der von allen Systempunkten zusammen beschriebenen Bahnen, ansieht. Es wird dann einfach

$$\delta \int ds = 0,$$

d. h. die Länge der Systembahn ist (wenn die Endlage sich nicht über gewisse Grenzen von der Anfangslage entfernt) ein Minimum. Hertz nennt daher dieses Prinzip das Prinzip der geradesten Bahn.

Gleichzeitig wird dem Energieprinzip zufolge $T =$ konst., oder, da

$$T = \tfrac{1}{2} \mathrm{M} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \tfrac{1}{2} \mathrm{M} \mathrm{v}^2 \text{ für } \mathrm{v} = \frac{ds}{dt}$$

ist, $\mathrm{v} =$ konst. Also kann man, wenn man v die Systemgeschwindigkeit nennt, sagen, das System bewege sich, wenn es von äußeren Kräften frei ist, mit konstanter Systemgeschwindigkeit in einer geradesten Bahn (moveri uniformiter in directissimam). Dies ist das Hertzsche Grundprinzip.

6. Aufgabe. *Das Verhältnis des Prinzips der kleinsten Aktion zu dem Hamiltonschen Prinzip zu erörtern.*

Auflösung. Hamilton befolgt den Grundsatz, wohl die Grenzen, aber nicht die Zeit mit zu variieren. Nach der bei der 2. Aufgabe angestellten Betrachtung ergibt sich also

$$\int_{t_0}^{t} \delta T \, dt = \left[\sum m_i (\dot{x}_i \delta x_i + \dot{y}_i \delta y_i + \dot{z}_i \delta z_i)\right]_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} \sum m_i (\ddot{x}_i \delta x_i + \ddot{y}_i \delta y_i + \ddot{z}_i \delta z_i) \, dt$$

oder mit Rücksicht auf das d'Alembertsche Prinzip

$$\int_{t_0}^{t} \delta T\,dt = \left[\sum m_i(\dot{x}_i\,\delta x_i + \dot{y}_i\,\delta y_i + \dot{z}_i\,\delta z_i)\right]_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} \delta W\,dt.$$

Setzen wir hierin unter Voraussetzung eines konservativen Systems ein

$$\delta W = -\delta \Pi = \delta T - \delta h,$$

so ergibt sich

$$\int_{t_0}^{t} 2\,\delta T\,dt = \delta \int_{t_0}^{t} 2\,T\,dt = \left[\sum m_i(\dot{x}_i\,\delta x_i + \dot{y}_i\,\delta y_i + \dot{z}_i\,\delta z_i)\right]_{t_0}^{t} + (t - t_0)\,\delta h.$$

Führen wir nun die allgemeinen Koordinaten q_ϱ ein, so ist leicht nachzuweisen, daß nicht bloß

$$2\,T = \sum m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varrho}\,\dot{q}_\varrho,$$

sondern auch

$$\sum m_i(\dot{x}_i\,\delta x_i + \dot{y}_i\,\delta y_i + \dot{z}_i\,\delta z_i) = \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varrho}\,\delta q_\varrho$$

wird. Es ergibt sich also schließlich

$$\delta \int_{t_0}^{t} 2\,T\,dt = \left[\sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varrho}\,\delta q_\varrho\right]_{t_0}^{t} + (t - t_0)\,\delta h.$$

Diese Gleichung zeigt, daß das Integral

$$\mathfrak{W} = \int_{t_0}^{t} 2\,T\,dt$$

als eine Funktion der Größen $q_1, q_2, \ldots, q_k$, ihrer Anfangswerte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ und der Energie h, von welchen $2k + 1$ Größen indes eine, etwa α_k, eine Funktion der übrigen ist, anzusehen ist, und zwar ergibt sich

$$\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial q_\varrho} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varrho} = p_\varrho, \quad \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \alpha_\varrho} = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varrho}\right)_{t = t_0} = \beta_\varrho, \quad \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial h} = t - t_0.$$

Anderseits kann man setzen

$$\mathfrak{W} = \int_{t_0}^{t} (T - \Pi + h)\,dt = V + h(t - t_0),$$

also wird hier

$$V = -h(t - t_0) + \mathfrak{W}.$$

Die Gleichung (23) nimmt dann die Form an

$$H\left(q_1, q_2, \cdots, \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial q_1}, \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial q_2}, \cdots\right) = h.$$

Auf die Integration dieser Differentialgleichung reduziert sich zufolge der vorausgehenden Gleichungen das mechanische Problem. Die Lösung muß $k-1$ wesentliche Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ enthalten. Es wird dann außer

$$\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial h} = t - t_0 \text{ noch } \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \cdots, \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \alpha_{k-1}} = \beta_{k-1}.$$

Dieses Verfahren können wir als die Jacobische Methode bezeichnen.

7. Aufgabe. *Nach der Jacobischen Methode das Problem der Bewegung eines Punktes unter der Einwirkung einer Zentralkraft zu behandeln.*

Auflösung. Wir legen das feste Attraktionszentrum in den Koordinatenursprung und fixieren den angezogenen materiellen Punkt durch den Radiusvektor q_1, das Breitenkomplement q_2 und die geographische Länge q_3. Dann wird, wenn m die Masse des bewegten Punktes ist, die kinetische Energie

$$T = \tfrac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + q_1^2 \dot{q}_2^2 + q_1^2 \sin q_2^2 \cdot \dot{q}_3^2),$$

also die Derivierten (d. h. die Impulskomponenten)

$$p_1 = m\dot{q}_1, \quad p_2 = m q_1^2 \dot{q}_2, \quad p_3 = m q_1^2 \sin q_2^2 \cdot \dot{q}_3$$

und damit

$$T = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2} + \frac{p_3^2}{q_1^2 \sin q_2^2}\right).$$

Die Kräftefunktion wird hier

$$U(q_1)$$

und somit ergibt die Gleichung der vorletzten Aufgabe

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{1}{q_1^2}\left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial q_2}\right)^2 + \frac{1}{q_1^2 \sin q_2^2}\left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial q_3}\right)^2 = 2m[h + U(q_1)].$$

Dieser Gleichung kann man genügen durch einen Ansatz von folgender Form

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{W}_1(q_1) + \mathfrak{W}_2(q_2) + \alpha_2 q_3.$$

Dann zerlegt die vorhergehende Gleichung sich in die folgenden beiden

$$\left(\frac{d\mathfrak{W}_1}{dq_1}\right)^2 = 2m(h + U) - \frac{\alpha_1^2}{q_1^2}, \quad \left(\frac{d\mathfrak{W}_2}{dq_2}\right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{\sin q_2^2} = \alpha_1^2,$$

wobei α_1 eine neue Konstante bezeichnet. Diese beiden Gleichungen

sind durch Quadratur lösbar, und so ist $\mathfrak{W}$ selbst durch Quadraturen zu finden (Jacobi, Vorl. über Dynamik, S. 183).

8. Aufgabe. *Das vorige Problem für die Bewegung eines Punktes auf einer festen, glatten Oberfläche.*

Auflösung. Bezieht man die Punkte der Fläche auf ein System Gaußscher krummliniger Koordinaten q_1, q_2, so nimmt dabei das Quadrat des Linienelementes die Form an

$$ds^2 = \mathfrak{E}dq_1^2 + 2\mathfrak{F}dq_1dq_2 + \mathfrak{G}dq_2^2,$$

und es ergibt sich, für $m = 1$,

$$2T_{\dot{q}} = \mathfrak{E}\dot{q}_1^2 + 2\mathfrak{F}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \mathfrak{G}\dot{q}_2^2,$$

ferner

$$p_1 = \mathfrak{E}\dot{q}_1 + \mathfrak{F}\dot{q}_2, \quad p_2 = \mathfrak{F}\dot{q}_1 + \mathfrak{G}\dot{q}_2,$$

woraus umgekehrt

$$(\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2)\dot{q}_1 = \mathfrak{G}p_1 - \mathfrak{F}p_2,$$
$$(\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2)\dot{q}_2 = \mathfrak{E}p_2 - \mathfrak{F}p_1$$

folgt; es ergibt sich also

$$2T = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 = \frac{\mathfrak{G}p_1^2 - 2\mathfrak{F}p_1p_2 + \mathfrak{E}p_2^2}{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2},$$

mithin wird unter der Voraussetzung, daß das Integral der Erhaltung der Energie gilt, die Jacobische Gleichung

$$\mathfrak{G}\left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial q_1}\right)^2 - 2\mathfrak{F}\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial q_1}\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial q_2} + \mathfrak{E}\left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial q_2}\right)^2 = 2(h + U)(\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2).$$

Sind die Koordinaten orthogonal, so wird $\mathfrak{F} = 0$; sind sie auch isotherm, so wird $\mathfrak{E} = \mathfrak{G} = \lambda(q_1, q_2)$. Ist dann der Punkt keinen Kräften unterworfen, so kann man $U = 0$ annehmen und man findet für diese Bewegung, die sog. geodätische Bewegung,

$$\left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial q_2}\right)^2 = 2h\lambda.$$

Im Falle der Liouvilleschen Flächen, bei denen

$$\lambda = \lambda_1(q_1) + \lambda_2(q_2)$$

wird, ergibt sich, wenn man

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{W}_1(q_1) + \mathfrak{W}_2(q_2)$$

setzt, sofort $\mathfrak{W}$, und es werden die Integrale der Bewegung

$$\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial h} = t + \tau, \quad \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial a_1} = \int\frac{dq_1}{\sqrt{2h\lambda_1 + a_1}} - \int\frac{dq_2}{\sqrt{2h\lambda_2 - a_1}} = b_1,$$

wobei a_1, b_1 willkürliche Konstanten bedeuten. Die letzte Gleichung ist die Gleichung der geodätischen Linie, die sonach auf Quadraturen zurückgeführt ist. Die Flächen zweiter Ordnung gehören zu diesen Liouvilleschen Flächen.

Im Falle der Liouvilleschen Flächen gelingt die Trennung der Variabeln und damit die Zurückführung auf Quadraturen auch dann, wenn

$$U = \frac{U_1(q_1) + U_2(q_2)}{\lambda_1(q_1) + \lambda_2(q_2)}.$$

Man kann beweisen: **Die Liouvilleschen Flächen haben die charakteristische Eigenschaft, daß die Hamiltonsche Gleichung bei geeigneter Wahl der Funktion U die Trennung der Variabeln gestattet.** Vgl. Morera, *Sulla separazione delle variabili* ecc., Atti dell'Accad. di Torino, vol. 16, p. 276 (1881), Stäckel, *Eine charakteristische Eigenschaft der Flächen* usw., Mathem. Annalen, Bd. 35, S. 91 (1890).

9. Aufgabe. *Die Bewegung eines Punktes P auf einer Rotationsfläche zu untersuchen, wenn die Kräftefunktion eine Funktion des Abstandes von der Rotationsachse ist.*

Auflösung. Wir nennen q_1 diesen Abstand, q_2 den Winkel, den die Meridianebene des Punktes P mit einer festen Anfangsebene bildet, z die Höhe von P über einer zur Rotationsachse senkrechten Ebene; wird dann

$$z = f(q_1)$$

die Gleichung der Meridiankurve, so finden wir

$$ds^2 = [1 + f'(q_1)^2]dq_1^2 + q_1^2 dq_2^2$$

und die zu integrierende Gleichung lautet

$$q_1^2\left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial q_1}\right)^2 + [1 + f'(q_1)^2]\left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial q_2}\right)^2 = 2q_1^2[1 + f'(q_1)^2][h + U(q_1)].$$

Ihr Integral findet man, wenn man $\mathfrak{W} = a_1 q_2 + \mathfrak{W}_1(q_1)$ ansetzt, in der Form

$$\mathfrak{W} = a_1 q_2 + \int \frac{dq_1}{q_1}\sqrt{[1 + f'(q_1)^2][2(h + U(q_1))q_1^2 - a_1^2]},$$

wobei a_1 eine willkürliche Konstante bedeutet.

10. Aufgabe. *Nach der Jacobischen Methode das folgende Problem zu behandeln: Ein schwerer Punkt bewegt sich in einer Ebene, die in gleichförmiger Rotation um eine vertikale Achse begriffen ist; die Bewegung zu bestimmen.*

Auflösung. Wir nennen die Rotationsgeschwindigkeit ω, den Abstand des Punktes von der Rotationsachse r, seine Höhe z. Wir

haben hier einen Fall, wo die Systembedingungen die Zeit enthalten. Es wird, wenn der Punkt die Masse 1 hat,

$$2T = \dot{r}^2 + r^2\omega^2 + \dot{z}^2.$$

Indem man $q_1 = r$, $q_2 = z$, $U = -gz$ setzt, findet man weiter $p_1 = \dot{r}$, $p_2 = \dot{z}$,

$$\sum p_\varrho \dot{q}_\varrho - T = \tfrac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 - r^2\omega^2)$$

und die zu integrierende Gleichung wird

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 - r^2\omega^2\right] + gz = 0.$$

Ihr Integral findet man, indem man setzt

$$V = -ht + \mathfrak{W}_1(r) + \mathfrak{W}_2(z),$$

und man erhält aus

$$\frac{d\mathfrak{W}_1}{dr} = \sqrt{a_1 + r^2\omega^2}, \quad \frac{d\mathfrak{W}_2}{dz} = \sqrt{2h - a_1 - 2gz}, \quad \mathfrak{W} = \mathfrak{W}_1 + \mathfrak{W}_2$$

die Integrale

$$2\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial a_1} = \int \frac{dr}{\sqrt{a_1 + r^2\omega^2}} - \int \frac{dz}{\sqrt{2h - a_1 - 2gz}} = b_1,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial h} = \int \frac{dz}{\sqrt{2h - a_1 - 2gz}} = t - t_0.$$

Die weitere Behandlung ist dann leicht zu übersehen.

11. Aufgabe. *Die Bewegungsgleichungen eines Punktes in elliptischen Koordinaten.*

Auflösung. Wir betrachten einen in der Ebene beweglichen Punkt P und nennen r, r_1 seine Abstände von zwei festen Punkten F, F_1 der Ebene, deren gegenseitige Entfernung $2a$ sei. Wir setzen weiter

$$r + r_1 = 2u, \quad r - r_1 = 2v.$$

Die Kurven $u =$ konst. sind Ellipsen mit den Brennpunkten F, F_1 und den Halbachsen $u, \sqrt{u^2 - a^2}$; die Kurven $v =$ konst. sind Hyperbeln mit denselben Brennpunkten und den Halbachsen $v, \sqrt{a^2 - v^2}$. Die rechtwinkligen Koordinaten x, y des Punktes P bezüglich dieser Achsen werden gegeben durch die Gleichungen

$$ax = uv, \quad ay = \sqrt{(u^2 - a^2)(a^2 - v^2)}.$$

Hieraus leitet man mit Leichtigkeit ab

$$ds^2 = \frac{u^2 - v^2}{u^2 - a^2}du^2 - \frac{u^2 - v^2}{v^2 - a^2}dv^2,$$

und demnach wird die kinetische Energie T des Punktes P, wenn seine Masse gleich 1 ist, in den elliptischen Koordinaten u, v durch den Ausdruck gegeben

$$2T = \frac{u^2 - v^2}{u^2 - a^2}\dot{u}^2 - \frac{u^2 - v^2}{v^2 - a^2}\dot{v}^2.$$

Erfolgt die Bewegung nicht in der Ebene und nennen wir w den Winkel, den die Ebene PFF_1 mit der xy-Ebene bildet, so ist der Ausdruck für die doppelte kinetische Energie der frühere vermehrt um $y^2\dot{w}^2$. Demnach lautet die partielle Differentialgleichung, der die Funktion $\mathfrak{W}$ genügt,

$$\left.\begin{aligned} &(u^2 - a^2)\left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial u}\right)^2 - (v^2 - a^2)\left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial v}\right)^2 \\ &\qquad + a^2\left\{\frac{1}{u^2 - a^2} - \frac{1}{v^2 - a^2}\right\}\left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial w}\right)^2 \\ &\qquad - 2(u^2 - v^2)(U + h) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

wenn U die Kräftefunktion bedeutet. Zum Beweis genügt es zu beachten, daß

$$\frac{1}{y^2} = \frac{a^2}{u^2 - v^2}\left\{\frac{1}{u^2 - a^2} - \frac{1}{v^2 - a^2}\right\}$$

wird. Die Integration von (α) wird auf Quadraturen zurückgeführt, wenn

$$U = \frac{\varphi(u) - \psi(v)}{u^2 - v^2}$$

ist, wobei φ, ψ beliebige Funktionen bedeuten. Insbesondere kann man

$$U = \frac{\varkappa^2}{r} + \frac{\varkappa_1^2}{r_1} + \alpha\varrho^2 + \frac{A}{x^2} + \frac{B}{y^2}$$

annehmen, wenn ϱ die Entfernung des Punktes P von der Mitte O zwischen F und F_1 bedeutet. In der Tat wird

$$\frac{\varkappa^2}{r^2} + \frac{\varkappa_1^2}{r_1^2} = \frac{\varkappa^2(u - v) + \varkappa_1^2(u + v)}{u^2 - v^2}$$

und

$$\varrho^2 + a^2 = u^2 + v^2,$$

woraus

$$\varrho^2 = \frac{u^4 - v^4 - a^2(u^2 - v^2)}{u^2 - v^2},$$

endlich

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{u^2 - v^2}\left\{\frac{u^2 - a^2}{u^2} - \frac{v^2 - a^2}{v^2}\right\}.$$

Im dem Falle, wo α, A, $B = 0$, haben wir das Eulersche Problem des von zwei festen Zentren F, F_1 nach dem Newtonschen Gesetz angezogenen Punktes [Euler, Mémoires de l'Académie de Berlin 1760, p. 228, Novi commentarii Acad. scient. Petrop. T. 10, p. 207 (1766), T. 11, p. 152 (1767).

In der Gleichung (α) erscheint w nicht explizit und demnach erhält man ein vollständiges Integral durch einen Ansatz von der Form

$$\mathfrak{W} = \gamma w + \mathfrak{W}_1(u) + \mathfrak{W}_2(v),$$

wobei γ konstant. Wenden wir dann das grundlegende Jacobische Theorem an, so erhalten wir zwei Differentialgleichungen

$$(u^2 - v^2)\frac{du}{dt} = \sqrt{R(u)}, \quad (u^2 - v^2)\frac{dv}{dt} = -\sqrt{S(v)},$$

wo

$$R(u) = 2(u^2 - a^2)[hu^2 - (\varkappa^2 + \varkappa_1^2)u + c] - a^2\gamma^2,$$
$$S(v) = 2(v^2 - a^2)[hv^2 - (\varkappa^2 - \varkappa_1^2)v + c] - a^2\gamma^2$$

und c eine neue Konstante. Diese Gleichungen lassen sich leicht diskutieren.

Die Bahnkurve kann im Falle der ebenen Bewegung ein Kegelschnitt (insbesondere auch eine Ellipse) mit den Brennpunkten F, F_1 sein. Es gibt unendlich viele Fälle, wo die Bahnkurve algebraisch ist. Die Differentialgleichung einer solchen Bahnkurve ist

$$\frac{du}{\sqrt{R(u)}} + \frac{dv}{\sqrt{S(v)}} = 0,$$

wobei $\gamma = 0$. Unter Umständen vereinfacht sie sich durch die Substitution

$$u = a \operatorname{Cof} \xi, \quad v = a \cos \eta.$$

Bezüglich allgemeiner Untersuchungen über die Gestalt der Bahnkurve vgl. Morera, Giornale di matematiche, Vol. 18 (1880) p. 34; Charlier, Mechanik des Himmels, Bd. 1, Leipzig 1902, und für den Fall, daß ein Zentrum anzieht und das andere abstößt, Wöller, Inaug.-Diss., Kiel 1905.

Für $A = 0$, $B = 0$ ergibt sich das Lagrangesche Problem: der Punkt wird von zwei festen Punkten F, F_1 nach dem Newtonschen Gesetz und von O mit einer der Entfernung ϱ direkt proportionalen Kraft angezogen [Lagrange, Miscellanea Taurinensia T. IV (1766—1769), Œuvres compl. T. II, p. 67]. Die Behandlung des Problems ist genau dieselbe. Man s. noch Serret, Journ. de Math. Vol. 13 (1848) p. 17; Königsberger, De motu puncti versus

duo fixa centra attracti (Diss.) Berlin 1860; Whittaker, Analytical Dynamics, p. 69, 95.

12. Aufgabe. *Zu zeigen, daß sich die Bewegung eines Systesm mit zwei Freiheitsgraden immer auf ein ebenes Bewegungsproblme zurückführen läßt.*

Auflösung. Die Lagenparameter des Systems seien x, y und sie seien so gewählt, daß der Ausdruck für die kinetische Energie die Form annimmt

$$2T = \lambda(\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

wobei λ eine Funktion von x und y bedeutet. Die Bewegungsglei chungen lauten dann, wenn t die Zeit bezeichnet,

$$\frac{d(\lambda\dot{x})}{dt} - \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$\frac{d(\lambda\dot{y})}{dt} - \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Außerdem wird

$$\frac{1}{2}\lambda(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = h + U.$$

Setzen wir nun

$$dt = \lambda dt,$$

so erhalten wir leicht

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial x}[\lambda(U+h)], \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial y}[\lambda(U+h)];$$

dies aber sind die Gleichungen für die Bewegung eines Punktes in einer Ebene, wenn die Kräftefunktion $\lambda(U+h)$ ist.

Wird insbesondere $\lambda(U+h) = \varphi(x) - \psi(y)$, so finden wir

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\varphi'(x), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \psi'(y),$$

woraus mit Rücksicht auf das Prinzip der Erhaltung der Energie

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\varphi(x) + A, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \psi(y) - A.$$

Das Problem ist so auf Quadraturen zurückgeführt. Die Gleichung der Bahnkurve lautet

$$\frac{dx}{\sqrt{A - \varphi(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{\psi(y) - A}}.$$

Wenn die Trennung der Variabeln für jeden Wert von h gilt, so folgt durch Subtraktion der beiden Funktionen $\lambda(U+1)$ und $\lambda\, U$,

die sich für $h = 1$ und $h = 0$ ergeben, daß auch λ von der Form $\lambda = \alpha(x) - \beta(y)$ sein muß, und mithin finden wir für das Quadrat des Linienelementes

$$ds^2 = [\alpha(x) - \beta(y)][dx^2 + dy^2].$$

Diese Form ergibt sich in folgenden Fällen: 1. für gewöhnliche kartesische Koordinaten, wo $\alpha(x) = \beta(y) = 1$; 2. für Polarkoordinaten, bei denen wir für $x = \log r$, $y = \theta$ finden $ds^2 = e^{2x}(x^2 + y^2)$, so daß die Kräftefunktion die Form haben muß: $U = \varphi(x) - e^{-2x}\psi(y)$; 3. im Falle elliptischer und parabolischer Koordinaten; dies sind aber auch die einzigen Fälle. Vgl. Liouville, Journal de Math. Vol. 11 (1846), p. 345; Vol. 12 (1847) p. 410.

13. Aufgabe. *Es seien von dem Impuls eines holonomen Systems* $\mathbf{R}$ *der Vektor,* $\mathbf{M}$ *das Moment und* U, V, W *die Komponenten von* $\mathbf{R}$, P, Q, R *die von* $\mathbf{M}$; $R_x, R_y, R_z, M_x, M_y, M_z$ *seien entsprechend die Koordinaten des Vektorsystems, das die an dem materiellen System angreifenden Kräfte bilden, alle Koordinaten bezogen auf ein festes Bezugssystem. Dann bestehen die Gleichungen*

$$\left.\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= R_x + \lambda_1 \sum_i \frac{\partial L_1}{\partial x_i} + \cdots, \text{ usw.} \\ \frac{dP}{dt} &= M_x + \lambda_1 \sum_i \left(y_i \frac{\partial L_1}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial L_1}{\partial y_i}\right) + \cdots, \text{ usw.} \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

Welchen Einschränkungen müssen die Bedingungsgleichungen unterworfen sein, damit eine der Gleichungen besteht:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= R_x, \quad \frac{dV}{dt} = R_y, \quad \frac{dW}{dt} = R_z, \\ \frac{dP}{dt} &= M_x, \quad \frac{dQ}{dt} = M_y, \quad \frac{dR}{dt} = M_z. \end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

Auflösung. Die Gleichungen (I) folgen mit Leichtigkeit aus den Lagrangeschen Gleichungen in der ersten Form. Damit die erste der Gleichungen (II) erfüllt ist, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\lambda_1 \sum_i \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \sum_i \frac{\partial \mathfrak{L}_2}{\partial x_i} + \cdots = 0 \quad \text{(a)}$$

wird. Im Falle einer einzigen Bedingungsgleichung $\mathfrak{L}_1 = 0$ reduziert sie sich auf

$$\frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial x_n} = 0,$$

also ist $\mathfrak{L}_1$ eine Funktion von den Differenzen der x, wie man sofort sieht, wenn man setzt

$$x_1 = \xi_1, \; x_2 = \xi_1 + \xi_2, \; \cdots, \; x_n = \xi_1 + \xi_n;$$

dann verwandelt sich die vorige Gleichung, indem man mit $(\mathfrak{L}_1)$ bezeichnet, was so aus $\mathfrak{L}_1$ wird, in

$$\frac{\partial(\mathfrak{L}_1)}{\partial \xi_1} = 0,$$

also ist $(\mathfrak{L}_1)$ von ξ_1 unabhängig und nur eine Funktion von

$$\xi_2 = x_2 - x_1, \cdots, \; \xi_n = x_n - x_1.$$

Die allgemeine Gleichung (a) geht auf dieselbe Weise über in

$$\lambda_1 \frac{\partial(\mathfrak{L}_1)}{\partial \xi_1} + \lambda_2 \frac{\partial(\mathfrak{L}_2)}{\partial \xi_1} + \cdots = 0.$$

Man kann aber annehmen, daß man zuvor ξ_1 aus allen Gleichungen mit Ausnahme der ersten $(\mathfrak{L}_1) = 0$ eliminiert hat. Dann reduziert sich die vorige Gleichung wieder auf

$$\frac{\partial(\mathfrak{L}_1)}{\partial \xi_1} = 0,$$

d. h. keine der Gleichungen enthält die Variable ξ_1. Also müssen, damit die erste der Gleichungen (II) besteht, die Bedingungsgleichungen die x nur in ihren Differenzen zu je zweien enthalten, während die y und z in beliebigen Verbindungen vorkommen können. In diesem Falle gestatten die Bedingungsgleichungen eine Parallelverschiebung des Systems in der Richtung der x-Achse. Die gleichen Schlüsse gelten auch für die zweite und dritte Gleichung.

Damit die vierte Gleichung (II) besteht, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\lambda_1 \sum \left(y_i \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial y_i} \right) + \cdots = 0 \qquad \text{(b)}$$

wird. Führen wir in der yz-Ebene ein System von Polarkoordinaten r, θ ein, so ergibt sich sofort, da

$$\frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial \theta_i} = y_i \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial y_i}$$

wird, daß die Gleichung (b) sich verwandelt in die folgende

$$\lambda_1 \sum \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial \theta_i} + \cdots = 0,$$

die von derselben Form ist wie (a). Also können die θ nur in den Verbindungen $\theta_i - \theta_k$ vorkommen. Da aber, wenn O den Koordinatenursprung und M_i, M_k die Projektionen zweier Punkte des Systems auf die yz-Ebene bezeichnen, der Winkel $M_i O M_k$ gleich $\theta_i - \theta_k$ wird und aus den Seiten des Dreiecks $M_i O M_k$ berechnet werden kann, sieht man, daß die Bedingungsgleichungen die Koordinaten y, z nur in den Verbindungen

$$y_i^2 + z_i^2, \quad (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2$$

enthalten können, während die x in beliebiger Weise vorkommen können. Das Analoge gilt für die fünfte und sechste der Gleichungen (II).

Fünftes Kapitel.

Dynamik der starren Systeme.

1. Axiale Trägheitsmomente. Als das Trägheitsmoment eines beliebigen materiellen Systems bezüglich einer Achse bezeichnet man die Summe der Produkte aller Massen m_i des Systems mit den Quadraten ihrer Abstände r_i von der Achse.[1]) Es wird also durch den folgenden Ausdruck gegeben

$$\mathfrak{J} = \Sigma m_i r_i^2, \tag{1}$$

der immer > 0 ist. Handelt es sich um einen kontinuierlich ausgebreiteten Körper, so tritt an die Stelle des vorstehenden Ausdruckes der folgende

$$\mathfrak{J} = \int \mu r^2 d\tau,$$

wobei μ die Dichtigkeit des Volumenelementes $d\tau$ bezeichnet.

Da die Dimensionen von $\mathfrak{J}$

$$[m, l^2]$$

sind, so setzen wir

$$\mathfrak{J} = \text{M} k^2,$$

wobei $\text{M} = \Sigma m_i$ die Gesamtmasse des Systems bedeutet und k eine Länge ist, die der Trägheitsradius bezüglich der Achse heißt. Sie bedeutet die Entfernung von der Achse, in der man eine der Gesamtmasse des Systems gleiche Masse anbringen muß, damit sie dasselbe Trägheitsmoment hat wie das System, oder auch den Radius

1) Diese von Huygens in seinem *Horologium oscillatorium*, 1673, Pars IV begründete Theorie ist von Euler entwickelt worden: *Recherches sur la connaissance mécanique des corps,* Mémoires de l'Académie de Berlin 1758, p. 131; *Theoria motus corporum solidorum*, Rostock 1765, Kap. V.

eines Kreises, dessen Ebene zu der Achse senkrecht ist, dessen Mittelpunkt auf der Achse liegt und auf dem die Masse des Systems sich ausbreiten läßt, derart, daß sie dasselbe Trägheitsmoment behält.

Es sei O ein Punkt der Achse, u ein ihr paralleler Einheitsvektor. Weil

$$r_i = \mathrm{mod}\,[(P_i - O) \wedge u],$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathfrak{J} &= \Sigma m_i[(P_i - O) \wedge u] \times [(P_i - O) \wedge u] \\ &= \Sigma m_i[(P_i - O) \wedge u] \wedge (P_i - O) \times u.\end{aligned}$$

Wir betrachten nun den folgenden Vektor:

$$\left.\begin{aligned}\sigma u &= \Sigma m_i[(P_i - O) \wedge u] \wedge (P_i - O) \\ &= u\,\Sigma m_i(P_i - O)^2 - \Sigma_i m_i \{(P_i - O) \times u\}(P_i - O).\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Hierbei bedeutet das vorgesetzte σ nicht etwa einen Faktor, sondern die als Funktion von O aufgefaßte Operation, durch die aus u der neue Vektor σu hervorgeht.[1]) Aus (2) ergeben sich dann die folgenden Eigenschaften:

Wenn u und v zwei Vektoren sind, m eine reelle Zahl, so wird

$$\sigma(u + v) = \sigma u + \sigma v, \quad \sigma(mu) = m\sigma u,$$
$$u \times \sigma v = v \times \sigma u,$$
$$\sigma(du) = d\sigma u.$$

Wir können nun schreiben

$$\mathfrak{J} = u \times \sigma u. \quad (3)$$

Eine bemerkenswerte Darstellung der verschiedenen Trägheitsmomente des Systems, die zu allen von dem Punkte O ausgehenden Achsen gehören, erhält man, indem man auf jeder Achse von O aus eine reelle, endliche Strecke abträgt, die man gleich $1 : \sqrt{\mathfrak{J}}$ macht, wobei auf jeder Geraden durch O zwei solche entgegengesetzt gleiche Strecken zu liegen kommen.

1) Weiteres über diese „linearen Transformationen" folgt im dritten Teil.

Setzen wir

$$N - O = \frac{u}{\sqrt{\mathfrak{J}}},$$

so ist der Ort des Punktes N eine geschlossene Oberfläche, von der O den Mittelpunkt bildet. Ihre Gleichung wird, da

$$\sigma(N - O) = \frac{\sigma u}{\sqrt{\mathfrak{J}}}$$

ist, zufolge (3)

$$(N - O) \times \sigma(N - O) = 1.$$

Dies ist eine Gleichung zweiten Grades, die Fläche ist daher eine Fläche zweiter Ordnung und heißt das **Trägheitsellipsoid** für den Punkt O[1]), ihre Achsen heißen die **Hauptträgheitsachsen** und zu ihnen gehören die **Hauptträgheitsmomente** des Systems.

Ein beliebiges Ellipsoid kann, wie wir noch sehen werden, nicht in allen Fällen als das Trägheitsellipsoid einer bestimmten Massenverteilung aufgefaßt werden. Bei homogenen Rotationskörpern ist auch das Trägheitsellipsoid eine Rotationsfläche; ist der Körper eine Kugel oder ein Würfel, so ist das Trägheitsellipsoid für seinen Mittelpunkt eine Kugel.

Ist das Trägheitsellipsoid gefunden, so ist es leicht, die Richtung des Vektors $\sigma(N - O)$ anzugeben. In der Tat erhält man, wenn man die vorstehende Gleichung des Ellipsoids differenziert,

$$dN \times \sigma(N - O) + (N - O) \times d\sigma(N - O) = 0.$$

Es ist aber

$$(N - O) \times d\sigma(N - O) = (N - O) \times \sigma(dN) = dN \times \sigma(N - O),$$

mithin wird

$$\sigma(N - O) \times dN = 0:$$

Der Vektor $\sigma(N - O)$ ist senkrecht zu der in N an das Trägheitsellipsoid gelegten Tangentialebene.

---

1) Cauchy, *Sur les moments d'inertie*, Exercices de math. 1827 (Œuvres compl. (2) t. VII, p. 124).

Ist $\boldsymbol{i}$ ein Einheitsvektor, der einer der Achsen des Ellipsoides parallel ist, und I das zugehörige Trägheitsmoment, so wird

$$I = \boldsymbol{i} \times \sigma \boldsymbol{i},$$

und da nach der soeben entwickelten Eigenschaft $\sigma \boldsymbol{i}$ zu $\boldsymbol{i}$ parallel ist, ergibt sich

$$\sigma \boldsymbol{i} = I \cdot \boldsymbol{i}.$$

Wir beweisen nun zwei sehr wichtige Sätze.

1. **Eine der gefundenen Hauptachsen ist Hauptträgheitsachse für einen einzigen ihrer Punkte; nur die Hauptträgheitsachsen des Schwerpunktes sind Hauptachsen für jeden ihrer Punkte.**

Wir haben zunächst

$$\sum m_i [(P_i - O) \wedge \boldsymbol{i}] \wedge (P_i - O) = I \cdot \boldsymbol{i};$$

nun wählen wir einen Punkt O' derart, daß

$$O' - O = h\boldsymbol{i},$$

und es bedeute OO' auch eine Hauptachse für den Punkt O', so daß auch

$$\sum m_i [(P_i - O') \wedge \boldsymbol{i}] \wedge (P_i - O') = I \cdot \boldsymbol{i}$$

wird. Dann finden wir sofort

$$\sum m_i [(P_i - O) \wedge \boldsymbol{i}] \wedge \boldsymbol{i} = 0,$$

d. h. wenn S den Schwerpunkt bezeichnet

$$[(S - O) \wedge \boldsymbol{i}] \wedge \boldsymbol{i} = 0,$$

also muß $S - O$ zu $\boldsymbol{i}$ parallel sein, mithin S auf OO' liegen.

2. **Ist k der Trägheitsradius für eine Achse, k_1 der Trägheitsradius für eine dazu parallele Achse durch den Schwerpunkt S, δ der Abstand der beiden parallelen Achsen, so wird**

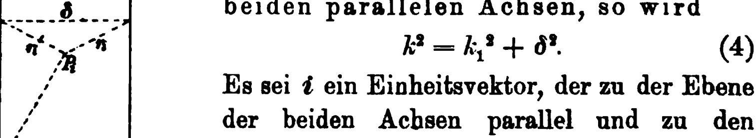


Fig. 16.

$$k^2 = k_1^2 + \delta^2. \tag{4}$$

Es sei $\boldsymbol{i}$ ein Einheitsvektor, der zu der Ebene der beiden Achsen parallel und zu den Achsen selbst normal ist, so wird für die Abstände r_i, r_i' eines Punktes P_i von den

beiden Achsen

$$r_i^2 = r_i'^2 + \delta^2 - 2\delta(P_i - S) \times \mathfrak{i},$$

denn $\mathfrak{i}$ hat die Richtung des Abstandes der beiden Achsen. Mithin wird

$$\sum m_i r_i^2 = \sum m_i r_i'^2 + \mathrm{M}\delta^2 - 2\delta\mathfrak{i} \times \sum m_i(P_i - S),$$

und da $\sum m_i(P_i - S) = 0$, ergibt sich die Gleichung (4). Durch dieses Theorem wird die Berechnung der Trägheitsmomente auf die für die Achsen durch den Schwerpunkt zurückgeführt.[1])

Für ein orthogonales Tripel von Fundamentalvektoren $O(e_1, e_2, e_3)$ setzen wir

$$u = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3, \quad P_i - O = x_i e_1 + y_i e_2 + z_i e_3,$$
$$N - O = \xi e_1 + \eta e_2 + \zeta e_3.$$

Dann werden die zugehörigen Trägheitsmomente

$$\begin{aligned} A &= e_1 \times \sigma e_1 \\ &= \sum m_i\{(P_i - O)^2 - [(P_i - O) \times e_1]^2\} \\ &= \sum m_i(y_i^2 + z_i^2) \end{aligned}$$

und ebenso

$$B = e_2 \times \sigma e_2 = \sum m_i(z_i^2 + x_i^2),$$
$$C = e_3 \times \sigma e_3 = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2),$$

ferner wird

$$-2A' = e_2 \times \sigma e_3 + e_3 \times \sigma e_2 = 2e_2 \times \sigma e_3 = -2\sum m_i y_i z_i$$

und analog

$$B' = \sum m_i z_i x_i, \quad C' = \sum m_i x_i y_i.$$

Es ergibt sich sofort, daß der Ausdruck

$$A + B + C = 2\sum m_i(P_i - O)^2$$

von der Orientierung der Koordinatenachsen unabhängig ist, ferner zeigt sich, daß

$$B + C - A > 0, \quad C + A - B > 0, \quad A + B - C > 0.$$

Für den Wert des Trägheitsmomentes $\mathfrak{J} = u \times \sigma u$ bezüglich

1) Huygens, Horologium oscillatorium, Pars IV, Prop. XVIII

der durch O gehenden Achse, die durch u festgelegt wird, finden wir, da

$$\sigma u = \alpha \cdot \sigma e_1 + \beta \cdot \sigma e_2 + \gamma \cdot \sigma e_3$$

ist,

$$\mathfrak{J} = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2A'\beta\gamma - 2B'\gamma\alpha - 2C'\alpha\beta, \quad (5)$$

also eine quadratische Form der Richtungskosinus α, β, γ.

Die Gleichung des Trägheitsellipsoids lautet entsprechend

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - 2A'\eta\zeta - 2B'\zeta\xi - 2C'\xi\eta = 1.$$

Ist sie auf die Hauptachsen bezogen, so ist

$$A' = 0, \quad B' = 0, \quad C' = 0$$

und die Gleichung wird dann

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1.$$

Führt man die Hauptträgheitsradien ein durch die Gleichungen

$$A = \mathrm{M}a^2, \quad B = \mathrm{M}b^2, \quad C = \mathrm{M}c^2,$$

so wird die Gleichung des Trägheitsellipsoides

$$a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 = \frac{1}{\mathrm{M}}.$$

Zu diesem Ellipsoid ist das für die Anwendungen häufig bequemere Ellipsoid

$$a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 = 1$$

konzentrisch, ähnlich und ähnlich gelegen.

2. Kinetische Energie und Impulskoordinaten. Wir wollen nun die Beziehungen untersuchen, die in einem gegebenen Augenblicke zwischen der kinetischen Energie und der momentanen Bewegung eines als starr vorausgesetzten Körpers bestehen.

Wir beginnen mit dem besonderen Falle, wo der Körper einen festen Punkt O hat. Da dann

$$\dot{P}_i = \Omega \wedge (P_i - O)$$

ist, werden die Vektorkoordinaten des Impulses

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{R} &= \mathrm{M}\Omega \wedge (S - O) = \mathrm{M}\dot{S}, \\ \boldsymbol{M} &= \sum m_i (P_i - O) \wedge [\Omega \wedge (P_i - O)]. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Mithin wird nach (2)

$$M = \sigma\Omega$$

und, wenn wir daraus in der gewöhnlichen Weise mit σ^{-1} die zu σ inverse Operation bezeichnen,

$$\Omega = \sigma^{-1} M.$$

Für die kinetische Energie haben wir

$$2T = \sum m_i \dot{P}_i \times \dot{P}_i = \sum m_i \dot{P}_i \times \Omega \wedge (P_i - O),$$

also

$$2T = \Omega \times M \tag{7}$$

oder

$$2T = \Omega \times \sigma\Omega = M \times \sigma^{-1} M.$$

Setzen wir mod $\Omega = \omega$ und bezeichnen mit u den Einheitsvektor, der durch die Gleichung

$$\Omega = \omega u$$

bestimmt wird, so ergibt sich auch

$$2T = \omega u \times \sigma(\omega u) = \omega^2 u \times \sigma u$$

also

$$2T = \mathfrak{J}\omega^2, \tag{8}$$

wenn $\mathfrak{J}$ das Trägheitsmoment bezüglich der momentanen Rotationsachse bezeichnet.

Wir suchen schließlich die Zunahme der kinetischen Energie für eine bestimmte unendlich kleine Zunahme der Geschwindigkeiten aller Punkte des Körpers. Es ergibt sich, da $dP_i = 0$,

$$dT = \sum m_i \dot{P}_i \times d\dot{P}_i, \quad d\dot{P}_i = d\Omega \wedge (P_i - O),$$

mithin

$$dT = M \times d\Omega; \tag{9}$$

differenzieren wir aber (7), so finden wir statt dessen

$$dT = \Omega \times dM. \tag{9a}$$

Die vorstehenden Resultate gestatten eine sehr elegante geometrische Interpretation. Durch den Punkt

$$\mathfrak{C} = O + \Omega$$

lassen wir ein dem Trägheitsellipsoid ähnliches und ähnlich gelegenes Ellipsoid hindurchgehen. Da dann

$$(\mathfrak{C} - O)^2 = \omega^2, \quad \frac{1}{(N - O)^2} = \mathfrak{J}$$

wird, so finden wir

$$(\mathfrak{C} - O)^2 : (N - O)^2 = \omega^2 \mathfrak{J} = 2T;$$

aber $(\mathfrak{C} - O)^2$ hat zu $(N - O)^2$ ein konstantes Verhältnis, daher ist die Gleichung des hier eingeführten Ellipsoids

$$2T = \Omega \times \sigma\Omega = \text{konst.}$$

und da wir allgemein gezeigt haben, daß der Vektor $\sigma\Omega$ zu Ω senkrecht ist, haben wir den Satz: Das Moment des Impulses ist senkrecht zu der Ebene, die ein beliebiges der zu dem Trägheitsellipsoid ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoide in seinem Schnittpunkte mit der momentanen Rotationsachse berührt.[1])

Wir betrachten nun anderseits den Punkt

$$\mathfrak{R} = O + \boldsymbol{M}$$

und lassen durch ihn das zu dem vorigen reziproke Ellipsoid hindurchgehen, dessen Gleichung lautet

$$\boldsymbol{M} \times \sigma^{-1}\boldsymbol{M} = \text{konst.}$$

Da sich noch ergibt

$$\Omega \times d\boldsymbol{M} = 0,$$

finden wir: Die momentane Rotationsachse ist senkrecht zu der Ebene, die ein beliebiges der ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoide, zu denen das dem Trägheitsellipsoide reziproke Ellipsoid gehört, in seinem Schnittpunkte mit der Achse des Impulsmomentes berührt.[2])

1) Poinsot, *Théorie nouvelle de la rotation d'un corps*, Paris 1834, abgedruckt im Journal de Mathém. pures et appliquées (1) t. 17 (1851), p. 79.

2) Mac Cullagh, *On the rotation etc.*, Proceedings of the Roy. Irish Academy, vol. 2 (1841) p. 520, 542, The collected Works (Dublin 1880) p. 329; Clebsch, *Zur Theorie der Trägheitsmomente usw.*, Journal für Mathematik, Bd. 57 (1859) S. 73.

Es ist nun leicht, zum allgemeinen Falle eines freien Körpers überzugehen. In der Tat genügt es, zu beachten, daß zu der betrachteten Rotation dann nur noch eine Translation von der Geschwindigkeit $\dot{O}$ hinzutritt und bei dieser Translation die Vektorkoordinaten des Impulses lauten:

$$\text{M}\dot{O}, \quad \text{M}(S - O) \wedge \dot{O}.$$

Daher finden wir der Reihe nach

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{R} &= \text{M}\dot{O} + \text{M}\Omega \wedge (S - O), \\ \boldsymbol{M} &= \text{M}(S - O) \wedge \dot{O} + \sigma\Omega; \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} 2T &= \dot{O} \times \boldsymbol{R} + \Omega \times \boldsymbol{M}, \\ dT &= \dot{O} \times d\boldsymbol{R} + \Omega \times d\boldsymbol{M} = \boldsymbol{R} \times d\dot{O} + \boldsymbol{M} \times d\Omega. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Wir setzen nun wie gewöhnlich bei der Einführung kartesischer Koordinaten

$$\dot{O} = u e_1 + v e_2 + w e_3, \quad \Omega = p e_1 + q e_2 + r e_3,$$

ferner

$$\boldsymbol{R} = U e_1 + V e_2 + W e_3, \quad \boldsymbol{M} = P e_1 + Q e_2 + R e_3.$$

Dann sind u, v, w, p, q, r die Koordinaten der momentanen Schraubenbewegung, U, V, W, P, Q, R die Koordinaten des Impulses.

Es zeigt sich sofort, daß die Koordinaten des Impulses homogene lineare Funktionen von den Koordinaten der Schraubenbewegung sind, und somit folgt: Die kinetische Energie ist eine positive, definite quadratische Form der Schraubungskoordinaten.

Aus der ersten Gleichung (11) dagegen ergibt sich:

Die kinetische Energie ist eine bilineare Funktion der Impuls- und der Schraubungskoordinaten, und zwar wird

$$2T = Uu + Vv + Ww + Pp + Qq + Rr. \tag{11a}$$

Aus der zweiten Gleichung (11) leiten wir ab

$$dT = U du + \cdots + P dp + \cdots, \tag{11b}$$

d. h. die Koordinaten des Impulses sind die partiellen Derivierten der kinetischen Energie nach den ein-

zelnen Koordinaten der momentanen Bewegung. Wir haben also

$$U = \frac{\partial T}{\partial u}, \cdots, P = \frac{\partial T}{\partial p}, \cdots.$$

Diese Gleichungen sind linear in u, v, w, p, q, r; die Determinante dieses Systems linearer Gleichungen ist die Diskriminante von T, und da T eine positive quadratische Form ist, so ist die Diskriminante immer positiv. Wir können demnach das vorstehende System linearer Gleichungen nach $u, v, \ldots$ auflösen und damit die Schraubungskoordinaten linear und homogen durch die Impulskoordinaten ausdrücken. Setzen wir dann die so gefundenen Werte in den Ausdruck von T ein, so ergibt sich:

Die kinetische Energie ist auch eine definite, positive quadratische Form der Impulskoordinaten.

Aus (11a) und (11b) folgt sofort, daß auch

$$dT = u\,dU + \cdots + p\,dP + \cdots \tag{11c}$$

ist, oder: Die Koordinaten der momentanen Schraubung sind die partiellen Derivierten der kinetischen Energie nach den Koordinaten des Impulses.[1])

Alles dies gilt für ein beliebiges rechtwinkliges Koordinatensystem. In den folgenden Entwicklungen werden wir häufig ein Koordinatensystem zugrunde legen, dessen Achsen im Körper fest sind, so daß die Werte A, B, C, A', B', C' nicht von der Zeit, sondern nur von der Massenverteilung und der Gestalt des Körpers abhängen.

Auf Grund der gefundenen Relationen gestatten nun die allgemeinen Impulssätze des vorigen Kapitels den Impuls in Beziehung zu den wirkenden Kräften zu setzen; auf diesen Sätzen muß ja in der Tat eine jede dynamische Untersuchung des starren Körpers beruhen.

3. Bewegung eines starren Körpers um eine feste Achse. In dem beliebigen Kräften unterworfenen Körper

1) Klein u. Sommerfeld, *Theorie des Kreisels*, 1. Heft, Leipzig 1898, S. 93ff.

seien zwei Punkte O, O' festgehalten, dann ist auch die Achse OO', die wir zur z-Achse wählen, im Körper und im Raume fest.

Wir wenden die Impulssätze an, indem wir bei dem Ansatz der äußeren Einwirkungen auch die von den festen Punkten herrührenden Reaktionskräfte, die wir mit $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ bezeichnen wollen, in Rechnung ziehen. Wir brauchen, wenn wir zum Bezugspunkt O wählen, nur das Reaktionsmoment $\mathfrak{m}'$ von $\mathfrak{r}'$ für den Punkt O zu nehmen. Wir erhalten also

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathfrak{r} + \mathfrak{r}' + \mathfrak{R}, \quad \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathfrak{m}' + \mathfrak{M}.$$

Wir betrachten zunächst die zweite Gleichung. Da von dem Momente $\mathfrak{m}'$ die Komponente nach der z-Achse verschwindet, erhalten wir, wenn wir die Bezeichnung des vorigen Paragraphen beibehalten,

$$\frac{dR}{dt} = M_z.$$

Es sei ω die momentane Winkelgeschwindigkeit der Drehung (die gleich $\dot{\varphi}$ wird, wenn φ den Winkel bezeichnet, den eine im Körper feste Meridianebene mit einer im Raume festen Ebene bildet), $\mathfrak{J}$ sei das Trägheitsmoment des Körpers für die feste Rotationsachse, dann wird

$$T = \tfrac{1}{2}\mathfrak{J}\omega^2, \quad R = \frac{\partial T}{\partial \omega} = \mathfrak{J}\omega = \mathfrak{J}\dot{\varphi}.$$

Es ist zu beachten, daß die Summe der von den Radienvektoren der Punkte des Systems beschriebenen Flächen, jede multipliziert mit der zugehörigen Masse, den Wert erhält

$$\sum m_i \cdot \tfrac{1}{2} r_i \cdot r_i \omega = \tfrac{1}{2}\omega \sum m_i r_i^2 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{J}\omega.$$

Außerdem hängt M_z von der Lage der verschiedenen Punkte des Systems und damit von φ ab, ferner von ihrer Geschwindigkeit und damit von $\dot{\varphi}$, endlich auch von der Zeit. Wir können also ansetzen

$$\mathfrak{J}\ddot{\varphi} = M_z(\varphi, \dot{\varphi}, t) \tag{12}$$

als die Differentialgleichung der Bewegung. Diese Gleichung bestimmt zusammen mit den Anfangsbedingungen φ als Funktion

der Zeit und so die Bewegung. Die Bestimmung der Bewegung hängt demnach von der Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung ab, deren Beschaffenheit bekannt und der Gleichung (1) des ersten Kapitels analog ist. Die Integration läßt sich durch Quadraturen ausführen, wenn M_z nur von φ oder von $\dot{\varphi}$ oder von t abhängt.

Wenn die äußeren Kräfte ein Potential besitzen und wir mit Π die potentielle Energie bezeichnen, die nur von φ abhängt, so läßt die Gleichung (12) ein erstes Integral zu (das Integral der Energieerhaltung); wir finden

$$\mathfrak{J}\dot{\varphi}^2 + 2\Pi(\varphi) = h, \tag{13}$$

und mit Hilfe dieses Integrals läßt sich durch eine einzige Quadratur φ bestimmen.

Es bleibt nun noch die Bestimmung der Reaktionskräfte zu erledigen. Aus der ersten Impulsgleichung leiten wir ab, da alle Geschwindigkeiten und damit auch der Impulsvektor $\boldsymbol{R}$ senkrecht zur festen Achse sind,

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{e}_3 + \mathfrak{R} \times \boldsymbol{e}_3 = 0,$$

wobei $\boldsymbol{e}_3$ die Richtung der festen Achse hat, also $O' - O = l\boldsymbol{e}_3$ wird. So können wir die Summe der Komponenten der Reaktionskräfte nach der festen Achse finden. Legen wir nun durch O eine Ebene senkrecht zu der festen Achse und bezeichnen mit P_k' die Projektion der Systempunkte auf diese Ebene, mit S' die Projektion des Schwerpunktes S, so wird

$$\boldsymbol{R} = \sum m_k \dot{P}_k' = \sum m_k \omega i(P_k' - O) = \mathrm{M}\omega i(S' - O)$$

und mithin

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \mathrm{M}(\dot{\omega} i - \omega^2)(S' - O);$$

wenn wir also mit $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}', \mathfrak{R}$ die Komponenten von $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \mathfrak{R}$ nach der Ebene bezeichnen, erhalten wir

$$\mathfrak{R} + \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n}' + \mathrm{M}(S' - O)(\omega^2 - \dot{\omega} i) = 0. \tag{14}$$

Ebenso verfahren wir auch mit den Momenten, d. h. der zweiten Impulsgleichung. Es seien in der üblichen Weise

e_1, e_2 zwei Einheitsvektoren, die mit e_3 ein orthogonales Tripel bilden. Da

$$\Omega = \omega e_3, \quad M = \sigma \Omega = \omega \cdot \sigma e_3$$

wird, hat die Komponente von M nach der Ebene den Wert

$$(M \times e_1) e_1 + (M \times e_2) e_2 = -\omega (B' e_1 + A' e_2)$$

nach den Festsetzungen im ersten Paragraphen (S. 164). Ihre Derivierte nach der Zeit wird, wenn wir beachten, daß

$$\dot{e}_1 = \omega e_2, \quad \dot{e}_2 = -\omega e_1$$

ist, gegeben durch

$$-\dot{\omega}(B' e_1 + A' e_2) - \omega^2 (B' e_2 - A' e_1).$$

Das Moment von r' für O ist lin', folglich wird

$$M_x e_1 + M_y e_2 + lin' + \dot{\omega}(B' e_1 + A' e_2) + \omega^2 (B' e_2 - A' e_1) = 0. \quad (15)$$

Diese Gleichung liefert uns n' und darauf (14) den Wert von n.

4. Kräftefreie Bewegung. Physisches Pendel. Wir wollen jetzt zwei besondere Fälle betrachten.

a) Der erste Fall ist der, wo der Körper keinen Kräften unterworfen ist. Das Integral der Energieerhaltung drückt dann sofort aus, daß die kinetische Energie konstant ist und mithin auch $\omega =$ konst. wird: der Körper rotiert gleichförmig um die Achse.

Der Rotationspol ist demnach ein fester Punkt C der Achse; das durch diesen Punkt C gehende und dem Trägheitsellipsoid für O ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsoid $\mathfrak{E}$ rotiert ebenfalls gleichförmig um die Achse.

Die Änderung des Impulsmomentes ist allgemein gleich dem Moment der äußeren Kräfte. In diesem Fall reduzieren sich aber die Kräfte auf die beiden Reaktionskräfte in O und O'. Wählen wir O zum Ursprung, so brauchen wir also nur das Moment der in O' wirkenden Kraft in Betracht zu ziehen, und es bleibt die Bedingung übrig, daß der Körper auf den Punkt O' keinen Druck ausüben darf. Der Körper rotiert also frei um die Achse OO', diese Achse hat die Richtung des

(konstanten) Impulsmomentes, sie muß also nach dem früher gefundenen Satze senkrecht sein zu der Tangentialebene an das Ellipsoid $\mathfrak{E}$ in dessen Schnittpunkt mit der Achse des Impulsmomentes, d. h. in C. Mithin steht in diesem Punkte die Tangentialebene des Ellipsoids auf dem zugehörigen (mit OO' zusammenfallenden) Durchmesser senkrecht, also ist die Achse OO' eine Hauptachse des Ellipsoids und damit eine Hauptträgheitsachse für O.

Dasselbe zeigt die Gleichung (15), da aus $\dot{\omega}, \mathfrak{M}, \boldsymbol{n}' = 0$ auch $A', B' = 0$ folgt.

Wir können demnach sagen: Soll ein Körper, von dem nur ein Punkt O festgehalten wird, trotzdem, ohne daß äußere Kräfte auf ihn einwirken, fortdauernd um eine und dieselbe Achse rotieren, so muß dies eine der Hauptträgheitsachsen des Körpers sein. Aus diesem Grunde heißen diese Achsen auch permanente Rotationsachsen.[1])

Soll auch das Festhalten des Punktes O überflüssig werden, so muß die feste Achse auch Hauptträgheitsachse für O' sein und ist es mithin für jeden ihrer Punkte, sie geht also durch den Schwerpunkt hindurch. Dasselbe ergibt sich auch aus (14), denn hieraus folgt

$$S' - O = 0,$$

d. h. der Punkt O liegt auf der durch den Schwerpunkt S' gezogenen Parallelen zur Rotationsachse, diese Achse geht also selbst durch den Schwerpunkt:

1) Segner, Specimen theoriae turbinum, Halae 1755. Der Mathematiker Segner, geboren in Preßburg 1704, gestorben 1777, war einer der bedeutendsten Männer des 18. Jahrhunderts. Er lehrte in Göttingen (1735—1754) und darauf in Halle. Nähere Einzelheiten über ihn bei S. Günther, *Note sur Jean-André de Segner,* im Bullettino di Bibliografia e storia delle Scienze mat., t. 9, p. 217 (1876) und C. H. Müller, *Studien zur Geschichte der Mathematik, insbesondere des math. Unterrichtes an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert,* Abh. zur Gesch. d. mathem. Wissensch., 18. Heft, S. 51, Leipzig 1904.

Ein freier starrer Körper, auf den keine Kräfte wirken, kann nur um eine der Hauptträgheitsachsen des Schwerpunktes eine Drehung fortsetzen, als ob die Achse fest wäre. Deshalb heißen diese Achsen auch spontane Rotationsachsen.

b) Wir nehmen jetzt die Achse in dem Körper wieder beliebig an, denken sie uns aber durch das Festhalten zweier Punkte befestigt und in horizontaler Lage, wir setzen ferner voraus, daß auf den Körper allein die Schwere wirkt. Wir sprechen dann von einem physischen Pendel. Rechnen wir den Winkel φ von der Vertikalebene aus, die durch die Achse geht, so folgt aus der Entfernung r_i einer Masse m_i von der Achse und dem Winkel $\varphi + \theta_i$, den die Richtung dieser Entfernung mit der Vertikalebene bildet, die Tiefe

$$r_i \cos(\varphi + \theta_i)$$

der Masse unter der durch die Achse gehenden horizontalen Ebene und wir können die potentielle Energie der Schwere in der Form ansetzen

$$\Pi = -g\sum m_i r_i \cos(\varphi + \theta_i).$$

Die Winkel θ_i rechnen wir von der im Körper festen Ebene η aus, deren Neigung φ gegen die Vertikale die augenblickliche Lage des Körpers festlegt. Wir können diese im Körper feste Ebene η insbesondere so annehmen, daß

$$\sum m_i r_i \sin\theta_i = 0 \quad \text{oder} \quad \sum m_i p_i = 0$$

wird, wenn p_i die Abstände der einzelnen Massenpunkte von ihr bezeichnen. Diese Gleichung ist erfüllt, wenn die Ebene durch den Schwerpunkt geht, und ist s ferner der Abstand des Schwerpunktes von der festen Achse, so wird auch

$$\sum m_i r_i \cos\theta_i = \mathrm{M}s,$$

denn $r_i \cos\theta_i$ sind die Abstände der Massenpunkte von einer zu η senkrechten Ebene durch die feste Achse. So wird die Gleichung (13)

$$\mathfrak{J}\omega^2 = h + 2\mathrm{M}gs\cos\varphi$$

oder, wenn wir noch $\mathfrak{J} = Mk^2$ setzen,

$$\omega^2 = \frac{2gs}{k^2}(\cos\varphi + c),$$

wo c wieder eine Konstante bedeutet. Vergleichen wir dies mit der Bewegungsgleichung eines mathematischen Pendels von der Länge l

$$\omega^2 = \frac{2g}{l}(\cos\varphi + c),$$

so sehen wir, daß das physische Pendel sich wie ein mathematisches Pendel bewegt, dessen Länge $l = k^2 : s$ ist.

Es ist leicht zu zeigen, daß hierbei stets $l > s$ wird, denn nennen wir k_0 den Trägheitsradius des Schwerpunktes, so wird $k^2 = s^2 + k_0^2$, also $\frac{k^2}{s} = s + \frac{k_0^2}{s} > s$.

Wir nehmen nun in der Ebene η durch den Schwerpunkt eine zweite Achse parallel zur ersten Achse in der Entfernung l von ihr an. Nennen wir s' den Abstand des Schwerpunktes von dieser zweiten Achse, so wird $s' = \frac{k^2}{s} - s = \frac{k_0^2}{s}$. Es ist also $ss' = k_0^2$, $l = s + s'$ und daraus ist zu sehen, daß die beiden Achsen vertauschbar sind, d. h. daß das Pendel in der gleichen Weise schwingt, gleichgiltig welche von den beiden Achsen wir als feste Achse wählen. In der Tat wird die reduzierte Pendellänge l dieselbe, von welcher der beiden Achsen wir auch ausgehen.

Der Punkt der einer gegebenen so zugeordneten Achse, der in der Ruhelage unter dem Schwerpunkte liegt, heißt der Schwingungsmittelpunkt.

Die halbe Schwingungsdauer des Pendels ist für sehr kleine Schwingungen gegeben durch

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}:$$

auch die kleinen Schwingungen eines physischen Pendels sind isochron. Die halbe Schwingungsdauer wird gleich 1, wenn die reduzierte Länge den Wert $\lambda = \frac{g}{\pi^2}$ hat (Länge des Sekundenpendels). Es ergibt sich daraus dann $l = \lambda\tau^2$.

Wir nehmen nun an, wir hätten zwei parallele Achsen in den Abständen s und s_1 vom Schwerpunkte gefunden, für welche die Schwingungsdauer τ dieselbe ist, dann wird

$$s^2 + k_0^2 = s\lambda\tau^2, \quad s_1^2 + k_0^2 = s_1\lambda\tau^2$$

und daraus

$$s + s_1 = \lambda \cdot \tau^2.$$

Darauf beruht ein Verfahren, die Länge des Sekundenpendels zu bestimmen, indem man zwei solche Achsen auswählt, für welche die Schwingungsdauer gleich ausfällt. Die beiden Achsen nimmt man zu einander parallel und in einer Ebene durch den Schwerpunkt an. Dividiert man ihren Abstand durch das Quadrat der beobachteten Schwingungsdauer, so erhält man die Länge λ des Sekundenpendels und damit die Beschleunigung der Schwere g. Der zu diesem Verfahren benutzte Apparat wird als Reversionspendel bezeichnet.[1])

Die ganze Theorie des physischen Pendels stammt von Huygens.[2])

5. Der Stoß bei einem um eine feste Achse drehbaren, starren Körper. Perkussionszentrum. Wir denken uns den Körper einer Stoßkraft Γ unterworfen, die auf einen Punkt P in ihm wirkt; $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'$ seien die Stoßkräfte für die Aufhängepunkte O, O'. Behalten wir die Bezeichnungen von § 3 bei und wenden an, was wir in Kap. III, § 2 auseinandergesetzt haben, so ergibt sich

$$\Delta \boldsymbol{R} = \Gamma + \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}', \quad \Delta \boldsymbol{M} = (P - O) \wedge \Gamma + lin'$$

und wir können weiter ganz analog wie in § 3 verfahren.

Wir suchen insbesondere die Bedingungen dafür, daß

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' = 0$$

wird. Wir finden dann sofort

1) Dieses Pendel findet sich bereits beschrieben in Bohnenbergers *Astronomie* (Tübingen 1811) S. 448. Praktisch verwendet wurde es zuerst von Kater: *Experiments for determining the length of the Pendulum vibrating Seconds,* Philos. Transactions 1818, p. 32.

2) *Horologium oscillatorium,* Pars IV. Die von Huygens befolgte Methode ist sehr gut erörtert in Machs *Mechanik.*

$$\Gamma \times e_3 = 0,$$

also steht die Stoßkraft zur festen Achse senkrecht, und wenn wir demnach e_2 parallel zu Γ annehmen und eine Ebene ins Auge fassen, die in einem Punkte O_1 auf der festen Achse senkrecht steht und die Kraft Γ enthält, so ergibt sich aus (15), weil jetzt $M_x = 0$, $M_y = 0$, $n' = 0$ und endlich $\omega = 0$ ist,

$$(B'e_1 + A'e_2)\Delta\omega = 0,$$

mithin $A', B' = 0$: die feste Achse ist Hauptträgheitsachse für einen ihrer Punkte. Da nun

$$\Gamma = e_2 \operatorname{mod} \Gamma = ie_1 \operatorname{mod} \Gamma$$

wird, finden wir weiter nach (14), da jetzt $\mathfrak{R} = \Gamma$, $n, n' = 0$ und $\omega = 0$ ist,

$$\text{M}(S' - O_1)\Delta\omega = e_1 \operatorname{mod} \Gamma,$$

d. h. der Massenmittelpunkt ist von der festen Achse entfernt um die Strecke

$$s = \frac{\operatorname{mod} \Gamma}{\text{M}\Delta\omega}.$$

Endlich wird, da $M = \mathfrak{J}\omega e_3$,

$$\mathfrak{J}\Delta\omega = (P - O) \wedge \Gamma \times e_3 = (P - O) \times e_1 \operatorname{mod} \Gamma,$$

und wenn wir s_1 die Entfernung des Punktes P von der festen Achse nennen, so daß

$$(P - O) \times e_1 = s_1$$

wird, ergibt sich

$$s_1 = \frac{\mathfrak{J}}{\text{M}s} = \frac{k^2}{s},$$

woraus wir den Angriffspunkt der Stoßkraft finden können; s_1 ist dabei, wenn wir den Körper als physisches Pendel auffassen, die Entfernung des Schwingungsmittelpunktes von der festen Achse. Der Punkt P, der hier als Perkussionszentrum bezeichnet wird, ist sonach von dem Schwingungsmittelpunkt des physischen Pendels, was die Entfernung von der festen Achse anbetrifft, nicht verschieden.

6. Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt. Es sei durch den Ursprung O und die Grund-

vektoren e_1, e_2, e_3 ein rechtwinkliges Koordinatensystem festgelegt; O sei der feste Punkt, um den sich der Körper dreht, F die in ihm angreifende Reaktionskraft. Dann liefern uns die Impulssätze sofort die beiden Gleichungen

$$\frac{dR}{dt} = \mathfrak{R} + F, \quad \frac{dM}{dt} = \mathfrak{M}. \tag{17}$$

Setzen wir

$$I - O = M,$$

so sagt die zweite Gleichung aus: **die absolute Geschwindigkeit des Momentenpols I ist gleich dem Momente der äußeren Kräfte für den festen Punkt.**

Nennen wir P, Q, R die Komponenten von M, p, q, r die von Ω, X, Y, Z die von F, R_x, R_y, R_z die von $\mathfrak{R}$, M_x, M_y, M_z die von $\mathfrak{M}$, alle genommen für die im Körper festen Achsen, dann können wir aus den Gleichungen (17) sofort die folgenden herleiten:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dU}{dt} + Wq - Vr &= R_x + X, \\
\frac{dV}{dt} + Ur - Wp &= R_y + Y, \\
\frac{dW}{dt} + Vp - Uq &= R_z + Z;
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} + Rq - Qr &= M_x, \\
\frac{dQ}{dt} + Pr - Rp &= M_y, \\
\frac{dR}{dt} + Qp - Pq &= M_z.
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$ [1]

Die Komponenten P, Q, R des Impulsmomentes sind die Derivierten der kinetischen Energie nach p, q, r und demnach lineare, homogene Funktionen von p, q, r mit konstanten Koeffi-

1) P. Saint-Guilhem, *Nouvelle détermination synthétique du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe*, Journal de Mathém. pures et appliquées (1) t. 19, p 356 (1854), Nouvelles Annales de Math. (1) t. 15, p. 68 (1856); R. B. Hayward, *On a direct method of estimating velocities* etc., Cambridge Phil. Trans. vol. 10 (1856).

zienten, die linken Seiten von (19) sind also Funktionen von p, q, r und lineare Funktionen von $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$. Die rechten Seiten hängen ebenso wie die äußeren Kräfte von den Koordinaten der einzelnen Punkte des Körpers, ihren Geschwindigkeiten und von der Zeit ab. Sie hängen mithin ab von den Richtungskosinus der Grundvektoren e_1, e_2, e_3 und ihren ersten Derivierten. Diese ersten Derivierten sind bestimmt durch

$$\frac{de_1}{dt} = re_2 - qe_3, \quad \frac{de_2}{dt} = pe_3 - re_1, \quad \frac{de_3}{dt} = qe_1 - pe_2. \tag{20}$$

Vom analytischen Gesichtspunkte aus hängt demnach das Problem ab von der simultanen Integration der Gleichungssysteme (19) und (20), d. h. von der Integration eines Systems von zwölf simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung. Über die Integration dieses Systems läßt sich im einzelnen nichts aussagen. Ist die Integration ausgeführt, so liefert die Gleichung (17) oder das Gleichungssystem (18) die Reaktionskraft in dem festen Punkte.

Das System (19) vereinfacht sich bedeutend, wenn e_1, e_2, e_3 den Hauptträgheitsachsen des Punktes O parallel sind. In der Tat wird dann

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 \tag{21}$$

$$P = Ap, \quad Q = Bq, \quad R = Cr \tag{22}$$

und das Gleichungssystem nimmt die folgende Eulersche Form an:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= M_x, \\ B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp &= M_y, \\ C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= M_z. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$ [1]

1) Die Lösung des in diesem Paragraphen behandelten Problems wurde angebahnt von d'Alembert, *Recherches sur la précession des équinoxes*, Paris 1749, und darauf von Euler, *Découverte d'un nouveau principe de Mécanique*, Mémoires de l'Académie de Berlin 1750, p. 185. In der letzteren Arbeit finden sich Gleichungen, die den obenstehenden (23) analog, aber noch nicht auf die Hauptträgheitsachsen bezogen sind.

Verschwinden die äußeren Kräfte oder liefern sie eine Resultante, die durch den festen Punkt geht, so haben wir den Fall eines kräftefreien oder auch den eines in seinem Schwerpunkte unterstützten oder aufgehängten schweren Körpers vor uns. Die Gleichungen (23) werden dann

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)qr,$$

$$B\frac{dq}{dt} = (C - A)rp,$$

$$C\frac{dr}{dt} = (A - B)pq.$$

Wir kommen so auf die bereits im ersten Bande behandelte Poinsotsche Bewegung.[1])

Der Satz von der Erhaltung der Energie und die zweite Gleichung (17) liefern dann die Beziehungen

$$2T = \Omega \times \boldsymbol{M} = h, \quad \boldsymbol{M} = \varkappa,$$

wenn h und $\varkappa$ Konstanten bedeuten. Diese Gleichungen lauten in der anderen Form

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h,$$
$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \varkappa^2$$

und lassen sich, wie wir es im ersten Bande getan haben, aus den Bewegungsgleichungen unmittelbar ableiten. Setzen wir $P - O = \Omega$ und legen in P an das zum Trägheitsellipsoid ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsoid die Tangentialebene, so wird diese Ebene senkrecht zu $\boldsymbol{M}$. Da außerdem die Projektion von Ω auf $\boldsymbol{M}$ konstant ist, ergibt sich, daß die Ebene im Raume fest ist und mithin das Ellipsoid ohne Gleitung auf einer festen Ebene rollt. So finden wir wieder die Grundeigenschaft der Poinsotschen Bewegung.

Nach der Entdeckung dieser Achsen durch Segner gelangte Euler durch die so entstehende Vereinfachung der bereits gefundenen Gleichungen wirklich zu der Gleichungsform (23): *Du mouvement de rotation* etc., Mémoires de l'Académie de Berlin 1758, p. 154, Theoria motus corporum rigidorum, Rostock 1765, Cap. XI—XV.

1) Poinsot, *Théorie nouvelle de la rotation d'un corps*, Paris 1834, Journal de math. pures et appliquées (1) t. 17, p. 79 (1851).

Es ist aber von Wichtigkeit, hervorzuheben, wie die Bewegung, die wir hier vor uns haben, unter den Poinsotschen Bewegungen ausgezeichnet ist. Zunächst können wir voraussetzen

$$A > B > C > 0.$$

Da A, B, C aber die Hauptträgheitsmomente sind, folgt weiter

$$B + C > A.$$

Dies ist die Besonderheit der hier auftretenden Poinsotschen Bewegung. Schon bei der allgemeinen Poinsotschen Bewegung hatten wir als Bedingung dafür, daß sie in reeller Form möglich ist, gefunden

$$Ah > \varkappa^2 > Ch$$

oder, wenn wir wieder $h = D\delta^2$, $\varkappa^2 = D^2\delta^2$ setzen,

$$A > D > C.$$

7. Bewegung eines schweren, an einem festen Punkte aufgehängten starren Körpers. Wir bezeichnen mit g einen vertikal nach abwärts gerichteten Einheitsvektor, dann wird das Moment $\mathfrak{M}$ der äußeren Kräfte gleich

$$\text{M}(S - O) \wedge g.$$

Die zweite der Gleichungen (17) liefert sodann

$$\frac{dM}{dt} = \text{M}(S - O) \wedge g. \tag{23}$$

In dieser Gleichung sind alle Bewegungsgesetze enthalten. Multiplizieren wir sie skalar mit Ω und halten uns gegenwärtig, daß

$$\frac{dT}{dt} = \Omega \times \frac{dM}{dt}, \quad \frac{dS}{dt} = \Omega \wedge (S - O)$$

ist, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \text{M}\Omega \times (S - O) \wedge g = \text{M}\Omega \wedge (S - O) \times g \\ &= \frac{d}{dt}\{\text{M}(S - O) \times g\} \end{aligned}$$

und demnach

$$T = \text{M}(S - O) \times g + \tfrac{1}{2}h. \tag{24}$$

Dies ist das Integral der Erhaltung der Energie.

Multiplizieren wir (23) skalar mit g, so ergibt sich

$$g \times \frac{dM}{dt} = 0$$

oder

$$M \times g = \text{konst.} \tag{25}$$

die vertikale Komponente des Impulsmomentes ist also konstant, d. h. wenn wir die im Raume von dem Endpunkte des Vektors M beschriebene Kurve, welche die erste Impulskurve heißt, ins Auge fassen, so können wir sagen: die erste Impulskurve ist in einer horizontalen Ebene enthalten

Außer den beiden gefundenen Integralen (24) und (25) läßt sich aber im allgemeinen kein weiteres Integral bestimmen. Wir können indessen bemerken, daß aus (23) noch die Relation folgt:

$$\frac{d}{dt}\{(S-O) \times M\} = (S-O) \wedge M \times \Omega. \tag{26}$$

Um zu erkennen, welchen Schwierigkeiten die analytische Lösung des Problems begegnet, beziehen wir alle Größen auf die Hauptträgheitsachsen und nennen α, β, γ die Komponenten von g bezüglich dieser Achsen, ξ, η, ζ die Komponenten von $S-O$. Dann löst sich (23) in die folgenden drei Gleichungen auf:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr &= \text{M}(\eta\gamma - \zeta\beta), \\ B\frac{dq}{dt} + (A-C)rp &= \text{M}(\zeta\alpha - \xi\gamma), \\ C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq &= \text{M}(\xi\beta - \eta\alpha). \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Zu diesen müssen wir die nachstehenden hinzunehmen, die sich aus

$$\frac{dg}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dg}{dt} + \Omega \wedge g = 0$$

ergeben:

$$\frac{d\alpha}{dt} = r\beta - q\gamma, \quad \frac{d\beta}{dt} = p\gamma - r\alpha, \quad \frac{d\gamma}{dt} = q\alpha - p\beta. \tag{27a}$$

Diese Gleichungen sind nichts anderes wie die Poissonschen Gleichungen (Erster Band, S. 112, Formeln (11)).

Wir haben also ein System von sechs linearen Differentialgleichungen zu integrieren und dieses reduziert sich, wenn wir dt eliminieren, auf ein System von folgender Form:

$$\frac{dp}{\mathfrak{P}} = \frac{dq}{\mathfrak{Q}} = \frac{dr}{\mathfrak{R}} = \frac{d\alpha}{\mathfrak{A}} = \frac{d\beta}{\mathfrak{B}} = \frac{d\gamma}{\mathfrak{C}}. \tag{27 b}$$

Man sieht sofort, daß p in $\mathfrak{P}$, q in $\mathfrak{Q}$, r in $\mathfrak{R}$, α in $\mathfrak{A}$, β in $\mathfrak{B}$, γ in $\mathfrak{C}$ nicht enthalten ist. Von dem System (27b) kennt man drei (von der Zeit unabhängige) Integrale. In der Tat liefern (24), (25) und die bekannte Relation zwischen den Richtungskosinus α, β, γ der Reihe nach:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h + 2\textsc{m}(\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma),$$

$$Ap\alpha + Bq\beta + Cr\gamma = \text{konst.},$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

und da

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial p} + \cdots + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \alpha} + \cdots = 0$$

ist (denn alle einzelnen Glieder dieser Summe sind ja Null), so liefert die Theorie des letzten Multiplikators[1]) den Satz, daß die Kenntnis eines vierten Integrals des Systems (27b), welches von den vorstehenden unabhängig ist, ein fünftes Integral durch eine bloße Quadratur zu finden erlaubt. Es gestattet also die Kenntnis eines vierten von der Zeit unabhängigen Integrals, das Problem durch eine einfache Quadratur zu lösen. Im allgemeinen aber läßt sich, von bestimmten Anfangsbedingungen der Bewegung abgesehen, jenes vierte Integral nicht angeben.

Es ist indessen in folgenden speziellen Fällen ermittelt worden:

1. Der Körper ist in seinem Schwerpunkt aufgehängt. Dann ist $S - O = 0$ und wir kommen wieder auf den bereits betrachteten Eulerschen Fall, für den $\boldsymbol{M} =$ konst. ist.

1) Jacobi, Vorlesungen über Dynamik (1842—43) hggb. von Clebsch (Berlin 1866), Werke Supplement S. 97ff.

2. Das Trägheitsellipsoid ist ein Rotationsellipsoid, auf dessen Achse der Schwerpunkt liegt. Diese Bedingungen sind sicher erfüllt, wenn der Körper ein homogener, schwerer Rotationskörper und an einem Punkte seiner Symmetrieachse aufgehängt ist (Lagrangescher Fall).[1])

Da die Normale, die man im Rotationspol 𝕮 auf dem mehrfach benutzten Ellipsoid errichtet, zu $\boldsymbol{M}$ parallel ist und die Achse des Rotationsellipsoides, also die Linie OS, treffen muß, so finden wir sofort: die drei Vektoren $\boldsymbol{M}$, Ω, $S-O$ sind komplanar. Daher liefert uns (26) das folgende Integral

$$(S-O) \times \boldsymbol{M} = \text{konst.} \tag{28}$$

es ist also die Komponente des Impulsmomentes nach der Symmetrieachse konstant, oder die von dem Endpunkte 𝕶 des Vektors $\boldsymbol{M}$ im Körper beschriebene Kurve, die sogen. zweite Impulskurve, ist in einer zur Symmetrieachse normalen Ebene enthalten.

Man findet noch, daß auch die Komponente der momentanen Rotationsgeschwindigkeit nach der Symmetrieachse konstant ist, oder: die Polhodie ist eine ebene Kurve und in einer zur Symmetrieachse normalen Ebene enthalten.

Die Quadraturen lassen sich mit Hilfe von elliptischen Funktionen ausführen. Jacobi hat den folgenden merkwürdigen Satz bewiesen, den wir bloß anführen wollen: Die Bewegung eines schweren, an einem Punkte seiner Symmetrieachse aufgehängten Körpers ist gleichbedeutend mit der Relativbewegung bei zwei Poinsotschen Bewegungen.[2])

1) Lagrange, Mécanique analytique, Œuvres complètes t. XII, p. 253. Es existieren über dieses Problem zahlreiche wichtige Arbeiten. Über die Reduktion auf Quadraturen mit Hilfe von elliptischen Funktionen s. Halphen, Fonctions elliptiques, t. II, p. 81; Klein u. Sommerfeld, Theorie des Kreisels, S. 199 u. 392.

2) Fragments sur la rotation d'un corps, communiqués par Lottner, Werke Bd. 2, S. 477. Man vgl. hierzu außer den Büchern von Halphen

3. Der Fall, in dem $A = B = 2C$ und der Schwerpunkt in der Ebene der beiden ersten Hauptträgheitsachsen liegt (Fall der Kowalewska).[1] Auch in diesem Falle kann man ein viertes algebraisches Integral der Gleichungssysteme (27) und (27a) angeben und die Quadraturen lassen sich mit Hilfe von hyperelliptischen Funktionen ausführen.[2]

---

und Klein u. Sommerfeld die *Notes à la Mécanique de Despeyrons* von Darboux und dessen Arbeit *Sur le mouvement d'un corps pesant* etc. Journal de Math. (4) t. 1, p. 403 (1885), ferner Marcolongo, *Teoria del giroscopio simmetrico pesante,* Annali di matem. (3) t. 7, p. 99, (1902).

1) S. Kowalewski, *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe,* Acta mathematica Bd. 12, S. 177 (1889), Mémoires présentés par divers savants étrangers etc. (Paris) t. 30, Nr. 1. Die Bestimmung der Richtungskosinus hat F. Kötter ausgeführt: Acta math. Bd. 17, S. 209 (1893). Mit der geometrischen Deutung des Problems haben sich zahlreiche Arbeiten beschäftigt. Man vgl. eine Monographie von O. Lazzarino, Rendic. R. Accad. di Scienze fisiche e mat. di Napoli (3) vol. 42, p. 68—146 (1911).

2) S. Kowalewski fand den nach ihr benannten Fall bei der Untersuchung der Bedingungen dafür, daß das System (27), (27a) eindeutige Integrale zuläßt, deren Pole im Endlichen liegen. Appelroth, *Über das Problem der Bewegung* usw. Moskau 1893, vervollständigte die Analyse der Kowalewska und zeigte, daß die drei aufgezählten Fälle die einzigen sind, in denen die Integrale eindeutig sind. R. Liouville, *Sur le mouvement d'un corps solide suspendu par un de ses points,* Acta math. Bd. 20, S. 239 (1896), stellte sich die Aufgabe, alle Fälle zu bestimmen, in denen die Differentialgleichungen ein viertes algebraisches von der Zeit unabhängiges Integral zulassen. Er fand die folgenden notwendigen Bedingungen

$$\zeta = 0, \quad A = B = \frac{2C}{n} \text{ (} n \text{ ganze positive Zahl).}$$

Da aber

$$A + B \geqq C$$

sein muß, ergibt sich $n \leqq 4$. Für $n = 1$ erhält man den Fall der Kowalewska, für $n = 2$ ist das Trägheitsellipsoid eine Kugel und man kommt auf einen Spezialfall des Lagrangeschen Problems; $n = 3$ und $n = 4$ liefert neue Fälle, in denen aber die Auffindung des vierten Integrales trotz der Bemühungen zahlreicher Mathematiker nicht gelang.

8. Bewegung eines freien starren Körpers. Beziehen wir die Bewegungsgleichungen eines freien starren Körpers auf einen in dem Körper festen Punkt S, so liefern die Impulssätze die Gleichungen

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \mathfrak{R}, \tag{29}$$
$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{M} + (S - O) \wedge \boldsymbol{R}] = \mathfrak{M} + (S - O) \wedge \mathfrak{R},$$

wenn O einen im Raume festen Punkt bezeichnet. $\mathfrak{M}$ und $\boldsymbol{M}$ sind die auf den Punkt S bezogenen Momente, die Größen in der letzten Gleichung, von denen die linker Hand nach t differenziert ist, sind dann die Momente für den festen Punkt O, und die Gleichung stimmt in der Tat mit der früheren überein.

Entwickeln wir die zweite Gleichung, so ergibt sich

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} + (S - O) \wedge \frac{d\boldsymbol{R}}{dt} + \dot{S} \wedge \boldsymbol{R} = \mathfrak{M} + (S - O) \wedge \mathfrak{R}$$

und mit Rücksicht auf (29)

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} + \dot{S} \wedge R = \mathfrak{M}. \tag{30}$$

In die gefundenen Gleichungen (29) und (30) haben wir noch die Differentiationen nach der Zeit innerhalb des Körpers einzuführen und finden dann analog wie oben das Gleichungspaar

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t} + \Omega \wedge \boldsymbol{R} &= \mathfrak{R}, \\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t} + \Omega \wedge \boldsymbol{M} + \dot{S} \wedge \boldsymbol{R} &= \mathfrak{M}. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Das war indes nicht anders möglich, denn die Liouvilleschen Bedingungen reichen nicht aus, um festzustellen, daß das vierte Integral keine Kombination der bereits bekannten Integrale ist. Husson, *Recherche des intégrales algébriques etc.*, Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse (2) t. 8, p. 73 (1906) und Burgatti, Rendic. del Circ. matem. Palermo t. 29, p. 369 (1910) gelang es endlich in aller Strenge zu beweisen, daß jedes algebraische und von der Zeit unabhängige erste Integral der Differentialgleichungen (27), (27a) eine Kombination der bekannten Integrale ist mit Ausnahme der Fälle von Euler, Lagrange und der Kowalewska.

Zerlegen wir diese Vektorgleichungen in ihre kartesischen Komponenten und behalten die früheren Bezeichnungen bei, außer daß jetzt u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten des festen Punktes S bezeichnen und die Koordinatenachsen von diesem Punkte S ausgehen, so ergeben sich die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \dot{U} + Wq - Vr &= R_x, \\ \dot{V} + Ur - Wp &= R_y, \\ \dot{W} + Vp - Uq &= R_z, \\ \dot{P} + Rq - Qr + Wv - Vw &= M_x, \\ \dot{Q} + Pr - Rp + Uw - Wu &= M_y, \\ \dot{R} + Qp - Pq + Vu - Uv &= M_z. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Wie man sieht, stehen auf der linken Seite die Koordinaten der Momentanbewegung u, v, w, p, q, r und ihre Derivierten nach der Zeit. Die Größen auf der rechten Seite hängen ab von der Lage des Bezugspunktes S im Raume und von den Richtungen der im Körper fest gewählten Koordinatenachsen gegen den umgebenden Raum. Legt man diese Richtungen durch drei Eulersche Winkel fest, so ergeben sich drei Gleichungen, welche p, q, r mit diesen Winkeln verknüpfen, und ferner lassen sich mit Hilfe dieser Winkel aus den Komponenten u, v, w der Geschwindigkeit von S nach den im Körper festen Achsen auch die Komponenten nach den im Raume festen Koordinatenachsen finden. So haben wir zur Bestimmung der Bewegung im ganzen 12 Gleichungen, in denen 12 Unbekannte enthalten sind, nämlich u, v, w, p, q, r, die Eulerschen Winkel φ, ψ, ϑ und die Koordinaten ξ, η, ζ von S in dem gegen den Raum festen Koordinatensystem. So sieht man, daß das Problem in der Tat bestimmt ist.

Eine besondere Vereinfachung erfahren die Bewegungsgleichungen, wenn wir für den Punkt S den Schwerpunkt des Körpers wählen. Dann ist

$$\boldsymbol{R} = \mathrm{M}\dot{S}, \quad \text{also} \quad \dot{S} \wedge \boldsymbol{R} = 0, \tag{32a}$$

und die zweite der Gleichungen (31) geht über in die Form

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} + \Omega \wedge \boldsymbol{M} = \mathfrak{M}, \tag{33}$$

oder in Zahlgleichungen aufgelöst

$$A\dot{p} + (C - B)qr = M_x,$$
$$B\dot{q} + (A - C)rp = M_y,$$
$$C\dot{r} + (B - A)pq = M_z.$$

Diese Gleichungen sind dieselben wie die der Drehung um einen festen Punkt.

Es läßt sich also die Drehung eines schweren Körpers um seinen Schwerpunkt unabhängig betrachten, ebenso wie die Bewegung des Schwerpunktes sich zufolge (32a) für sich behandeln läßt. Das Problem zerlegt sich also in zwei getrennte Aufgaben, die eine betrifft die Bewegung des Schwerpunktes, die andere die Bewegung um den Schwerpunkt.

Bisweilen ist es nützlich, den Gleichungen ein Koordinatensystem zugrunde zu legen, das nicht im Raume und nicht gegen den Körper fest ist. Wir wollen den Ursprung dieses Koordinatensystems der Einfachheit halber im Schwerpunkt S des Körpers annehmen, und nun mit Ω' die Rotation des Körpers, bezogen auf dies veränderliche Koordinatensystem, bezeichnen, dann ist sofort zu sehen, daß man die Gleichungen erhält

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{R}}{dt} + \Omega' \wedge \boldsymbol{R} &= \mathfrak{R}, \\ \frac{d\boldsymbol{M}}{dt} + \Omega' \wedge \boldsymbol{M} &= \mathfrak{M}. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Wir heben einen besonderen Fall heraus. Wenn die z-Achse mit dem Körper fest verbunden ist, so ist die Geschwindigkeit eines Punktes Z auf ihr dieselbe, ob wir sie auf das im Körper feste oder das andere Koordinatensystem beziehen. Es ergibt sich also

$$\Omega' \wedge (Z - S) = \Omega \wedge (Z - S)$$

oder

$$(\Omega' - \Omega) \wedge (Z - S) = 0$$

d. h. der Vektor $\Omega' - \Omega$ ist zu $Z - S$ parallel; sind also p, q, r und p', q', r' die Komponenten von Ω, Ω', auf dasselbe

(im Laufe der Bewegung sich teilende) Koordinatensystem mit der angegebenen Richtung der z-Achse bezogen, so wird $p = p'$, $q = q'$.

Liegt der noch speziellere Fall vor, daß der Körper ein Rotationskörper mit der Achse z ist, so wird $A = B$ und A, B, C sind, wenn man das Koordinatensystem sich auch um die z-Achse gegen den Körper drehen läßt, unabhängig von der Zeit; ferner werden die Komponenten des Vektors $\boldsymbol{M}$

$$Ap, \quad Aq, \quad Cr$$

und somit ergeben sich die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} A\dot{p} + (Cr - Ar')q &= M_x, \\ A\dot{q} + (Cr - Ar')p &= M_y, \\ C\dot{r} \qquad\qquad &= M_z. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

9. Stoßbewegung eines freien oder an einem Punkte aufgehängten starren Körpers. Im Falle einer Stoßwirkung gehen die Bewegungsgleichungen über in

$$\Delta \boldsymbol{R} = \mathfrak{R} + \boldsymbol{F}, \quad \Delta \boldsymbol{M} = \mathfrak{M}, \tag{36}$$

wobei $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{M}$ die Koordinaten der Stoßdyname, $\boldsymbol{F}$ die impulsive Reaktionskraft in einem eventuellen festen Punkte (oder sonst gleich Null) ist, während $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{M}$ die Vektorkoordinaten des Impulses bezeichnen.

Die vorstehenden Gleichungen ändern, da $\Omega \Delta t$ mit Δt verschwindend klein wird, ihre Form nicht, wenn man sie statt auf ein im Raume festes System auf ein im Körper festes System bezieht. Bezieht man sie insbesondere auf die Hauptträgheitsachsen des festen Punktes oder des Schwerpunktes und setzt voraus, der Körper sei vor dem Stoß in Ruhe, so ergibt sich, indem man p, q, r die durch den Stoß entstehenden Rotationskomponenten nennt,

$$Ap = M_x, \quad Bq = M_y, \quad Cr = M_z. \tag{37}$$

Die Ebene eines Kräftepaares, das das Stoßmoment repräsentiert, und die Achse der durch den Stoß entstehenden Rotation sind also einander konjugiert bezüglich des Trägheitsellipsoids

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = \text{konst.} \tag{38}$$

Daher fällt nur für die Hauptträgheitsachsen die Achse der entstehenden Rotation mit der Achse des Stoßpaares zusammen.

Für einen freien Körper treten hierzu noch die Gleichungen

$$\text{M}u = R_x, \quad \text{M}v = R_y, \quad \text{M}w = R_z \tag{39}$$

für die durch den Stoß entstehende Bewegung des Schwerpunktes. Diese Bewegung hat immer die Richtung der resultierenden Kraft der Stoßdyname und ist ihrer Größe proportional. Soll die Achse der instantan entstehenden Schraubung mit der Achse der Stoßdyname zusammenfallen, so muß diese Achse eine der Hauptträgheitsachsen sein.

Ist das zugehörige Hauptträgheitsmoment $A = \text{M}a^2$, so wird

$$R = \text{M}\tau \quad M = A\omega = \text{M}a^2\omega$$

wenn R, M Resultante und Momente der Stoßdyname, τ, ω Translation und Rotation der instantanen Schraubung der Größe nach festlegen. Soll nun auch noch

$$\frac{M}{R} = \frac{\tau}{\omega} = k,$$

also der Parameter der Dyname gleich dem Parameter der Schraubung sein, so muß

$$k = a^2\frac{1}{k}, \text{ also } k = \pm a$$

sein. Für jede Hauptträgheitsachse ergeben sich so zwei Dynamen, welche nach Sir Robert Ball die Hauptträgheitsdynamen des Körpers heißen.[1])

10. Über den Stoß zweier Körper. Wenn zwei freie Körper K_1, K_2 mit glatten und überall konvexen Oberflächen in einem gegebenen Augenblicke aufeinanderprallen, so daß sie sich in einem Punkte H berühren, so erfährt ihre Bewegung eine plötzliche Änderung, um deren Bestimmung es sich jetzt handelt. Der Stoß bedeutet eine plötzlich auftretende

---

1) Vgl. Ball, The Theory of Screws, Cambridge 1900; Timerding, Geometrie der Kräfte, Leipzig 1908.

Stoßkraft, die in dem Berührungspunkte H angreift, senkrecht zu der gemeinsamen Berührungsebene der beiden Körper gerichtet ist und für beide Körper entgegengesetzt gleich ausfällt. Kennen wir ihre Größe Π und sind $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1$ die Koordinaten der Geraden, in der sie wirkt, auf die Hauptträgheitsachsen für den Schwerpunkt des ersten Körpers bezogen, $u_1, v_1, w_1, p_1, q_1, r_1$, und $u_1', v_1', \ldots, r_1'$ die Koordinaten der momentanen Bewegung des ersten Körpers K_1, dessen Masse $\mathfrak{M}_1$ sei, unmittelbar vor und nach dem Stoß, dann ergeben sich die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_1(u_1'-u_1)=\Pi\alpha_1,\ \mathfrak{M}_1(v_1'-v_1)=\Pi\beta_1,\ \mathfrak{M}_1(w_1'-w_1)=\Pi\gamma_1,\\ A_1(p_1'-p_1)=\Pi\lambda_1,\ B_1(q_1'-q_1)=\Pi\mu_1,\ C_1(r_1'-r_1)=\Pi\nu_1,\end{aligned}\right\} \quad (40)$$

in denen A_1, B_1, C_1 die Hauptträgheitsmomente bezeichnen. Für den zweiten Körper K_2 ergibt sich ein analoges Gleichungssystem, in dem nur der Index 1 mit dem Index 2 vertauscht ist. Da das Koordinatensystem im allgemeinen für den zweiten Körper ein anderes ist wie für den ersten, wird keineswegs $\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 : \lambda_1 : \mu_1 : \nu_1 = \alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 : \lambda_2 : \mu_2 : \nu_2$, trotzdem diese Koordinaten dieselbe Gerade festlegen.

Wir haben 12 Gleichungen gefunden, in denen aber 13 Unbekannte stecken, nämlich außer den Koordinaten der Bewegung nach dem Stoß die Größe der Stoßkraft Π.

Um noch eine dreizehnte Gleichung zu finden, stellen wir folgende Überlegung an. Wir multiplizieren die Gleichungen (40) der Reihe nach mit $u_1' + u_1, v_1' + v_1, \cdots r_1' + r_1$ und addieren sie, dann ergibt sich auf der linken Seite

$$2(T_1' - T_1),$$

d. h. die doppelte Differenz der kinetischen Energie vor und nach dem Stoß. Auf der rechten Seite ergibt sich

$$-\Pi(V_1' + V_1),$$

wenn V_1' und V_1 die Geschwindigkeiten von H in der Richtung der äußeren Normalen nach und vor dem Stoß bezeichnen. In der Tat bedeutet

$$-V_1 = \alpha_1 u_1 + \beta_1 v_1 + \cdots + \nu_1 r_1$$

das Moment der Momentanbewegung für die Wirkungslinie des Stoßes, also die Geschwindigkeitskomponente aller Punkte der Wirkungslinie nach der Richtung dieser Geraden, denn wir können schreiben

$$
\begin{aligned}
-V_1 &= (u_1 + q_1 z_1 - r_1 y_1)\alpha_1 \\
&+ (v_1 + r_1 x_1 - p_1 z_1)\beta_1 \\
&+ (w_1 + p_1 y_1 - q_1 x_1)\gamma_1 \\
&= \dot{x}_1 \alpha_1 + \dot{y}_1 \beta_1 + \dot{z}_1 \gamma_1,
\end{aligned}
$$

wenn x_1, y_1, z_1 die Koordinaten eines beliebigen Punktes auf der Wirkungslinie sind (vgl. Bd. I, S. 112, Gleichungen (7)). So finden wir

$$2(T_1' - T_1) = -\Pi(V_1' + V_1)$$

und analog für den zweiten Körper

$$2(T_2' - T_2) = \Pi(V_2' + V_2),$$

wenn wir die Geschwindigkeiten bei beiden Körpern nach derselben Richtung positiv und nach derselben Richtung negativ rechnen.

Durch Addition folgt

$$2(T' - T) = -\Pi(V_1 - V_2 + V_1' - V_2'),$$

wenn T, T' die Gesamtenergie des Systems vor und nach dem Stoß bezeichnen. Nun gilt das allgemeine Prinzip, daß die Energie durch den Stoß keine Vermehrung erfahren kann. Es wird also $T' - T < 0$.

$V_1 - V_2$ und $V_1' - V_2'$ sind aber die relativen Geschwindigkeiten beider Körper vor und nach dem Stoß. Diese relative Geschwindigkeit muß aber ihr Vorzeichen wechseln, wenn die Körper zusammenstoßen und wieder auseinandergehen. Die beiden Differenzen haben also notwendig entgegengesetztes Vorzeichen. Ihre Summe muß aber positiv sein, damit die Differenz $T' - T$ negativ wird, also überwiegt immer die positive Differenz. Diese positive Differenz ist $V_1 - V_2$, denn unsere Vorzeichenbestimmung ist so, daß die Richtung der gemein-

samen Normale, die vom ersten nach dem zweiten Körper weist, positiv gerechnet wird. Es wird also

$$V_1' - V_2' = -e(V_1 - V_2), \tag{41}$$

wenn e einen positiven echten Bruch bedeutet. Wir nehmen nun unbewiesen an, daß dieser Koeffizient e eine Konstante ist, die nur von der Beschaffenheit der beiden Körper abhängt. Sie heißt der Restitutionskoeffizient. Ist $e = 0$, so heißen die Körper vollkommen unelastisch; ist $e = 1$, so heißen sie vollkommen elastisch.

Wir bilden nun

$$V_1 - V_1' = \alpha_1(u_1' - u_1) + \beta_1(v_1' - v_1) + \cdots + \nu_1(r_1' - r_1)$$

und setzen aus (40) die Werte für $u_1' - u_1$, $v_1' - v_1, \cdots$ ein. Dann ergibt sich

$$V_1' = V_1 - \Pi\left[\frac{1}{m_1} + \frac{\lambda_1^2}{A_1} + \frac{\mu_1^2}{B_1} + \frac{\nu_1^2}{C_1}\right]$$

und analog

$$V_2' = V_2 + \Pi\left[\frac{1}{m_2} + \frac{\lambda_2^2}{A_2} + \frac{\mu_2^2}{B_2} + \frac{\nu_2^2}{C_2}\right].$$

Subtrahieren wir diese Gleichungen und setzen zur Abkürzung

$$\varkappa = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{\lambda_1^2}{A_1} + \frac{\lambda_2^2}{A_2} + \frac{\mu_1^2}{B_1} + \frac{\mu_2^2}{B_2} + \frac{\nu_1^2}{C_1} + \frac{\nu_2^2}{C_2},$$

so erhalten wir

$$V_1' - V_2' = -e(V_1 - V_2) = V_1 - V_2 - \varkappa\,\Pi$$

und mithin

$$\Pi = \frac{(1+e)(V_1 - V_2)}{\varkappa}. \tag{42}$$

Ist Π gefunden, so können wir aus (40) $u_1', v_1', \ldots$ berechnen. Soll hierbei $p_1' = p_1$, $q_1' = q_1$, $r_1' = r_1$ werden, ohne daß Π verschwindet, so muß $\lambda_1, \mu_1, \nu_1 = 0$ sein und analog für den zweiten Körper $\lambda_2, \mu_2, \nu_2 = 0$. Das bedeutet aber: Soll durch den Stoß keine neue Rotation um die Schwerpunkte der zusammenstoßenden Körper entstehen, so muß die gemeinsame Normale durch die beiden Schwerpunkte hindurchgehen. Dann spricht man von zentralem Stoß.

In diesem Falle wird

$$\varkappa = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

also

$$\Pi = \frac{m_1 m_2 (V_1 - V_2)}{m_1 + m_2}(1 + e) \tag{43}$$

und

$$\left.\begin{aligned} V_1' &= V_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}(1 + e)(V_1 - V_2), \\ V_2' &= V_2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2}(1 + e)(V_1 - V_2). \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Dies sind die Gesetze des zentralen Stoßes, aus ihnen sind die gewöhnlichen Sätze, die in den Physiklehrbüchern gegeben werden, leicht herzuleiten.

Historische Bemerkungen. Schon Galilei hatte in den *Discorsi e dimostrazioni* den Stoß behandelt, ohne aber zu bestimmt formulierten Gesetzen zu gelangen. In Descartes' physikalischem Weltbilde spielten die Stoßgesetze eine entscheidende Rolle; seine Stoßgesetze sind aber falsch. Das wichtigste von ihnen, das Gesetz von der Erhaltung des Impulses, gilt in der Form, wie es Descartes ausspricht, nur für den zentralen Stoß, also für Körper, die sich in einer geraden Linie bewegen. Auf solche wurde dann auch zunächst das Problem beschränkt, und seine korrekte Lösung fand sich, als 1668 die Royal Society ihren Mitgliedern diese Aufgabe vorlegte. Es liefen drei Bearbeitungen ein, die in den *Philosophical Transactions* des nächsten Jahres abgedruckt sind: von Christopher Wren, John Wallis und Christian Huygens. Wren beschränkte sich auf eine kurze Angabe der Lösung; Wallis behandelte nur den unelastischen Stoß und gab die Lösung für den Stoß vollkommen elastischer Körper erst in seiner *Mechanica seu motus scientia* (1671); die Huygenssche Behandlung des Problems wurde ebenfalls erst viel später, in seinen *Opuscula posthuma,* 1704, mit den näheren Einzelheiten bekannt. Sie ist prinzipiell außerordentlich interessant, sowohl durch die zugrunde gelegten Anschauungen von der Relativität der Bewegungen als auch durch die Formulierung der Endresultate. Diese sind in zwei Sätzen ausgesprochen, die in unserer Bezeichnungsweise lauten:

1. Beim vollkommen elastischen, zentralen Stoß bleibt die algebraische Summe der Impulse ungeändert.

2. Ebenso bleibt die Summe der kinetischen Energien beider Körper ungeändert.

Der Begriff der kinetischen Energie trat hier zum erstenmale auf und wurde dann von Leibniz sofort aufgegriffen, dem die Er-

kenntnis seiner allgemeinen Bedeutung zu danken ist und der ihm den Namen „lebendige Kraft" (vis viva) im Gegensatz zu der toten Kraft des ruhenden Körpers gegeben hat.

Übungsbeispiele.

1. Aufgabe. *Das Trägheitsmoment eines geraden Kreiszylinders für seine Achse zu finden.*

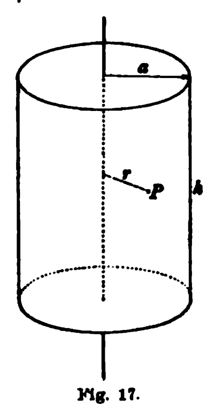


Fig. 17.

Auflösung. Bezeichnet r den Abstand eines Punktes P im Innern des Zylinders von seiner Achse, a den Halbmesser des Grundkreises, h die Höhe, so wird das Trägheitsmoment für $\mu = 1$

$$\mathfrak{J} = \int_0^a 2\pi h r^3 dr = \tfrac{1}{2}\pi a^4 h,$$

und da $\text{M} = \pi a^2 h$ die Zylindermasse ist, wird, wenn wir $\mathfrak{J} = \text{M} k^2$ setzen, der Trägheitsradius

$$k = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, a.$$

2. Aufgabe. *Das Trägheitsmoment einer rechteckigen Platte für eine ihrer Symmetrieachsen zu finden.*

Auflösung. Nennen wir $a = 2a'$, $b = 2b'$, $c = 2c'$ die Kantenlängen der Platte, so ergibt sich für das Trägheitsmoment

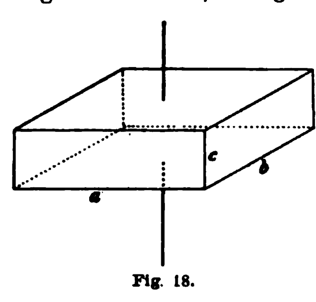


Fig. 18.

$$\begin{aligned}\mathfrak{J} &= 8\int_0^{c'}\int_0^{b'}\int_0^{a'}(x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz \\ &= \tfrac{8}{3}a'^3 b'c' + \tfrac{8}{3}a'b'^3 c' \\ &= \tfrac{1}{12}abc(a^2 + b^2)\end{aligned}$$

und für den Trägheitsradius

$$k = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2\sqrt{3}}.$$

3. Aufgabe. *Das Trägheitsmoment einer Kugel für einen ihrer Durchmesser zu finden.*

Auflösung. Aus der Symmetrie der Kugel folgt für ein auf ihren Mittelpunkt bezogenes Koordinatensystem

$$K = \int x^2 d\tau = \int y^2 d\tau = \int z^2 d\tau = \tfrac{1}{3}\int (x^2 + y^2 + z^2)\,d\tau,$$

die Integrale über alle Volumenelemente $d\tau$ der Kugel erstreckt. Wir zerlegen jetzt die Kugel in konzentrische Schalen, deren Radius wir ϱ und deren Dicke wir $d\varrho$ nennen, und finden sofort, wenn a der Kugelradius ist,

$$\mathfrak{J} = \tfrac{1}{3}\int (x^2 + y^2 + z^2)\,d\tau$$

$$= \frac{4\pi}{3}\int_0^a \varrho^4\,d\varrho = \frac{4\pi}{15}a^5.$$

Das axiale Trägheitsmoment wird also

$$\mathfrak{J} = \int (x^2 + y^2)\,d\tau = 2K = \frac{8\pi}{15}a^5,$$

und da $M = \frac{4\pi}{3}a^3$ die Masse der Kugel ist, folgt für den Trägheitsradius

$$k = \sqrt{\tfrac{2}{5}}\,a.$$

Fig. 19.

4. Aufgabe. *Den analytischen Ausdruck für das axiale Trägheitsmoment aufzustellen.*

Auflösung. Die Bezugsachse sei dadurch festgelegt, daß sie den Punkt P mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0 enthalten und die Richtungskosinus α, β, γ haben soll. Wir gehen dann aus von der Gleichung (4) des Textes. Wenn a, b, c die Hauptträgheitsradien für den Schwerpunkt S sind und die Hauptträgheitsachsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen, so wird

$$k_1^2 = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2.$$

Ferner ergibt sich

$$\delta^2 = \varrho^2 \sin^2\varphi = \varrho^2 - \varrho^2\cos^2\varphi,$$

wenn ϱ die Länge des Radiusvektor SP und φ den Winkel zwischen diesem Radiusvektor und der Bezugsachse des Trägheitsmomentes bezeichnet. Es wird nun aber

$$\varrho^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \quad \varrho\cos\varphi = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0$$

und somit finden wir schließlich

$$k^2 = k_1^2 + \delta^2 = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$
$$- (\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0)^2.$$

5. Aufgabe. *Wenn man die Hauptträgheitsachsen für den Schwerpunkt S kennt, die Hauptträgheitsachsen für einen beliebigen anderen Punkt P zu finden.*

Auflösung. Wir können, indem wir x_0, y_0, z_0 die Koordinaten von P nennen, von dem in der vorigen Aufgabe gegebenen Ausdruck für den Trägheitsradius k ausgehen und haben dann die Werte dieses Trägheitsradius zu bestimmen, die ein Extremum werden. Differenzieren wir aber den genannten Ausdruck nach α, β, γ, indem wir k^2 noch den Faktor $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, der $= 1$ ist, beifügen, so ergeben sich die Gleichungen

$$(a^2 + \varrho^2 - k^2)\alpha = (\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0)x_0,$$
$$(b^2 + \varrho^2 - k^2)\beta = (\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0)y_0,$$
$$(c^2 + \varrho^2 - k^2)\gamma = (\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0)z_0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt, wenn man sie der Reihe nach mit

$$\frac{x_0}{a^2 - u}, \frac{y_0}{b^2 - u}, \frac{z_0}{c^2 - u}$$

multipliziert und addiert, wobei $u = k^2 - \varrho^2$ gesetzt ist, solange $\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 \neq 0$,

$$\frac{x_0^2}{a^2 - u} + \frac{y_0^2}{b^2 - u} + \frac{z_0^2}{c^2 - u} = 1,$$

und

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{x_0}{a^2 - u} : \frac{y_0}{b^2 - u} : \frac{z_0}{c^2 - u}.$$

Das bedeutet aber: Jede der Hauptträgheitsachsen des Punktes P ist die Normale einer durch den Punkt P gehenden Fläche zweiter Ordnung aus einer Schar von konfokalen Flächen.[1]) Zu dieser Schar gehört auch das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

dessen Hauptachsen die reziproken Werte von den Hauptachsen des von uns betrachteten Trägheitsellipsoids sind und der Lage nach mit ihnen zusammenfallen.

Wird $\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 = 0$ und ist $\alpha \neq 0$, so ergibt die erste der drei zu Anfang der Aufgabe aufgestellten Gleichungen

$$a^2 + \varrho^2 - k^2 = 0$$

und die anderen beiden Gleichungen

$$(b^2 + \varrho^2 - k^2)\beta = 0, \quad (c^2 + \varrho^2 - k^2)\gamma = 0$$

1) Binet, Journal de l'école polytechn. Cah. 16, p. 41 (1813).

sind, wenn a, b, c verschieden, nur durch $\beta = 0$, $\gamma = 0$ zu erfüllen. Also wird $\alpha x_0 = 0$, d. h. $x_0 = 0$: Der Punkt P liegt in der xy-Ebene, d. h. in einer der Hauptebenen, und die eine Hauptträgheitsachse ist der z-Achse parallel. Die anderen beiden Hauptträgheitsachsen müssen daher in der xy-Ebene selbst liegen, für sie wird also $\alpha = 0$. Dann folgt aus den beiden letzten der drei Grundgleichungen genau wie vorhin

$$\frac{y_0^2}{b^2 - u} + \frac{z_0^2}{c^2 - u} = 1,$$

d. h. alles bleibt ungeändert, nur ist hier $x_0 = 0$. Die beiden Hauptträgheitsachsen sind die (in die Hauptebene $x_0 = 0$ fallenden) Normalen zweier der konfokalen Flächen oder, was dasselbe ist, der konfokalen Kegelschnitte, in denen die Flächen die Hauptebene schneiden.

Der Fall endlich, wo der Punkt P auf einer der Hauptträgheitsachsen des Schwerpunktes liegt, ist schon im Text erledigt.

6. Aufgabe. *Die Bedingung dafür zu finden, daß eine Gerade Hauptträgheitsachse eines ihrer Punkte ist.*

Auflösung. Wir bezeichnen mit x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Punktes der Geraden, für den sie Hauptträgheitsachse ist, mit α, β, γ ihre Richtungskosinus. Dann wird nach der vorigen Aufgabe

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{x_0}{a^2 - u} : \frac{y_0}{b^2 - u} : \frac{z_0}{c^2 - u},$$

also

$$\begin{aligned} \lambda : \mu : \nu &= (\gamma y_0 - \beta z_0) : (\alpha z_0 - \gamma x_0) : (\beta x_0 - \alpha y_0) \\ &= \frac{(b^2 - c^2) y_0 z_0}{(b^2 - u)(c^2 - u)} : \frac{(c^2 - a^2) z_0 x_0}{(c^2 - u)(a^2 - u)} : \frac{(a^2 - b^2) x_0 y_0}{(a^2 - u)(b^2 - u)} \end{aligned}$$

und weiter

$$\alpha\lambda : \beta\mu : \gamma\nu = (b^2 - c^2) : (c^2 - a^2) : (a^2 - b^2).$$

Hieraus kann man die zwei Gleichungen ableiten

$$\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0,$$
$$a^2\alpha\lambda + b^2\beta\mu + c^2\gamma\nu = 0.$$

Die erste ist für die Koordinaten jeder beliebigen Geraden erfüllt, die zweite kann man als die Gleichung des quadratischen Strahlenkomplexes ansehen, der hier entsteht. Dieser Komplex, der aus den Normalen aller Flächen 2. Ordnung einer konfokalen Flächenschar besteht, heißt der Reyesche Achsenkomplex (s. Band I, S. 28). Vgl. Reye, Geometrie der Lage, 2. Bd. 4. Aufl. 1907, 28. Vortrag; Timerding, Geometrie der Kräfte, 17. Kapitel.

7. Aufgabe. *Das Trägheitsmoment für eine Ebene zu untersuchen.*

Auflösung. Unter dem Trägheitsmoment für eine Ebene verstehen wir einen dem Trägheitsmoment für eine Achse genau analogen Ausdruck, in dem nur die Abstände von der Achse durch die

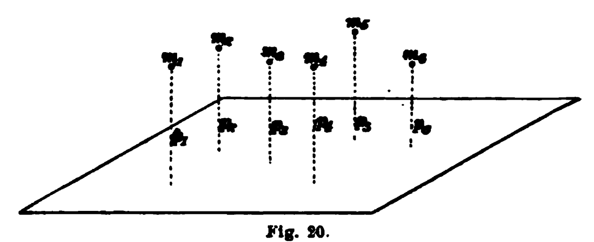


Fig. 20.

Abstände von der Ebene ersetzt sind. Sind diese letzteren Abstände für die Massen m_i des Systems mit p_i bezeichnet, so wird der Ausdruck des planaren Trägheitsmomentes

$$\mathfrak{K} = \sum m_i p_i^2.$$

Sind aber r_i die Abstände der Massenpunkte P_i von einer in einem Punkte O der Ebene senkrecht zu ihr errichteten Achse, so wird

$$p_i^2 + r_i^2 = (P_i - O)^2$$

und somit

$$\mathfrak{K} = \sum m_i (P_i - O)^2 - \mathfrak{J},$$

wenn $\mathfrak{J} = \sum m_i r_i^2$ das Trägheitsmoment für die Achse ist.

Behalten wir die Bezeichnungen des § 1 bei, so wird

$$\sum m_i (P_i - O)^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = \tfrac{1}{2}(A + B + C)$$

und somit

$$\mathfrak{K} = A_1 \alpha^2 + B_1 \beta^2 + C_1 \gamma^2 + 2A'\beta\gamma + 2B'\gamma\alpha + 2C'\alpha\beta,$$

wenn wir

$$2A_1 = B + C - A, \quad 2B_1 = C + A - B, \quad 2C_1 = A + B - C$$

setzen, und zwar wird

$$A_1 = \sum m_i x_i^2, \quad B_1 = \sum m_i y_i^2, \quad C_1 = \sum m_i z_i^2.$$

Tragen wir von O aus auf der Normalen der Ebene eine Strecke gleich $1 : \sqrt{\mathfrak{K}}$ nach beiden Seiten ab, so erfüllen die Endpunkte dieser Strecken das Ellipsoid

$$A_1 \xi^2 + B_1 \eta^2 + C_1 \zeta^2 + 2A'\eta\zeta + 2B'\zeta\xi + 2C'\xi\eta = 1,$$

dessen Hauptachsen mit denen des Trägheitsellipsoides für den Punkt O zusammenfallen. Das zu diesem neuen Trägheitsellipsoid reziproke Ellipsoid wurde von Binet betrachtet. Auf die Hauptachsen bezogen werden die Gleichungen der beiden so zur Bestimmung der planaren Trägheitsmomente dienenden Ellipsoide von der Form

$$A_1\xi^2 + B_1\eta^2 + C_1\zeta^2 = 1, \quad \frac{\xi^2}{A_1} + \frac{\eta^2}{B_1} + \frac{\zeta^2}{C_1} = 1.$$

Nennen wir S den Schwerpunkt des Massensystems und legen durch ihn eine zu der ursprünglich angenommenen parallele Ebene hindurch, nehmen wir ferner an, daß die Linie OS auf beiden Ebenen senkrecht steht, so wird das Trägheitsmoment für die Ebene durch den Schwerpunkt

$$\mathfrak{K}_0 = \sum m_i(P_i - S)^2 - \mathfrak{J},$$

und es ergibt sich

$$\mathfrak{K} = \sum m_i(P_i - S)^2 - 2\sum m_i(P_i - S) \times (O - S) + \varkappa(O - S)^2 - \mathfrak{J}$$
$$= \mathfrak{K}_0 + \varkappa\delta^2$$

wenn wir $OS = \delta$ setzen; denn es ist $\sum m_i(P_i - S) = 0$. Das Trägheitsmoment für eine beliebige Ebene ist also gleich dem Trägheitsmoment für die parallele Ebene durch den Schwerpunkt, vermehrt um die mit dem Quadrate des Abstandes beider Ebenen multiplizierte Gesamtmasse.

Wählen wir den Schwerpunkt S zum Koordinatenursprung eines Koordinatensystems, dessen Achsen in die Hauptträgheitsachsen von S fallen und in dem die betrachtete Ebene die Gleichung hat

$$\alpha\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{y} + \gamma\mathfrak{z} - \delta = 0,$$

dann wird $\mathfrak{K}$ von der Form

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{A}\alpha^2 + \mathfrak{B}\beta^2 + \mathfrak{C}\gamma^2 + \varkappa\delta^2.$$

Schreiben wir die Ebenengleichung aber

$$\mathfrak{u}\mathfrak{x} + \mathfrak{v}\mathfrak{y} + \mathfrak{w}\mathfrak{z} - 1 = 0,$$

setzen wir also

$$\frac{\alpha}{\delta} = \mathfrak{u}, \quad \frac{\beta}{\delta} = \mathfrak{v}, \quad \frac{\gamma}{\delta} = \mathfrak{w}, \quad \frac{1}{\delta^2} = \mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2,$$

so finden wir die Gleichung

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2) = \mathfrak{A}\mathfrak{u}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{v}^2 + \mathfrak{C}\mathfrak{w}^2 + \varkappa$$

oder

$$(\mathfrak{K} - \mathfrak{A})\mathfrak{u}^2 + (\mathfrak{K} - \mathfrak{B})\mathfrak{v}^2 + (\mathfrak{K} - \mathfrak{C})\mathfrak{w}^2 = \varkappa.$$

Die Ebenen, die dieser Gleichung genügen und für die somit das Trägheitsmoment gleich $\mathfrak{K}$ wird, umhüllen eine Fläche zweiter Ordnung, deren Gleichung in Punktkoordinaten lautet

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{\mathfrak{K}-\mathfrak{A}}+\frac{\mathfrak{y}^2}{\mathfrak{K}-\mathfrak{B}}+\frac{\mathfrak{z}^2}{\mathfrak{K}-\mathfrak{C}}=\frac{1}{\varkappa}.$$

Die Flächen, die man hieraus für variierendes $\mathfrak{K}$ erhält, sind alle konfokal, es bilden also die Flächen zweiter Ordnung, die von den Ebenen desselben Trägheitsmomentes umhüllt werden, eine konfokale Flächenschar.

Man kann immer vier Massen M_1, M_2, M_3, M_4 finden derart, daß ihr Trägheitsmoment für jede Ebene und damit auch für jede Gerade mit dem des vorgelegten Massensystems übereinstimmt. Man braucht in der Tat zu diesem Zwecke nur die Gleichung anzusetzen.

$$\sum_1^4 M_i(\alpha\mathfrak{x}_i+\beta\mathfrak{y}_i+\gamma\mathfrak{z}_i-\delta)^2=\mathfrak{A}\alpha^2+\mathfrak{B}\beta^2+\mathfrak{C}\gamma^2+\varkappa\delta^2,$$

der für beliebige Werte von α, β, γ, δ genügt werden soll. Man erhält sofort 10 Gleichungen zwischen den 16 Unbekannten M_i, $\mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{y}_i$, $\mathfrak{z}_i$. Das Problem bleibt also noch sechsfach unbestimmt. Es ist sofort zu sehen, daß die sechsfach unendlich vielen Massenquadrupel, die man so erhält, denselben Schwerpunkt und dieselben Trägheitsellipsoide besitzen.

Setzen wir

$$\xi_i=\mathfrak{x}_i\sqrt{\frac{M_i}{\mathfrak{A}}},\quad \eta_i=\mathfrak{y}_i\sqrt{\frac{M_i}{\mathfrak{B}}},\quad \zeta_i=\mathfrak{z}_i\sqrt{\frac{M_i}{\mathfrak{C}}},\quad \theta_i=\sqrt{M_i},$$

so drücken die Gleichungen, die man erhält, aus, daß $\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \theta_i$ die Koeffizienten einer orthogonalen Substitution in vier Variabeln sind. Man hat also

$$\xi_i^2+\eta_i^2+\zeta_i^2+\theta_i^2=1,$$
$$\xi_i\xi_j+\eta_i\eta_j+\zeta_i\zeta_j+\theta_i\theta_j=0$$

oder

$$M_i\left(\frac{\mathfrak{x}_i^2}{\mathfrak{A}}+\frac{\mathfrak{y}_i^2}{\mathfrak{B}}+\frac{\mathfrak{z}_i^2}{\mathfrak{C}}+1\right)=1,$$
$$\frac{\mathfrak{x}_i\mathfrak{x}_j}{\mathfrak{A}}+\frac{\mathfrak{y}_i\mathfrak{y}_j}{\mathfrak{B}}+\frac{\mathfrak{z}_i\mathfrak{z}_j}{\mathfrak{C}}+1=0.$$

Die letzten Gleichungen bedeuten, daß die vier Massen in den Ecken eines Poltetraeders des Polarsystems liegen, dessen imaginäre Ordnungsfläche die Gleichung hat

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{\mathfrak{A}}+\frac{\mathfrak{y}^2}{\mathfrak{B}}+\frac{\mathfrak{z}^2}{\mathfrak{C}}+1=0.$$

Die reziproken Werte der Massen M_i sind die Werte der Funktion auf der linken Seite in den betreffenden Punkten. Vgl. Reye, *Beitrag zur Lehre von den Trägheitsmomenten*, Zeitschrift für Math. u. Physik Bd. 10, S. 433 (1865).

8. Aufgabe. *Zu zeigen, daß bei der Drehung eines allein der Trägheit folgenden starren Körpers um einen festen Punkt die Herpolhodie keinen Wendepunkt besitzt.*

Auflösung. Die Aufgabe, die Wendepunkte der Herpolhodie einer Poinsotschen Bewegung zu bestimmen, ist bereits im ersten Band, S. 180, behandelt worden. Es zeigte sich, daß, damit die Wendepunkte reell werden, außer $B > D$ die Bedingung erfüllt sein muß

$$B + C < A.$$

Bei der Trägheitsbewegung ist aber im Gegenteil

$$B + C > A,$$

also können hier nie Wendepunkte auftreten, sondern die Kurve legt sich schlingenförmig innerhalb des größeren begrenzenden Kreises um den kleineren herum.

9. Aufgabe. *Zwei gleich lange, homogene starre Stangen sind an ihren Endpunkten durch zwei gleich lange Fäden mit einander verbunden. Die eine Stange ist um ihre Mitte drehbar und das ganze System bleibt in einer vertikalen Ebene. Die Bewegung zu bestimmen.*

Auflösung. O sei die festgehaltene Mitte der oberen Stange, O' die der unteren, die Länge der Fäden AA' und BB' sei l. Die Linie OO' bilde mit der Vertikalen z durch O den Winkel θ, die Strecke OA bilde mit z den Winkel φ. Durch diese zwei Winkel wird die Lage des Systems festgelegt. Es hat also zwei Freiheitsgrade. Die kinetische Energie der Stange AB wird

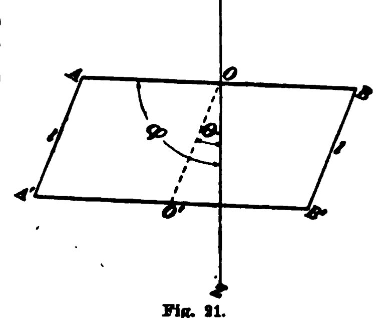


Fig. 21.

$$\tfrac{1}{2} m k^2 \dot{\varphi}^2,$$

die der Stange $A'B'$

$$\tfrac{1}{2} m k^2 \dot{\varphi}^2 + \tfrac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2,$$

wenn m die gleiche Masse der beiden Stangen und k ihr Trägheitsradius für den Mittelpunkt ist. Die elementare Arbeit der äußeren Kräfte, d. h. der Schwere, ist

$$dW = -mgl \sin\theta \, d\theta.$$

Die Lagrangeschen Gleichungen in ihrer zweiten Form liefern also

$$\ddot{\varphi} = 0, \quad \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta.$$

Die Drehung der Stange AB um O ist gleichförmig, die Bewegung von O' ist eine gewöhnliche Pendelbewegung.

10. Aufgabe. *Den Schwingungsmittelpunkt einer rechteckigen ebenen Platte zu bestimmen, die mit einer Kante an einer horizontalen Achse befestigt ist.*

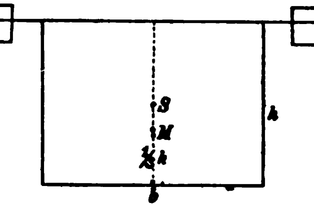


Fig. 22.

Auflösung. Ist b die Länge der horizontalen Kante, h die der vertikalen Kante, so wird das Trägheitsmoment

$$\mathfrak{J} = \int_0^h z^2 b\, dz = \tfrac{1}{3} b h^3,$$

also der Trägheitsradius $k = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\, h$; der Abstand des Schwerpunktes S von dem oberen Rande der Platte ist aber $s = \tfrac{1}{2} h$, also ergibt sich für den Abstand des Schwingungsmittelpunktes M

$$s_1 = \frac{k^2}{s} = \tfrac{2}{3} h.$$

11. Aufgabe. *Den Fall eines schweren, um einen Punkt seiner Achse drehbaren Körpers zu untersuchen (Lagrangescher Fall: Problem des Kreisels im engeren Sinne).*

Auflösung. Wir führen die Eulerschen Winkel φ, ψ, ϑ ein und haben dann (Band I, S. 104, 164)

$$p = \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi,$$
$$q = \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi,$$
$$r = \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}.$$ [1])

Die Achse des Rotationskörpers OZ bildet mit der im Raume festen vertikalen Achse OZ' den Winkel ϑ und die Achse OX mit der Knotenlinie ON den Winkel φ; ψ ist der Winkel, den die Knotenlinie ON mit der Achse OX' bildet. Das Gewicht $\mathsf{M}g$ des Körpers greift in dem Schwerpunkte an, der auf der Achse OZ in der Entfernung l von dem festen Punkte O liege. Sein Moment für die zu OZ senkrechte horizontale Achse ON ist dann $\mathsf{M}gl \sin \vartheta$, und für die

1) Vgl. z. B. Webster, Dynamics of a particle etc., p. 275ff.

im Körper festen Achsen OX und OY, die mit ON die Winkel φ und $\frac{1}{2}\pi + \varphi$ bilden, ergeben sich die Momente

$$M_x = \mathrm{M}gl \sin\vartheta \cos\varphi,$$
$$M_y = -\mathrm{M}gl \sin\vartheta \sin\varphi,$$

während $M_z = 0$ ist.

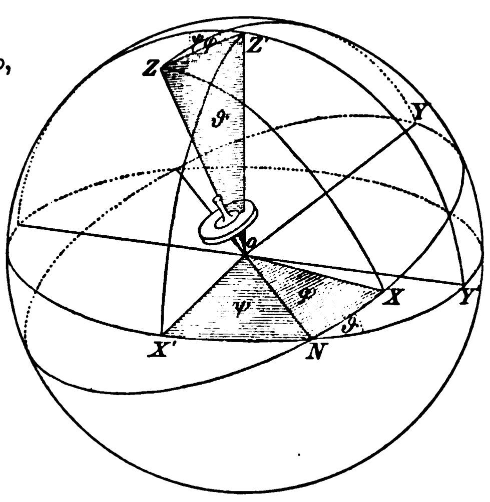


Fig. 23.

Da hier nun $A = B$ wird, haben wir die Bewegungsgleichungen

$$A\dot{p} = (A - C)qr + \mathrm{M}gl \sin\vartheta \cos\varphi,$$
$$B\dot{q} = -(A - C)pr - \mathrm{M}gl \sin\vartheta \sin\varphi,$$
$$C\dot{r} = 0.$$

Es folgt also zunächst

$$Cr = H,$$

wo $H = \text{const.}$ Ferner wird das Integral, welches die Erhaltung der Energie ausdrückt,

$$A(p^2 + q^2) + Cr^2 = h - 2\mathrm{M}gl \cos\vartheta,$$

woraus

$$p^2 + q^2 = \alpha - a \cos\vartheta,$$

wenn wir

$$\alpha = \frac{hC - H^2}{AC}, \quad a = \frac{2\mathrm{M}gl}{A}$$

setzen. Das Integral (25) wird hier

$$Ap \sin\vartheta \sin\varphi + Aq \sin\vartheta \cos\varphi + Cr \cos\vartheta = H',$$

wo wieder $H' = \text{const.}$ Daraus folgt

$$\sin\vartheta(p \sin\varphi + q \cos\varphi) = \beta - b \cos\vartheta,$$

wenn wir

$$\beta = \frac{H'}{A}, \quad b = \frac{H}{A}$$


Fig. 24.

setzen. Wir drücken nun p, q, r durch φ, ψ, ϑ aus, setzen noch $c = \frac{H}{C}$ und haben dann

$$\frac{d\psi}{dt}\cos\vartheta + \frac{d\varphi}{dt} = c,$$

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \sin^2\vartheta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \alpha - a\cos\vartheta,$$

$$\sin^2\vartheta\frac{d\psi}{dt} = \beta - b\cos\vartheta.$$

Eliminieren wir $\frac{d\psi}{dt}$ aus der zweiten und dritten Gleichung, so finden wir

$$\sin^2\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \sin^2\vartheta(\alpha - a\cos\vartheta) - (\beta - b\cos\vartheta)^2.$$

Dafür können wir schreiben, wenn wir abkürzend

$$\cos\vartheta = \zeta$$

setzen,

$$\frac{d\zeta}{dt} = \sqrt{f(\zeta)}, \quad \text{wo } f(\zeta) = (1-\zeta^2)(\alpha - a\zeta) - (\beta - b\zeta)^2.$$

Es wird also

$$t = \int \frac{d\zeta}{\sqrt{f(\zeta)}},$$

wobei $f(\zeta)$ ein Polynom dritten Grades ist, d. h. t wird ein elliptisches Integral erster Gattung mit dem Argument ζ, und ζ eine elliptische Funktion von t.

Dann ergibt sich weiter aus der dritten der drei Gleichungen

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\beta - b\zeta}{1-\zeta^2}$$

und aus der ersten

$$\frac{d\varphi}{dt} = c - \frac{\zeta(\beta - b\zeta)}{1-\zeta^2}.$$

Es ist ζ die Höhe eines Punktes der Rotationsachse im Abstande 1 von dem festen Punkt über diesem festen Punkte. Der so bestimmte Punkt heißt der Apex des Kreisels, wie der um einen festen Punkt drehbare Rotationskörper kurz genannt wird.

12. Aufgabe. *Das Resultat der vorigen Aufgabe weiter zu diskutieren unter der besonderen Voraussetzung, daß der Körper anfänglich mit sehr großer Geschwindigkeit um seine Achse rotiert.*

Auflösung. Für $t = 0$ wird hier $p = 0$, $q = 0$; sei dann ferner $\vartheta = \vartheta_0$, so folgt

$$p^2 + q^2 = \alpha - a\cos\vartheta = a(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta),$$
$$\sin\vartheta(p\sin\varphi + q\cos\varphi) = \beta - b\cos\vartheta = b(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta).$$

Die Differentialgleichung für ϑ nimmt also die Form an

$$\sin^2\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = (\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)[a\sin^2\vartheta - b^2(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)].$$

Ist nun die anfängliche Rotationsgeschwindigkeit r und damit H, also auch b sehr groß, so können wir annehmen, daß ϑ sehr nahe an ϑ_0 bleibt, denn wenn b unendlich groß wird, so ist die Lösung der Differentialgleichung $\vartheta = \vartheta_0$. Wir können also setzen

$$\vartheta = \vartheta_0 + \varepsilon,$$

wobei ε sehr klein ist, und demgemäß

$$\cos\vartheta = \cos\vartheta_0 - \varepsilon\sin\vartheta_0, \quad \sin\vartheta = \sin\vartheta_0 + \varepsilon\cos\vartheta_0;$$

damit wird die vorige Gleichung bei Vernachlässigung der höheren Potenzen von ε

$$\sin^2\vartheta_0\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2 = b^2\varepsilon\sin\vartheta_0\left[\frac{a}{b^2}\sin^2\vartheta_0 - \varepsilon\sin\vartheta_0\right]$$
$$= b^2\varepsilon\sin^2\vartheta_0[2\varepsilon_1 - \varepsilon],$$

wenn wir $\varepsilon_1 = \frac{a}{2b^2}\sin\vartheta_0$ setzen. Die Gleichung, die sich so ergibt, läßt sich sofort integrieren; es wird, da für $t = 0$ auch $\varepsilon = 0$ sein muß;

$$\varepsilon = \varepsilon_1(1 - \cos bt)$$

und somit

$$\vartheta = \vartheta_0 + \varepsilon_1 - \varepsilon_1\cos bt.$$

Dann wird weiter

$$\frac{d\psi}{dt} = b\frac{\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta}{\sin^2\vartheta} = \frac{b}{\sin\vartheta_0}\varepsilon = \frac{b\varepsilon_1}{\sin\vartheta_0} - \frac{b\varepsilon_1}{\sin\vartheta_0}\cos bt$$

und demnach

$$\psi = \psi_0 + \frac{b\varepsilon_1}{\sin\vartheta_0}t - \frac{\varepsilon_1}{\sin\vartheta_0}\sin bt.$$

Der Winkel ϑ wird also eine periodische Funktion der Zeit t mit der Periode $\frac{2\pi}{b}$, der größte Wert, den ϑ erreicht, ist $\vartheta_0 + 2\varepsilon_1$ und ergibt sich für $t = \frac{\pi}{b}\cdot$ Die Achse des Körpers oszilliert daher

um eine ihrer Anfangslage sehr nahe Lage und rückt infolge dieser Bewegung, die man als **Nutation** bezeichnet, der Vertikalen abwechselnd näher und von ihr ab. Die Bewegung der Knotenlinie ON in der horizontalen Ebene ist nicht periodisch; nach der Periode $\frac{2\pi}{b}$ der Nutation ist die Knotenlinie nicht in ihre Anfangslage zurückgekehrt, sondern um das Stück $\frac{2\pi\varepsilon_1}{\sin\vartheta_0}$ vorgerückt. Ein solches Vorrücken heißt **Präzession** und diese Bewegung der Knotenlinie, die nach Abstraktion von der Nutation übrig bleibt, wird als eine Präzessionsbewegung bezeichnet. Damit ON bei der Präzession in seine Anfangslage zurückkehrt, muß $\frac{b\varepsilon_1}{\sin\vartheta_0}t = 2\pi$ werden, die Periode der Präzession ist also $T = \frac{2\pi\sin\vartheta_0}{b\varepsilon_1}$. Ist ϑ_0 nicht sehr klein, so wird daher die Periode der Präzession sehr groß gegen die Periode der Nutation.

13. **Aufgabe.** *Zu zeigen, daß, wenn das Impulsmoment in einer durch den Punkt O gehenden und im Körper festen Ebene η liegt und man den starren Körper als der Schwere unterworfen und im Punkte O aufgehängt voraussetzt, die Ebene η das dem Trägheitsellipsoid reziproke Ellipsoid in einem Kreise schneidet und die Bewegung des Schwerpunktes mit dem eines sphärischen Pendels identisch ist (Hessscher Fall).*

Auflösung. Aus den Formeln (23) in § 7 folgt, daß die Geschwindigkeit des Endpunktes von $\boldsymbol{M}$ senkrecht zu $S - O$ ist; wenn daher $\boldsymbol{M}$ in einer Ebene liegen soll, so muß diese Ebene zu $S - O$ senkrecht sein, d. h. wir haben beständig

$$(S - O) \times \boldsymbol{M} = 0$$

und folglich nach (26)

$$(S - O) \wedge \boldsymbol{M} \times \Omega = 0,$$

es sind also $S - O$, $\boldsymbol{M}$, Ω drei komplanare Vektoren. Im Punkte Q, in dem $\boldsymbol{M}$ das reziproke Ellipsoid des Trägheitsellipsoides schneidet, konstruiere man die Tangentialebene, sie wird normal zu Ω. Durch O lege man die Ebene η senkrecht zu $S - O$, ihre Schnittlinie mit der Tangentialebene in Q wird, da sie zu der Ebene von $S - O$ und $\boldsymbol{M}$ normal ist, normal zu $\boldsymbol{M}$, also auch normal zu $Q - O$, und da sie die Schnittkurve der Ebene η mit dem Ellipsoid berührt, ist diese Schnittkurve ein Kreis.

Man hat weiter eine Gleichung von der Form

$$\Omega = \alpha \boldsymbol{M} + \beta(S - O)$$

und mithin, da $(S - O) \times \boldsymbol{M} = 0$,

$$2T = \Omega \times \boldsymbol{M} = \alpha \boldsymbol{M}^2.$$

Es wird mod $(Q - O)$ der Radiusvektor eines Kreisschnittes des reziproken Ellipsoids, also gleich der mittleren Achse dieses Ellipsoids, d. h. gleich $\sqrt{B}$, das Quadrat des Radiusvektors für das reziproke Ellipsoid ist aber gleich $\boldsymbol{M}^2 : 2T = \frac{1}{\alpha}$, mithin wird

$$\frac{1}{\alpha} = B.$$

Nun haben wir

$$\dot{S} = \Omega \wedge (S - O) = \frac{\boldsymbol{M} \wedge (S - O)}{B},$$

demnach

$$(S - O) \wedge \dot{S} = \frac{1}{B}\{(S - O)^2 \cdot \boldsymbol{M} - (S - O) \times \boldsymbol{M} \cdot (S - O)\}$$

$$= \frac{1}{B}(S - O)^2 \cdot \boldsymbol{M}$$

und weiter

$$g \times (S - O) \wedge \dot{S} = \frac{(S - O)^2}{B}(\boldsymbol{M} \times g) = \text{konst.} \qquad \text{(a)}$$

weil $\boldsymbol{M} \times g$ konstant war. Es ergibt sich noch

$$\dot{S}^2 = \frac{\boldsymbol{M}^2 (S - O)^2}{B^2} = \frac{2T(S - O)^2}{B}$$

und aus (24) folgt dann

$$\dot{S}^2 = \frac{h(S - O)^2}{B} + \frac{2\varkappa(S - O)^2}{B}(S - O) \times g. \qquad \text{(b)}$$

Vergleichen wir die beiden Gleichungen (a) und (b) mit denen für das sphärische Pendel (S. 54), so folgt die Richtigkeit der Behauptung.

Sind ξ, η, ζ die Koordinaten des Schwerpunktes für die Hauptträgheitsachsen von O und beachten wir, daß die Kreisschnitte des reziproken Ellipsoids durch die Gleichung

$$\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) x^2 = \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right) z^2$$

gegeben sind, so wird die gestellte Bedingung analytisch durch die Proportion gegeben

$$\xi^2 : \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) = \eta^2 : 0 = \zeta^2 : \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right)$$

oder

$$\eta = 0, \quad \xi^2\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right) = \zeta^2\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right).$$

Vgl. Joukowsky, Jahresberichte der deutschen Math. Ver. Bd. 3 (1893) S. 62.

14. Aufgabe. *Bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt die Fälle zu bestimmen, wo die momentane Rotationsachse im Körper fest ist.*

Auflösung. Wir setzen

$$p = \omega a, \quad q = \omega b, \quad r = \omega c,$$

wobei nun die Richtungskosinus a, b, c konstant sein sollen, während die Rotationsgeschwindigkeit ω im allgemeinen sich mit der Zeit verändert. Das Gewicht des Körpers setzen wir gleich 1, dann werden die Gleichungen (27) und (27a)

$$Aa\frac{d\omega}{dt} = (B - C)bc\omega^2 + \eta\gamma - \zeta\beta \text{ usw.} \tag{1}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega(c\beta - b\gamma) \text{ usw.} \tag{2}$$

Die Gleichungen (1) kann man umformen, indem man die zuerst mit ξ, η, ζ, darauf mit α, β, γ und endlich mit $(Cc\eta - Bb\zeta)$ usw. multipliziert und jedesmal addiert. Dann erhält man die folgenden Gleichungen, die dritte nach einigen leichten Umformungen:

$$\left.\begin{aligned} &(Aa\xi + Bb\eta + Cc\zeta)\frac{d\omega}{dt} \\ &= [(B - C)bc\xi + (C - A)ca\eta + (A - B)ab\zeta]\omega^2, \\ &(Aa\alpha + Bb\beta + Cc\gamma)\frac{d\omega}{dt} \\ &= [(B - C)bc\alpha + (C - A)ca\beta + (A - B)ab\gamma]\omega^2, \\ &\lambda\omega^2 + \mu - \nu = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

wobei

$$\lambda = (a\xi + b\eta + c\zeta)(A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2) - (Aa\xi + Bb\eta + Cc\zeta)(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2),$$

$$\mu = (\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)(Aa\xi + Bb\eta + Cc\zeta),$$

$$\nu = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(Aa\alpha + Bb\beta + Cc\gamma).$$

Aus dem System (2) erhält man weiter

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = \text{konst.} \tag{4}$$

Wir betrachten die ersten beiden Gleichungen (3). Da der Fall der Ruhe, wo $\omega = 0$, $\dot{\omega} = 0$, natürlich auszuschließen ist, finden wir, daß die Determinante der Koeffizienten von $\dot{\omega}$ und ω^2 verschwinden muß und somit

$$[\sigma(B - C)bc - \varrho Aa]\alpha + [\sigma(C - A)ca - \varrho Bb]\beta \\ + [\sigma(A - B)ab - \varrho Cc]\gamma = 0 \tag{5}$$

wird, wobei

$$\sigma = Aa\xi + Bb\eta + Cc\zeta,$$
$$\varrho = (B - C)bc\xi + (C - A)ca\eta + (A - B)ab\zeta.$$

Wir müssen nun drei Fälle unterscheiden:

1. Die Gleichungen (4) und (5) sind unabhängig. Dann müssen α, β, γ konstant sein und (2) zeigt, daß sie gleich a, b, c sind. Die dritte Gleichung (3) sagt weiter aus, daß $\omega = \text{konst.}$ und die erste liefert

$$(B - C)bc\xi + (C - A)ca\eta + (A - B)ab\zeta = 0.$$

Dies ist die Gleichung eines Kegels zweiter Ordnung; jede seiner Mantellinien (a, b, c) ist, in vertikale Lage gebracht, eine permanente Rotationsachse (Staudes permanente Rotationen). Diesem Kegel gehören die Hauptträgheitsachsen an und ferner die Verbindungslinie des Schwerpunktes mit dem festen Punkt. Zu einer Hauptträgheitsachse gehört der Wert $\omega = \infty$, wie die Gleichungen (1) zeigen. Die Kegelgleichung wird zur Identität im Eulerschen Falle $(\xi, \eta, \zeta = 0)$, man erhält dann das triviale Resultat, daß für $\omega = 0$ jede Achse eine permanente Achse ist.

2. Die Gleichungen (4) und (5) sind nicht unabhängig. Dann muß die Konstante in (4) verschwinden und daraus ergibt sich

$$\tau a = \sigma(B - C)bc - \varrho Aa,$$
$$\tau b = \sigma(C - A)ca - \varrho Bb,$$
$$\tau c = \sigma(A - B)ab - \varrho Cc,$$

wobei $\tau \neq 0$. Die Determinante dieser drei für ϱ, σ, τ linearen und homogenen Gleichungen muß gleich Null sein, also wird

$$(B - C)^2b^2c^2 + (C - A)^2c^2a^2 + (A - B)^2a^2b^2 = 0,$$

und es müssen von den drei Größen a, b, c zwei verschwinden; die

dritte ist dann gleich 1. Ist z. B. $a, b = 0$, $c = 1$, so ergibt die erste Gleichung (3)

$$C\zeta \frac{d\omega}{dt} = 0,$$

und da ω nicht konstant ist, folgt $\zeta = 0$. Mithin wird $\sigma, \varrho = 0$ und damit $\tau = 0$ entgegen der ursprünglichen Annahme. Dieser Fall reduziert sich also auf den folgenden:

3. Die Gleichung (5) ist identisch befriedigt. Es wird dann

$$\sigma(B - C)bc = \varrho A a \text{ usw.},$$

woraus

$$\varrho(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2) = 0,$$

mithin

$$\varrho = 0;$$

und es bieten sich wieder zwei Fälle dar: $\sigma = 0$ und $a, b = 0$, $c = 1$.

Sei zunächst $a, b = 0$, $c = 1$; dann ergeben die ersten beiden Gleichungen (3)

$$C\zeta\dot{\omega} = 0, \quad C\gamma\dot{\omega} = 0,$$

woraus

$$\zeta = 0, \quad \gamma = 0.$$

Die ersten beiden Gleichungen (1) sind identisch erfüllt, die dritte wird für

$$\alpha = \sin\varphi, \quad \beta = \cos\varphi,$$

$$C\dot{\omega} = \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi,$$

außerdem liefern die ersten beiden Gleichungen (2)

$$\dot{\varphi} = \omega,$$

die dritte ist von selbst erfüllt. Man sieht also, daß die Gleichung, die φ bestimmt, die der Pendelbewegung ist, mithin schwingt der Körper um eine horizontale Achse nach der Art eines Pendels. Der Schwerpunkt liegt in der xy-Ebene.

Wir untersuchen jetzt den Fall $\sigma = 0$. Die erste Gleichung (3) ist identisch erfüllt. Aus der zweiten Gleichung und der Derivierten der dritten folgt durch eine leichte Rechnung

$$\lambda \frac{d\omega}{dt} = 0$$

und mithin

$$a\xi + b\eta + c\zeta = 0.$$

Vergegenwärtigen wir uns außerdem, daß σ, $\varrho = 0$, also

$$Aa\xi + Bb\eta + Cc\zeta = 0,$$
$$(B - C)bc\xi + (C - A)ca\eta + (A - B)ab\zeta = 0$$

ist. Aus den vorstehenden drei Gleichungen eliminieren wir a, b, c und finden

$$(B - C)(C - A)(A - B)\xi\eta\zeta(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 0,$$

wir kommen also wieder auf den zuerst betrachteten Fall (Mlodzjejowskysche Bewegungen).

Vgl. O. Staude, *Über permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt,* Journal für Math. Bd. 113, S. 318 (1894); B. K. Mlodzjejowsky, Arbeiten der phys. Sektion der Kais Russ. Gesellschaft der Freunde der Naturkunde in Moskau Bd. 7, S. 46 (1894); P. Stäckel, *Die reduzierten Differentialgleichungen der Bewegung des schweren unsymmetrischen Kreisels,* Math. Annalen Bd. 67, S. 399 (1909).

15. Aufgabe. *Ein starrer Körper ist um eine feste Achse o drehbar, ein zweiter Körper ist um eine in dem ersten Körper feste Achse o′ drehbar, die zu o parallel ist. Es wirken keine Kräfte; die Bewegung ist zu untersuchen.*

Auflösung. Wir legen durch den Schwerpunkt S des zweiten Körpers eine Normalebene zu den beiden Achsen, die diese in O und O' schneidet. Es sei $OO' = a$, $O'S = b$ und φ, ψ seien die Winkel, die OO' und $O'S$ mit einer festen Richtung in der Ebene bilden. Diese Winkel legen die Lage der Körper fest, und das System besitzt zwei Freiheitsgrade. Die kinetische Energie des ersten Körpers ist

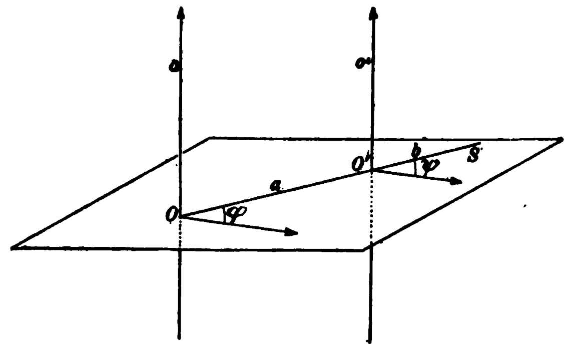


Fig. 25.

$$\tfrac{1}{2}mk^2\dot{\varphi}^2,$$

wenn m seine Masse und k den Trägheitsradius für die Achse o durch O bezeichnet. Die kinetische Energie des zweiten Körpers setzt sich aus zwei Bestandteilen zusammen: der erste rührt her von der Drehung des Körpers um die zu o und o' parallele Achse s durch den Schwerpunkt S und ist

$$\tfrac{1}{2} m_1 k_1^2 \dot{\psi}^2,$$

wenn m_1 die Masse des Körpers und k_1 den Trägheitsradius für die Achse s bedeutet; der zweite Bestandteil wird $\frac{1}{2} m_1 v^2$, wenn v die Geschwindigkeit von S bedeutet und zwar ergibt sich v als die Resultante zweier Geschwindigkeiten, von denen die eine von der Drehung um o herrührt, also senkrecht zu OO' und gleich $a\dot{\varphi}$ ist, die andere von der Drehung um o' stammt, also senkrecht zu $O'S$ und gleich $b\dot{\psi}$ ist. Daraus ergibt sich für die resultierende Geschwindigkeit v

$$v^2 = a^2\dot{\varphi}^2 + b^2\dot{\psi}^2 + 2ab\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi - \psi)$$

und für die kinetische Energie der Ausdruck

$$\begin{aligned} 2T &= (mk^2 + m_1 a^2)\dot{\varphi}^2 + m_1(k_1^2 + b^2)\dot{\psi}^2 + 2abm_1\cos(\varphi - \psi)\dot{\varphi}\dot{\psi} \\ &= \alpha\dot{\varphi}^2 + \beta\dot{\psi}^2 + 2\gamma\dot{\varphi}\dot{\psi}. \end{aligned}$$

Die zweite Form der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen liefert nun sofort die Integrale

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = c \quad \text{und } 2T = h.$$

Die erste dieser Gleichungen wird

$$(\alpha + \gamma)\dot{\varphi} + (\beta + \gamma)\dot{\psi} = c,$$

aus ihr folgt, wenn wir $\varphi - \psi = \omega$, also $\dot{\varphi} - \dot{\psi} = \dot{\omega}$ setzen,

$$\begin{aligned} &(\alpha + \beta + 2\gamma)\dot{\psi} = c - (\alpha + \gamma)\dot{\omega}, \\ &(\alpha + \beta + 2\gamma)(\alpha\dot{\varphi} + \gamma\dot{\psi}) = (\alpha + \gamma)c + (\alpha\beta - \gamma^2)\dot{\omega}. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung $2T = h$ können wir aber mit Benutzung der ersten schreiben

$$\dot{\omega}(\alpha\dot{\varphi} + \gamma\dot{\psi}) + c\dot{\psi} = h,$$

also ergibt sich

$$\dot{\omega}^2(\alpha\beta - \gamma^2) + c^2 = h(\alpha + \beta + 2\gamma),$$

oder mit Rücksicht auf die Bedeutung von γ

$$\dot{\omega}^2 = \frac{h(\alpha + \beta + 2abm_1\cos\omega) - c^2}{\alpha\beta - a^2b^2m_1^2\cos^2\omega}.$$

Das Problem ist so auf Quadraturen zurückgeführt. Vgl. Thomson und Tait, Natural Philosophy, vol. 1, p. 310, 324.

16. Aufgabe. *Die vorige Aufgabe soll so modifiziert werden, daß die zweite Achse o' zur ersten Achse o senkrecht wird und die Ebene, die durch o senkrecht zu o' gelegt wird, die letztere Achse in einem Punkte O' schneidet, für den sie eine Hauptträgheitsachse ist.*

Auflösung. OZ sei die erste Achse, OO' senkrecht zu OZ, $O'A$ sei die zweite Achse und $O'B$, $O'C$ die anderen beiden Hauptträgheitsachsen. $O'Z'$ sei parallel zu OZ, $OO' = a$, der Winkel $BO'Z'$ gleich θ und φ der Winkel, den die Ebene durch O, Z, O' mit einer festen Ebene η bildet. Die kinetische Energie des ersten Körpers ist dann $\frac{1}{2} mk^2 \dot{\varphi}^2$ wie in der vorigen Aufgabe.

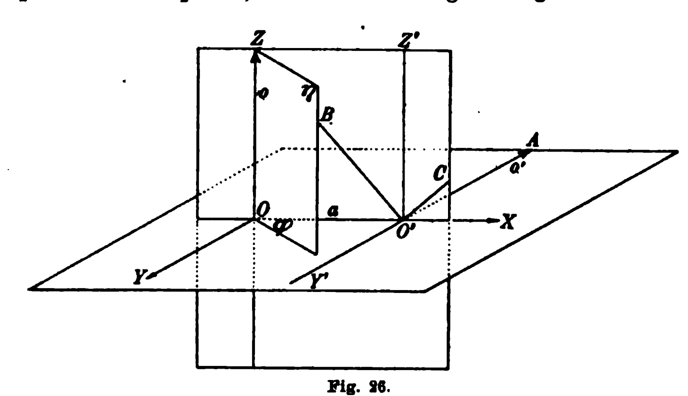


Fig. 26.

Für den zweiten Körper läßt sich nun die Drehung um OZ zerlegen in eine gleiche Drehung um $O'Z'$ und eine Gleitung von der Geschwindigkeit $a\dot{\varphi}$ in der Richtung $O'A$. Die Drehung um $O'Z'$ läßt sich zerlegen in zwei Drehungen von den Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi} \cos \theta$ und $\dot{\varphi} \sin \theta$ um $O'B$ und $O'C$, denn die Achse $O'Z'$ liegt mit $O'B$ und $O'C$ (und mit $O'O$) in einer Ebene. Schließlich führt der zweite Körper noch eine Drehung von der Geschwindigkeit $\dot{\theta}$ um $O'A$ aus. O' sei der Schwerpunkt des zweiten Körpers.

Die kinetische Energie der Translation ist dann $\frac{1}{2} m_1 a^2 \dot{\varphi}^2$, die der drei Rotationen

$$\frac{m_1}{2} (a_1^2 \dot{\theta}^2 + b_1^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + c_1^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta),$$

wenn a_1, b_1, c_1 die Trägheitsradien für die Achsen $O'A$, $O'B$, $O'C$ bedeuten. Setzen wir

$$\alpha = mk^2 + m_1(a^2 + c_1^2), \quad \beta = m_1(b_1^2 - c_1^2), \quad \gamma = m_1 a_1^2,$$

so wird die gesamte kinetische Energie

$$T = \tfrac{1}{2}[(\alpha + \beta \cos^2 \theta)\dot{\varphi}^2 + \gamma \dot{\theta}^2] = \tfrac{1}{2} h.$$

Außerdem ergibt sich $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \delta$, wobei δ eine Konstante bedeutet, und

die vorstehende Gleichung liefert dann weiter

$$\gamma\dot{\theta}^2 = h - \frac{\delta^2}{\alpha + \beta\cos\theta^2}.$$

Aus dieser Gleichung findet man θ durch eine Quadratur, und durch eine weitere Quadratur bestimmt man φ aus

$$\dot{\varphi} = \frac{\delta}{\alpha + \beta\cos^2\theta}.$$

Die Aufgabe ist also ebenfalls durch Quadraturen lösbar. Vgl. Thomson und Tait, a. a. O., vol. 1, p. 312.

17. Aufgabe. *Die Bewegung eines schweren starren Körpers zu untersuchen, der auf einer horizontalen Ebene kreiselt und rollt.*

Auflösung. Bei dieser Bewegung verschwindet die Geschwindigkeit des Punktes P, in dem der Körper die Ebene berührt, dieser dreht sich also in jedem Augenblick um den Auflagepunkt P und die Drehung läßt sich zerlegen in eine solche um eine zur Ebene senkrechte Achse (Kreiseln) und in eine Drehung um eine in der Ebene selbst liegende Achse (Rollen). Das System ist anholonom.

Wir bezeichnen mit x, y, z wieder die Hauptträgheitsachsen durch den Schwerpunkt S, mit α, β, γ die auf diese Achsen bezogenen Richtungskosinus der nach oben gerichteten Normalen in dem Berührungspunkt P, mit x, y, z die Koordinaten von P, mit X, Y, Z die Komponenten der Reaktionskraft N in P. Dann erhalten wir die Gleichungen

$$R_x = -\text{M}g\alpha + X, \quad R_y = -\text{M}g\beta + Y, \quad R_z = -\text{M}g\gamma + Z,$$
$$M_x = Zy - Yz, \quad M_y = Xz - Zx, \quad M_z = Yx - Xy,$$

und damit die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \text{M}(\dot{u} + qw - rv) &= -\text{M}g\alpha + X, \text{ usw.} \\ A\dot{p} + (C - B)qr &= Zy - Yz, \text{ usw.} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Drücken wir aus, daß die Geschwindigkeit von P verschwindet, so haben wir

$$u + qz - ry = 0, \quad v + rx - pz = 0, \quad w + py - qx = 0. \qquad \text{(b)}$$

Die Veränderung, welche die im Raume feste gemeinsame Normale der Ebene und des Körpers gegen den Körper erleidet, ist entgegengesetzt gleich der Drehung, welche eine mit dem Körper bewegte Linie von dieser Richtung im Raume ausführt. So gelangt man zu den Gleichungen

$$\dot{\alpha} = r\beta - q\gamma, \quad \dot{\beta} = p\gamma - r\alpha, \quad \dot{\gamma} = q\alpha - p\beta. \qquad \text{(c)}$$

Ist die Gleichung der Oberfläche des Körpers gegeben, so sind α, β, γ bekannte Funktionen von x, y, z. Wir haben also im ganzen 12 Gleichungen vor uns, in denen die 12 Unbekannten $u, v, w, p, q, r, x, y, z, X, Y, Z$ enthalten sind, und die Bestimmung ist demnach vollständig.

Multiplizieren wir die Gleichungen (a) der Reihe nach mit u, v, w, p, q, r und addieren sie, so finden wir mit Rücksicht auf (b)

$$\mathrm{M}(u\dot{u} + v\dot{v} + w\dot{w}) + Ap\dot{p} + Bq\dot{q} + Cr\dot{r} = -\mathrm{M}g(\alpha u + \beta v + \gamma w).$$

Es wird aber wieder infolge von (b)

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = x(q\gamma - r\beta) + y(r\alpha - p\gamma) + z(p\beta - q\alpha)$$

und dies wegen (c)

$$= -(\dot{\alpha}x + \dot{\beta}y + \dot{\gamma}z).$$

Da aber $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z} = 0$ ist, können wir schreiben

$$\mathrm{M}(u\dot{u} + v\dot{v} + w\dot{w}) + Ap\dot{p} + Bq\dot{q} + Cr\dot{r} = \mathrm{M}g\frac{d}{dt}(\alpha x + \beta y + \gamma z).$$

Diese Gleichung ist integrierbar und drückt die Erhaltung der Energie aus.

Vgl. Appell, Les mouvements de roulement, p. 25.

18. Aufgabe. *Das vorige Problem für einen Rotationskörper.*

Auflösung. Wir behalten die früheren Bezeichnungen bei, nehmen für die z-Achse die Rotationsachse, für die y-Achse die zur Rotationsachse senkrechte Horizontale durch den Schwerpunkt S, die x-Achse sei eine feste Achse in der Meridianebene, aber nicht im Körper fest, für die z_1-Achse wählen wir die Vertikale durch S, und nennen θ den Winkel (z, z_1), ψ den Winkel (y_1, y), dann haben wir eine Drehung um die Achse z_1 mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$, eine Drehung um die Achse y mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$, und schließlich wird die Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Rotationskörpers um seine Achse z gleich $\dot{\lambda}$. Da x und z mit z_1 in einer Vertikalebene liegen, werden die Komponenten der Drehung um z_1 nach den Achsen x und z

$$-\dot{\psi}\sin\theta, \quad \dot{\psi}\cos\theta,$$

und demnach finden wir hier

$$p = -\dot{\psi}\sin\theta, \quad q = \dot{\theta}, \quad r = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\lambda}.$$

Durch Anwendung der Gleichungen (32) und (35) erhalten wir

$$1)\ \text{M}(\dot{u} + qw - (r - \dot{\lambda})v) = \text{M}g \sin\theta + X,$$
$$2)\ \text{M}(\dot{v} + (r - \dot{\lambda})u - pw) = Y,$$
$$3)\ \text{M}(\dot{w} + pv - qu) = -\text{M}g\cos\theta + Z,$$
$$4)\ A\dot{p} + (C - A)qr + Aq\dot{\lambda} = -zY,$$
$$5)\ A\dot{q} - (C - A)rp - Ap\dot{\lambda} = zX - xZ,$$
$$6)\ C\dot{r} = xY.$$

Die Gleichungen (b) der vorigen Aufgabe werden

$$u + qz = 0, \quad v + rx - pz = 0, \quad w - qx = 0.$$

Zwischen den neun so gefundenen Gleichungen kann man die sechs Größen u, v, w, X, Y, Z eliminieren und behält dann drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung für x, y, z übrig, da sich die Winkel ψ, θ aus der Gleichung der Meridiankurve herleiten lassen.

Die Gleichung der festen Ebene wird in dem gegen den Körper festen Koordinatensystem

$$x \sin\theta - z\cos\theta = \zeta = f(\theta).$$

Die oben gegebene Gleichung für die Erhaltung der Energie liefert hier

$$\text{M}(u\dot{u} + v\dot{v} + w\dot{w}) + A(p\dot{p} + q\dot{q}) + Cr\dot{r}$$
$$= -\text{M}g\frac{d}{dt}(x\sin\theta - z\cos\theta),$$

und nach der vorhergehenden Gleichung wird die rechte Seite

$$= -\text{M}g\frac{d\zeta}{dt}.$$

Vgl. Appell a. a. O., p. 27.

19. Aufgabe. *Den besonderen Fall zu behandeln, wo der Körper eine homogene kreisförmige Scheibe mit dem Radius a ist.*

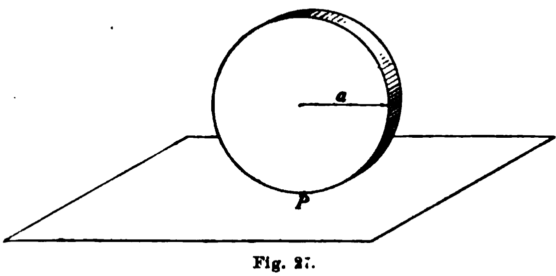


Fig. 27.

Auflösung. Die Koordinaten des Punktes P sind jetzt $(a, 0, 0)$, wenn wir die x-Achse der z_1-Achse entgegengesetzt gerichtet annehmen. Es wird dann

$$A = B = \tfrac{1}{2}\text{M}a^2,$$
$$C = \text{M}a^2,$$

und die Gleichungen der vorigen Aufgabe werden

$$u = 0, \quad v + ar = 0, \quad w - aq = 0,$$

$$\text{M}a[q^2 + r(r - \dot{\lambda})] = \text{M}g \sin\theta + X, \quad -\text{M}[a\dot{r} + apq] = Y,$$

$$\text{M}[a\dot{q} - apr] = -\text{M}g\cos\theta + Z,$$

$$\tfrac{1}{4}\text{M}a^2\dot{p} + \tfrac{1}{4}\text{M}a^2(r + \dot{\lambda})q = 0, \quad \tfrac{1}{2}\text{M}a^2\dot{q} - \tfrac{1}{4}\text{M}a^2(r + \dot{\lambda})p = -aZ,$$

$$\text{M}a^2\dot{r} = aY.$$

Aus den letzten sechs Gleichungen sind sogleich u, v, w durch die drei ersten Gleichungen entfernt worden. Wir eliminieren nun auch X, Y, Z und finden

$$\dot{p} + (r + \dot{\lambda})q = 0, \quad 3\dot{q} - (3r + \dot{\lambda})p = -\frac{2g}{a}\cos\theta, \quad 2\dot{r} + pq = 0.$$

Eliminieren wir aus den ersten beiden dieser Gleichungen $\dot{\lambda}$, so finden wir mit Rücksicht auf die dritte Gleichung

$$p\dot{p} + 3q\dot{q} + 4r\dot{r} = -\frac{2g}{a}\cos\theta\cdot\dot{\theta}.$$

Auf der rechten Seite haben wir $\dot{\theta}$ statt q geschrieben. Integrieren wir, so ergibt sich

$$p^2 + 3q^2 + 4r^2 = -\frac{4g}{a}\sin\theta + h.$$

Setzen wir in der ersten und dritten der gefundenen Gleichungen $q = \dot{\theta}$, so können wir sie schreiben

$$\frac{dp}{d\theta} + r + \dot{\lambda} = 0, \quad 2\frac{dr}{d\theta} + p = 0.$$

Es ist aber

$$\dot{\lambda} = r - \dot{\psi}\cos\theta = r + p\operatorname{cotg}\theta,$$

und setzen wir den aus der zweiten der vorstehenden Gleichungen für p folgenden Wert in die erste ein, so wird sie

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} + \operatorname{cotg}\theta\frac{dr}{d\theta} - r = 0\cdot$$

Dabei ist r die Drehgeschwindigkeit des Rades um seine Achse. Die gefundene Differentialgleichung läßt sich mittels der hypergeometrischen Reihe integrieren. S. Appell a. a. O. p. 34, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. 14 (1900); Korteweg, ibidem; Carvallo, *Théorie du mouvement du monocycle* etc., Journal de l'école polyt. (2), Cah. 5, 6 (1900).

20. Aufgabe. *Die Bewegung eines schweren starren Körpers auf einer absolut glatten horizontalen Ebene zu untersuchen.*

Auflösung. Es sei S der Schwerpunkt, die Achse z_1 zur Ebene senkrecht, P der Berührungspunkt, N die zur Ebene senkrechte Reaktionskraft, x, y, z die Hauptträgheitsachsen durch den Schwerpunkt. Legen wir durch die Winkel φ, λ die Lage der letzteren bezüglich z_1 fest, so wird auch die Lage des Körpers gegen die Ebene und damit die Höhe ζ seines Schwerpunktes über der Ebene festgelegt, wir haben also

$$\zeta = f(\varphi, \lambda).$$

Das System besitzt fünf Freiheitsgrade.

Da $R_{x_1} = 0$, $R_{y_1} = 0$, wird die Geschwindigkeitskomponente des Schwerpunktes nach der x_1- und y_1-Achse konstant, der Fußpunkt O des aus S auf die Ebene gefällten Lotes bewegt sich also in der Ebene mit konstanter Geschwindigkeit nach stets derselben Richtung. Nennen wir u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten des Schwerpunktes, p, q, r die Komponenten der Drehung um ihn, so muß die Erhaltung der Energie gelten, es wird also

$$\tfrac{1}{2}[\mathrm{M}(u^2 + v^2 + w^2) + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2] + \mathrm{M}g\zeta = \text{konst.}$$

oder, da die Horizontalkomponente der Geschwindigkeit des Schwerpunktes, also $\sqrt{u^2 + v^2}$, konstant ist, folgt

$$\mathrm{M}w^2 + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h - 2\mathrm{M}g\zeta.$$

Da noch $M_{z_1} = 0$ ist, folgt auch

$$Ap \cos(x, z_1) + Bq \cos(y, z_1) + Cr \cos(z, z_1) = k.$$

Dies sind aber die einzigen Integrale, die sich in dem allgemeinen Falle finden lassen.

Ist der Körper ein Rotationskörper, das Trägheitsellipsoid also ein Rotationsellipsoid ($A = B$), so trifft die Reaktionskraft N die Rotationsachse, also wird $M_z = 0$ und daher Cr, d. h. auch r konstant. Außerdem ist $\zeta = f(\varphi)$, weil eine Drehung des Körpers um seine Rotationsachse seine Berührung mit der Ebene nicht ändert. Das Problem läßt sich wie im vorigen Falle auf Quadraturen zurückführen.

Im Falle des als Kinderspielzeug dienenden Kreisels, wo der Körper mit einer Spitze aufsteht, wird

$$\zeta = l \sin\varphi,$$

wenn l die Entfernung des Schwerpunktes von der Spitze ist. Im Falle einer kreisrunden Scheibe dagegen wird

$$\zeta = a \cos \varphi,$$

wenn a den Radius der Scheibe bezeichnet. Vgl. Poisson, Traité de Mécanique, Tome II, p. 214.

21. Aufgabe. *Das Problem der Billardkugel.*

Auflösung. Die Billardkugel ist eine schwere Kugel, die sich auf einer rauhen, horizontalen Ebene bewegt. Die Reaktionskraft dieser Ebene setzt sich aus zwei Kräften zusammen, die beide in dem Auflagepunkt der Kugel angreifen. Die eine N, die Druckkraft, ist vertikal gerichtet und gleich dem Gewicht Mg der Kugel, die andere F, die Reibungskraft, ist horizontal und der Druckkraft proportional, $= fN$, sie hat die Richtung der Bewegung des Punktes P. Wählen wir die x- und y-Achse horizontal und bildet die Bewegungsrichtung des Punktes P den Winkel α mit der x-Achse, so erhalten wir für die Bewegung des Schwerpunktes die Gleichungen

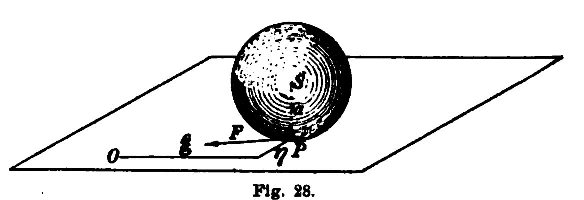


Fig. 28.

$$M\ddot{\xi} = X = fMg \cos \alpha, \quad M\ddot{\eta} = Y = fMg \sin \alpha.$$

Die Eulerschen Gleichungen für die Drehung um den Schwerpunkt werden, da hier

$$A = B = C = \tfrac{2}{5} M a^2$$

wird, wenn a der Radius der Kugel ist,

$$A\frac{dp}{dt} = aY, \quad A\frac{dq}{dt} = -aX, \quad A\frac{dr}{dt} = 0.$$

Wir bezeichnen mit u, v die Geschwindigkeitskomponenten des Auflagepunktes P, dann wird

$$u = \dot{\xi} - aq, \quad v = \dot{\eta} + ap.$$

Differenzieren wir diese Gleichungen, so ergibt sich

$$\frac{du}{dt} = \ddot{\xi} - a\frac{dq}{dt} = \frac{X}{M} + \frac{a^2}{A} X,$$

$$\frac{dv}{dt} = \ddot{\eta} + a\frac{dp}{dt} = \frac{Y}{M} + \frac{a^2}{A} Y.$$

Es ist also

$$\frac{du}{dt} : \frac{dv}{dt} = X : Y.$$

Andererseits wird aber nach der Definition des Winkels α

$$u : v = \operatorname{cotg} \alpha$$

und dies nach den gemachten Vorraussetzungen $= X : Y$. Demnach wird

$$\frac{du}{u} = \frac{dv}{v}, \text{ also } \log u = \log v + \log c \text{ oder } \frac{u}{v} = c,$$

wenn c eine Konstante bedeutet, und wir haben

$$\frac{u}{v} = \operatorname{cotg} \alpha = \frac{X}{Y} = c.$$

Da aber die Größe F der Kraft konstant ist, sind auch X und Y konstant, die Eulerschen Gleichungen lassen sich sofort integrieren und ergeben, wenn P, Q, R die Anfangswerte von p, q, r sind

$$p = P + \tfrac{5}{2} \frac{Y}{M a} t, \quad q = Q - \tfrac{5}{2} \frac{X}{M a} t, \quad r = R.$$

Integrieren wir die Gleichungen für die Bewegung des Schwerpunktes, so ergibt sich, wenn U, V die Komponenten der Anfangsgeschwindigkeit sind,

$$\dot{\xi} = U + \frac{X}{M} t, \quad \dot{\eta} = V + \frac{Y}{M} t.$$

Setzen wir dies in die Gleichungen für u, v ein, so werden sie

$$u = U + \tfrac{7}{2} \frac{X}{M} t - aQ,$$

$$v = V + \tfrac{7}{2} \frac{Y}{M} t + aP.$$

Aus den Gleichungen $u : v = X : Y$ und $\sqrt{X^2 + Y^2} = f M g$ entnehmen wir dann, daß

$$\frac{u}{v} = \frac{X}{Y} = \frac{U - aQ}{V + aP}$$

wird und weiter

$$X = f M g \frac{U - aQ}{\sqrt{(U - aQ)^2 + (V + aP)^2}},$$

$$Y = f M g \frac{V + aP}{\sqrt{(U - aQ)^2 + (V + aP)^2}}.$$

Es gibt einen Augenblick, wo das Gleiten der Kugel aufhört und ein reines Rollen anfängt. Dies geschieht, wenn $\sqrt{u^2 + v^2} = 0$ wird, und hieraus berechnet sich diese Zeit

$$t_r = \frac{2}{7} \frac{\sqrt{(U - aQ)^2 + (V + aP)^2}}{fg}.$$

Von nun an muß $u = 0$ und $v = 0$ sein. Daraus folgt

$$\dot{\xi} = aq, \quad \dot{\eta} = -ap,$$

$$\frac{X}{\mathrm{M}} = \ddot{\xi} = a\dot{q} = -\frac{a^2}{A} X = -\frac{5}{2} \frac{X}{\mathrm{M}}, \quad \text{also } X = 0,$$

$$\frac{Y}{\mathrm{M}} = \ddot{\eta} = -a\dot{p} = -\frac{a^2}{A} Y = -\frac{5}{2} \frac{Y}{\mathrm{M}}, \quad \text{also } Y = 0,$$

mithin $p, q =$ konst., d. h. der Ball bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einer geraden Linie.

Vorher bewegte sich der Ball in einer Parabel, was sich durch Integration der Gleichungen für $\dot{\xi}, \dot{\eta}$ sofort ergibt. In der Tat finden wir auf diese Weise, wenn wir uns das Koordinatensystem so gewählt denken, daß $X = 0$, also $Y = f\mathrm{M}g$ wird,

$$\xi = \xi_0 + Ut, \quad \eta = \eta_0 + Vt + \tfrac{1}{2} fgt^2.$$

Vgl. G. Coriolis, Théorie mathématique des effets du jeu de billard, Paris 1835; G. W. Hemming, Billiards mathematically treated, London 1899.

22. Aufgabe. *Das Problem des Zweirads.*

Auflösung. Wir denken uns das Hinterrad im Koordinatenursprung O auf der xy-Ebene eines Koordinatensystems aufstehend, so daß seine Tangente in O die x-Achse wird, und unter dem Winkel φ gegen die xz-Ebene geneigt. Im Punkte B der x-Achse stehe das Vorderrad auf und seine Tangente in B bilde mit der x-Achse den Winkel ψ.

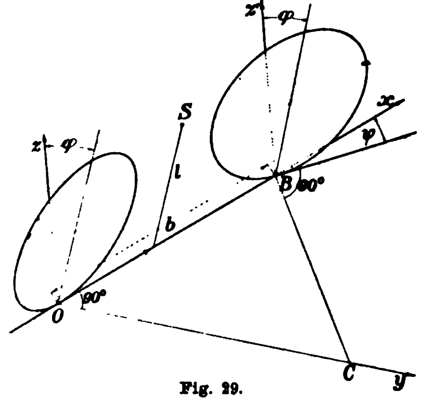


Fig. 29.

Die Entfernung $b = OB$ ist konstant. Den Momentanpol in der xy-Ebene finden wir sofort, indem wir auf den Tangenten der beiden Räder in O und B die Lote errichten und zum Schnitt bringen

Er ist also der Punkt C der y-Achse mit der Ordinate $R = b \cdot \operatorname{cotg} \psi$. Die Winkelgeschwindigkeit wird $\omega = v : R$, wenn v die Geschwindigkeit des Hinterrades ist.

Wir bilden nun das statische Moment der wirkenden Kräfte für die x-Achse. Ist l der Abstand des Schwerpunktes von der x-Achse, M die Masse des Fahrrades und des Fahrers zusammengenommen, die wir beide als ein starres System behandeln, so wird das statische Moment, das von der Schwere herrührt,

$$\mathsf{M} g l \sin \varphi.$$

Wir berechnen nun das Moment der Zentrifugalkräfte. Die Drehachse c steht in C auf der xy-Ebene senkrecht; wenn wir also den Abstand eines Punktes (x, y, z) von ihr auf die Koordinatenachsen projizieren, so erhalten wir x, $y - R$, 0 und für die Komponenten der Zentrifugalkraft eines in diesem Punkte befindlichen Massenelementes dm

$$\omega^2 x\, dm, \quad \omega^2 (y - R)\, dm, \quad 0.$$

Das statische Moment dieser Kraft für die x-Achse ist

$$-\omega^2 (y - R) z\, dm = -\omega^2 r (r \sin \varphi - R) \cos \varphi\, dm,$$

wenn wir den Abstand von der x-Achse r nennen. Integrieren wir über das ganze System, so erhalten wir den Ausdruck

$$-\omega^2 (A \sin \varphi - \mathsf{M} R l) \cos \varphi,$$

wenn $A = \int r^2\, dm$ das Trägheitsmoment für diese Achse bedeutet.

Die Beschleunigungskräfte liefern endlich das Moment $A \ddot{\varphi}$, und somit ergibt sich die Gleichung

$$A \ddot{\varphi} = \mathsf{M} g l \sin \varphi + \omega^2 (A \sin \varphi - \mathsf{M} R l) \cos \varphi,$$

woraus im Falle des Gleichgewichtes ($\ddot{\varphi} = 0$)

$$\omega^2 = \frac{\mathsf{M} g l}{\mathsf{M} R l - A \sin \varphi} \operatorname{tang} \varphi.$$

Ist der Winkel φ sehr klein, so folgt

$$\omega^2 = \frac{g}{R} \operatorname{tang} \varphi$$

und, wenn man $\omega = v : R$ einsetzt,

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{v^2}{R g}.$$

Diese Formel wurde angegeben von Rankine, *Sur les principes dynamiques du mouvement des vélocipèdes,* Les Mondes, t. 21, p. 371 (1869).

Society for Freedom in Science

LIST OF MEMBERS
(June 1945)

The number of members is 363, of whom 181 live in the British Isles, 150 in the U.S.A., 25 in the British Dominions and Colonies, and 7 elsewhere.

The names of the members of the Committee are distinguished by asterisks in this list.

The Secretary of the Society is Dr. John R. Baker (University Museum, Oxford). Professor P. W. Bridgman (The Physics Laboratories, Harvard University, Cambridge, Mass.) is acting for the present as the representative of the Committee in the U.S.A.

Changes of address and any errors in this list should be reported to Dr. Baker, and also to Professor Bridgman in the case of American members.

(1) Members resident in the British Isles

ALEXANDER, W. B., 37 Museum Road, Oxford.
ALLMAND, Prof. A. J., F.R.S., King's College, Strand, London, W.C.2.
ANDRADE, Prof. E. N. DA C., F.R.S., 28 Woronzow Road, London, N.W.8.
APPLEBEY, Dr. M. P., Yarm-on-Tees, Yorkshire.
AXFORD, D. W. E., 9 Park Parade, Cambridge.
*BAKER, Dr. J. R., University Museum, Oxford.
BARCLAY, J. A., Dept. of Physiology, Medical School, Birmingham 15.
BARKER, D., University Museum, Oxford.
BARKER, Sir Ernest, 17 Cranmer Road, Cambridge.
BELL, R. P., F.R.S., Balliol College, Oxford.
BIRCUMSHAW, Dr. L. L., Chemistry Dept., University, Birmingham 15.
BLACKER, Dr. C. P., 69 Eccleston Square, London, S.W.1.
*BLACKMAN, Prof. V. H., F.R.S., 17 Berkeley Place, Wimbledon, London, S.W.19.
BLOUNT, Capt. B. K., Tarrant Ruston, Blandford, Dorset.
BLÜH, Dr. O., 6 Farlow Road, Northfield, Birmingham.
BORUCKI, Dr. J., University Museum, Oxford.
BOURNE, Dr. G., 47 Queen Anne Street, London, W.1.
BOYD, Prof. J. Dixon, London Hospital Medical College, Turner Street, London, E.1.

Hat v einen konstanten Wert, so muß nach der gefundenen ìleichung R verkleinert werden, wenn φ wächst, also ein Umfallen lroht. Das heißt, das Vorderrad muß gegen das Hinterrad stärker ;edreht werden und zwar immer nach der Seite, nach der das Fahrad sich neigt.

Die Arbeit, die einer Vermehrung des Winkels φ um $\delta\varphi$ entpricht, wird, wenn wir das Glied $A \sin\varphi$ vernachlässigen,

$$\text{M}l(g \sin\varphi - \omega^2 R \cos\varphi)\delta\varphi,$$

nd wenn wir φ hierin noch um φ' vermehren und von einer Gleichewichtslage, bei der der Arbeitsausdruck verschwindet, ausgehen, nden wir

$$\text{M}l(g \cos\varphi + \omega^2 R \sin\varphi)\varphi'\delta\varphi = \text{M}l\sqrt{g^2 + \omega^4 R^2} \cdot \varphi'\delta\varphi.$$

ìieser Faktor von $\varphi'\delta\varphi$ ist immer positiv, also ist das Gleichewicht stets labil.

Vgl. C. Bourlet, *Traité des bicycles et bicyclettes*, Paris 1895, *'ouveau traité des bicycles et bicyclettes,* Paris 1898, *Études théoriies sur la bicyclette*, Bulletin de la société math. de France, vol. 27 899) p. 47, 76.

Sechstes Kapitel.

Das Newtonsche Potential.

1. Begriff und Bedeutung des Potentials. Der Begriff des Potentials ist schon im zweiten Kapitel eingeführt worden. Wir verstehen darunter eine skalare Funktion des Ortes von der Art, daß der Gradient die an der betreffenden Stelle wirkende Kraft ergibt. Ein solches Potential existiert u. a. immer, wenn es sich um Zentralkräfte handelt. Unter einer Zentralkraft verstehen wir eine Kraft, die nach einem bestimmten Punkte O hin gerichtet ist und deren Größe eine Funktion $c\varphi(r)$ der Entfernung r des Angriffspunktes P von diesem Punkte O ist, und es ist das Potential dann selbst eine Funktion $U(r)$ der Entfernung r. Diese Funktion ist definiert durch die Gleichung

$$\text{grad } U(r) = -c\varphi(r)\frac{P-O}{r},$$

denn die Größe auf der rechten Seite ist der Kraftvektor F. Nach der Definition des Gradienten muß sich, wenn wir die vorstehende Gleichung skalar mit dP multiplizieren, ergeben

$$dU(r) = -c\varphi(r)\frac{P-O}{r} \times dP.$$

Es wird aber $(P-O) \times dP = r\,dr$, also

$$dU(r) = -c\varphi(r)\,dr,$$

und wir können setzen

$$U(r) = c\int_r^{r_0} \varphi(r)\,dr.$$

Die Gleichung

$$dU(r) = F \times dP$$

bedeutet aber, daß das Differential des Potentials gleich der

Arbeit ist, die die Kraft F leistet, wenn der Angriffspunkt der Kraft von P nach $P + dP$ rückt, und das Potential selbst ergibt sich als die Arbeit, die von der Kraft geleistet wird, wenn der Angriffspunkt aus der festen Anfangslage P_0 in die Lage P rückt. Diese Arbeit ist, wie man sieht, nur eine Funktion der Entfernungen r und r_0 dieser Punkte von O, von ihrer Orientierung gegen einander aber unabhängig.

In dem besonderen Falle, wo $\varphi(r)$ für $r = \infty$ zur zweiten Ordnung, d. h. wie $\frac{1}{r^2}$, verschwindet, kann man die obere Grenze des Integrals $r_0 = \infty$ wählen, und das Potential wird gleich der Arbeit, die geleistet wird, wenn der Angriffspunkt der Kraft aus unendlicher Entfernung in einen gewissen Abstand r vom Zentrum rückt.

Für gewöhnlich werden die Punkte O und P als Massenpunkte angesehen, d. h. mit bestimmten Zahlenkoeffizienten m, m' behaftet, die in dem Kraftausdruck als Faktoren auftreten, so daß wir haben:

$$c = m \cdot m'.$$

Bei der Newtonschen Kraft wird

$$\varphi(r) = \frac{f}{r^2}$$

und wir finden dann das Newtonsche Potential

$$U(r) = mm' \int_r^\infty f \frac{dr}{r^2} = f \frac{m \cdot m'}{r}.$$

Haben wir nun nicht eine einzelne anziehende Masse, sondern ein Massensystem, das wir zunächst auf eine Masse von der Größe 1 wirken lassen, und nennen V das sich dann ergebende Potential, so wird die Definitionsgleichung dieses Potentials

$$dV = \sum F_i \times dP,$$

wenn die F_i die einzelnen wirkenden Kräfte bezeichnet. Daraus folgt aber, daß wir

$$V = \sum V_i \quad \text{und} \quad V_i = F_i \times dP$$

annehmen, d. h. das Potential aus den Potentialen für die einzelnen wirkenden Massen gewinnen können. Es ergibt sich also als Newtonsches Potential für V ein Ausdruck

$$V = f\sum \frac{m_i}{r_i}\,^{1)},$$

wenn m_i die einzelnen Massen des Systems und r_i ihre Entfernungen von dem Punkt sind, auf den sich das Potential bezieht. f heißt hierbei die Attraktionskonstante.

Sind die Massen m_i kontinuierlich in einem Raumteil τ ausgebreitet, so sind sie in der Form $\mu d\tau$ anzusetzen, wenn $d\tau$ das Volumenelement und μ die Dichtigkeit an der betreffenden Stelle bezeichnet. Es ergibt sich dann für das Potential des Körpers der Ausdruck

$$V = \int \frac{\mu\, d\tau}{r},$$

wenn wir, wie wir es von nun ab immer tun werden, $f = 1$ voraussetzen.

Die Kraft $\boldsymbol{F}$ im Punkte P wird durch die Gleichung gegeben

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} V,$$

und wenn $\boldsymbol{n}$ einen Einheitsvektor bedeutet, so können wir setzen

$$dP = \boldsymbol{n}\, ds,$$

indem ds die Größe der Verschiebung des Punktes P bezeichnet und der Einheitsvektor $\boldsymbol{n}$ ihre Richtung angibt. Daraus folgt

$$\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{n} = \frac{dV}{ds}.$$

---

1) Die Betrachtung dieser Funktion rührt von Lagrange her, *Sur l'équation séculaire de la lune*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, Savants étrangers, t. VII (1773), Œuvres complètes t. VI, p. 349; *Remarques générales sur le mouvement de plusieurs corps*, Nouveaux mémoires de l'Académie de Berlin 1777, Œuvres t. IV, p. 402. Der Name *Potential* stammt von Gauß, *Allgemeine Lehrsätze* usw., Beobachtungen des magnetischen Vereins für 1839 (1840), Werke Bd. 5, S. 200, Ostwalds Klassiker Nr. 2. Green, *Essay on the application of math.*

Durch diese Gleichung bestimmt sich die Komponente der Kraft nach der Richtung des Vektors $\boldsymbol{n}$. Ist insbesondere $\boldsymbol{n}$ tangential zu einer Fläche $V =$ konst., so wird $\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{n} = 0$. Demnach ergibt sich:

Die Flächen $V =$ konst. sind normal zu der Richtung der Kraft in ihren Punkten und heißen Äquipotentialflächen. Setzt man eine von ihnen als vollkommen glatte Oberfläche eines Körpers voraus, so ist der Punkt auf dieser Fläche im Gleichgewicht. Daher nennt man sie auch Gleichgewichts- oder Niveaufläche. Die orthogonalen Trajektorien der Niveauflächen, die in jedem ihrer Punkte von der Linie der dort wirkenden Kraft berührt werden, heißen die Kraftlinien.[1])

2. Anziehung einer Kugelschale. Die Bedeutung der Newtonschen Kräfte liegt darin, daß man solche Kräfte zwischen allen Teilen der wägbaren Materie annehmen kann. Insbesondere wirken sie zwischen den Teilen der Erde und den Körpern an ihrer Oberfläche und erklären so die Schwere der Körper an der Erdoberfläche, indem sie sie auf eine elementare und im ganzen Weltall wirkende Anziehungskraft zurückführen.

---

analysis etc., Nottingham 1828, Papers p. 22, Ostwalds Klassiker Nr. 61, hatte den Ausdruck Potentialfunktion gebraucht.

1) An zusammenfassenden Darstellungen der Potentialtheorie nennen wir die folgenden: R. Clausius, Die Potentialfunktion und das Potential, Lpz. 1859 (mehrere Auflagen); E. Betti, Teorica delle forze che agiscono secondo la legge di Newton, Pisa 1865, Teorica delle forze Newtoniane, Pisa 1879, deutsch von Fr. Meyer als „Potentialtheorie", Stuttgart 1885; B. Riemann, Vorlesungen über Schwere, Elektrizität und Magnetismus, hggb. v. Hattendorf, Hannover 1875, 2. Aufl. 1880; P. G. Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältnis des Quadrates d. Entf. wirkenden Kräfte, hggb. v. Grube, Lpz 1876, 2. Aufl. 1887; F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen, hggb. v. C. Neumann, Lpz. 1887; C. Neumann, Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential, Lpz. 1877; E. Mathieu, Théorie du potentiel, Paris 1886, dtsch. v. Maser 1890; H. Poincaré, Théorie du potentiel Newtonien, Leçons red. par Le Roy et Vincent, Paris 1899; A. Korn, Lehrbuch der Potentialtheorie, Berl. 1899; A. Wangerin, Potentialtheorie (Sammlung Schubert) Lpz. 1909.

Da die Erde in erster Annäherung als eine Kugel anzusehen ist, ergibt sich sonach als unsere erste Aufgabe die Bestimmung der Anziehung einer Kugel, insbesondere der Nachweis, daß die resultierende Anziehung der Kugel für einen außerhalb gelegenen Punkt stets nach dem Kugelmittelpunkte gerichtet ist.

Wir beginnen mit der Betrachtung einer unendlich dünnen, homogenen Schicht, die eine Kugel mit dem Radius a überall in gleicher Dicke bedeckt. Wir nehmen zuerst den angezogenen Punkt P im Innern der Kugelschale an und legen durch ihn Strahlen hindurch, die die Mantelfläche eines unendlich schmalen Kegels bilden und aus der Kugelschale zwei einander gegenüberliegende Volumenelemente ABB_1A_1 und $A'B'B_1'A_1'$ ausschneiden. Mit $d\omega$ wollen wir die Öffnung des Kegels, d. h. das von ihm aus einer Kugel mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt P ausgeschnittene Oberflächenelement bezeichnen, ferner setzen wir

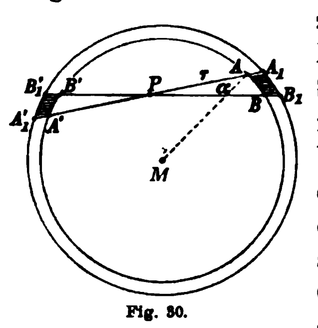


Fig. 30.

$$r = PA, \quad r' = PA', \quad \alpha = \sphericalangle PAM = \sphericalangle PA'M,$$

wenn M den Mittelpunkt der Kugel bedeutet. Es wird dann das Flächenelement, das aus einer Kugel mit dem Radius r und dem Mittelpunkt P von dem Kegel bei A ausgeschnitten wird, $= r^2 d\omega$, und daher das aus der Kugel um M ausgeschnittene Flächenelement an derselben Stelle

$$d\sigma = \frac{r^2 d\omega}{\cos\alpha}.$$

Analog wird das bei A' durch denselben Kegel ausgeschnittene Flächenelement

$$d\sigma' = \frac{r'^2 d\omega}{\cos\alpha}.$$

Bezeichnet aber da die Dicke und μ die Dichtigkeit der Kugelschale, so werden die Massen der Volumenelemente bei A und A' gleich $\mu\, d\sigma\, da$ und $\mu\, d\sigma'\, da$, und damit die von ihnen auf

P ausgeübten Anziehungskräfte beide gleich $\frac{\mu d\omega da}{\cos\alpha}$, diese beiden Kräfte halten sich also, da sie entgegengesetzt gerichtet sind, das Gleichgewicht. Da aber die ganze Kugelschale in solche Paare gegenüberliegender Volumenelemente, deren Anziehungen sich aufheben, zerlegt werden kann, wird auch die Gesamtanziehung der Kugelschale Null, die Kraft verschwindet also im ganzen Innern der Kugelschale und das Potential hat darin einen konstanten Wert. Diesen Wert findet man, indem man das Potential insbesondere für den Mittelpunkt berechnet, er ist also gleich $\frac{\mu \cdot 4\pi a^2 \cdot da}{a}$ oder $4\pi\mu a\, da$.

Für einen Punkt in dem von einer homogenen Kugelschale mit endlicher Dicke umschlossenen Hohlraum finden wir daraus durch Integration sofort den Wert des Potentials

$$V_e = 2\pi\mu(a_2^2 - a_1^2),$$

wenn a_1, a_2 die Radien der die Kugelschale begrenzenden Kugeln sind.[1])

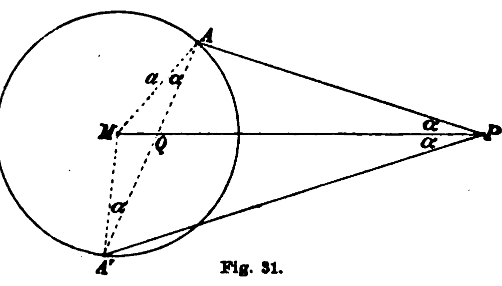


Fig. 31.

Um nun die Anziehung der unendlich dünnen Kugelschale für einen äußeren Punkt P zu finden, wählen wir auf der Strecke MP einen Punkt Q derart, daß $MQ \cdot MP = a^2$ ist, und lassen von dem Punkte Q, der innerhalb der Kugel liegt, einen unendlich dünnen Kegel mit der Öffnung $d\omega$ ausgehen. Sind dann A und A' die Stellen, wo er die Kugel trifft, so wird, weil $MQ : MA = MA : MP$,

$$\triangle MQA \sim \triangle MAP$$

und deshalb

$$AQ : AP = MA : MP,$$

ebenso auch

$$A'Q : A'P = MA' : MP = MA : MP.$$

1) Newton, Philos. natur. Lib. I, Prop. LXX.

Bezeichnet δ die Dichte der Schicht, α den

$$\text{Winkel } MAQ = \text{Winkel } MA'Q$$

so wird die Anziehung der beiden Massenelemente in A und A'

$$dF = \mu\delta\frac{AQ^2 d\omega}{AP^2 \cos\alpha} = \mu\delta\frac{MA^2 d\omega}{MP^2 \cos\alpha} = \mu\delta\frac{A'Q^2 d\omega}{A'P^2 \cos\alpha}.$$

Die beiden gleichen Anziehungskräfte bilden auch mit der Strecke MP gleiche Winkel α, denn es ist

$$\sphericalangle MPA = \sphericalangle MAQ = \alpha = \sphericalangle MA'Q = \sphericalangle MPA';$$

also fällt ihre Resultante in die Linie MP und hat die Größe $2dF\cos\alpha = \mu\delta\frac{2a^2 d\omega}{MP^2}$. Integriert man über die ganze Kugel, so ergibt sich für die wieder in die Linie MP fallende Anziehung der Kugelschale der Wert

$$\frac{4\pi a^2}{MP^2}\mu\delta.$$

Da aber $4\pi a^2\mu\delta$ die Gesamtmasse der Kugelschale ist und sich jede Schale von endlicher Dicke in konzentrische, unendlich dünne Schalen zerlegen läßt, findet man:

Eine homogene Kugelschale zieht einen äußeren Punkt ebenso an als ob ihre ganze Masse in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.[1])

Der gleiche Satz gilt, wie man sofort sieht, auch für eine homogene oder konzentrisch geschichtete Vollkugel. Die Anziehung einer homogenen Kugel von der Dichtigkeit μ und dem Radius a auf einen Punkt P, der im Abstande $r \geqq a$ von ihrem Mittelpunkte liegt, wird

$$\frac{4}{3}\frac{\pi a^3 \mu}{r^2},$$

das zugehörige Potential hat also den Wert

$$V_a = \frac{4}{3}\frac{\pi a^3 \mu}{r}.$$

Liegt der angezogene Punkt P im Innern, ist also $r < a$, so übt nur das Innere der konzentrischen Kugel, die durch

1) Newton, Philos. nat. Lib. II, Prop. LXXI; Thomson u. Tait, vol. 2, p. 14.

ihn hindurchgeht, eine Wirkung auf ihn aus, und das zugehörige Potential hat den Wert $\frac{4}{3}\pi r^2 \mu$. Die Wirkung der außer der inneren Kugel von der ganzen Kugel übrig bleibenden Kugelschale verschwindet, und das zugehörige Potential hat den konstanten Wert $2\pi\mu(a^2 - r^2)$. Addiert man die beiden vorstehenden Werte, so findet man das Potential der ganzen Kugel

$$V_i = \frac{2}{3}\pi\mu(3a^2 - r^2).$$

Für $r = a$ fällt V_a mit V_i und $\frac{dV_a}{dr}$ mit $\frac{dV_i}{dr}$ zusammen, aber die zweiten Derivierten sind verschieden.

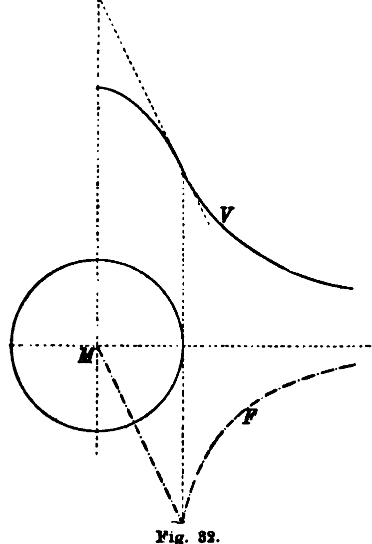


Fig. 32.

Stellt man die Werte des Potentials graphisch dar (Fig. 32), indem man die Abszisse $x = r$, die Ordinate $y = \frac{3V}{2\pi a\mu}$ macht, so ergibt sich für $0 \leqq x \leqq a$ die Kurvengleichung: $ay = 3a^2 - x^2$, für $a \leqq x \leqq \infty$ die Kurvengleichung: $xy = 2a^2$, die erste Kurve ist eine Parabel, deren Achse parallel der y-Achse, die zweite Kurve ist eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten die x- und y-Achse sind. Die beiden Kurven berühren sich in dem Punkte $x = a$, $y = 2a$.[1]) Die strichpunktierte Kurve ist die analoge Darstellung des Kraftausdruckes.

3. Anziehung eines unendlich dünnen Homöoids. Die Erde ist bekanntlich nicht genau kugelförmig, hat aber mit sehr großer Annäherung die Gestalt eines abgeplatteten Sphäroids; die Bestimmung der Anziehung eines Sphäroids oder allgemeiner eines dreiachsigen Ellipsoids hat deswegen ein berühmtes Problem gebildet, an dem sich die hervorragendsten

1) Das Diagramm des Potentials und seiner Derivierten für eine kugelförmige Massenschicht stammt von Thomson u. Tait, vol. 2, p. 37.

Mathematiker versucht haben. Wir wollen es hier so behandeln, daß wir zunächst von einer ellipsoidischen Schale ausgehen. Eine homogene Schicht, die von zwei konzentrischen, ähnlich und ähnlich liegenden (homothetischen) Ellipsoiden begrenzt wird, heißt nach W. Thomson ein Homöoid. Was nun zunächst die Anziehung betrifft, die ein unendlich dünnes Homöoid auf einen Punkt im Innern ausübt, so ist sofort zu erkennen, daß der im vorigen Paragraphen für eine Kugelschale geführte Beweis sich sofort auf eine beliebige geschlossene Schale ausdehnen läßt und daß daher auch die Anziehung des Homöoids für einen Punkt im Innern verschwindet und das Potential für das ganze Innere einen konstanten Wert annimmt.

Um diesen konstanten Wert zu finden, berechnen wir das Potential für den Mittelpunkt M des Homöoids. Wir lassen von M einen Elementarkegel mit der Öffnung $d\omega$ ausgehen und nennen r die Entfernung von M, in der dieser Kegel die äußere Fläche der Schale trifft, dr das Stück, das die Schale aus den Seitenlinien des Kegels ausschneidet, dann wird das Volumen des Stückes der Schale, das in das Innere des Kegels fällt, gleich $r^2 dr\, d\omega$. Ist also μ die Dichtigkeit des Homöoids, so wird der Beitrag, den dieses Volumenelement zu dem Potential liefert, gleich $\mu r\, dr\, d\omega$.

Um nun das Homöoid festzulegen, gehen wir von einem Ellipsoid mit den Halbachsen a, b, c aus, zu dem die beiden begrenzenden Flächen des Homöoids homothetisch sein sollen, die Halbachsen dieser beiden Flächen sind dann von der Form ha, hb, hc und $(h - dh)a$, $(h - dh)b$, $(h - dh)c$. Sind weiter α, β, γ die Richtungskosinus, r die Länge des Radiusvektors, der nach dem betrachteten Volumenelement des Homöoids hinführt, so ergibt sich, indem wir in die Gleichung des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{h^2 a^2} + \frac{y^2}{h^2 b^2} + \frac{z^2}{h^2 c^2} = 1$$

die Werte $x = r\alpha$, $y = r\beta$, $z = r\gamma$ einführen,

$$r^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right) = h^2.$$

Lassen wir r um dr abnehmen, wobei h um dh abnimmt, so erhalten wir aus dieser Gleichung

$$r\,dr\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)=h\,dh.$$

Damit finden wir für das Potential des Homöoids den Wert

$$\int\limits_{\omega}\mu r\,dr\,d\omega=\mu h\,dh\int\limits_{\omega}\frac{d\omega}{\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}}.$$

Um dieses Integral auszuführen, haben wir in der üblichen Weise

$$\alpha=\cos\varphi\cos\lambda,\quad \beta=\cos\varphi\sin\lambda,\quad \gamma=\sin\varphi$$

und

$$d\omega=\cos\varphi\,d\varphi\,d\lambda$$

zu setzen, dann verwandelt sich das Oberflächenintegral in ein wirkliches Doppelintegral, das man nur für einen Oktanten auszuführen braucht, da alle acht Oktanten denselben Wert ergeben. Setzt man noch

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}=A\cos^2\lambda+B\sin^2\lambda,$$

indem man

$$A=\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{c^2},\quad B=\frac{\cos^2\varphi}{b^2}+\frac{\sin^2\varphi}{c^2}$$

macht, so wird das Potential

$$8\mu h\,dh\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\lambda}{A\cos^2\lambda+B\sin^2\lambda}.$$

Das innere Integral bedeutet die halbe Fläche einer Ellipse mit den Halbachsen $1:\sqrt{A}$ und $1:\sqrt{B}$. In der Tat ist diese Ellipse in Polarkoordinaten r, λ durch die Gleichung gegeben

$$A\cos^2\lambda+B\sin^2\lambda=\frac{1}{r^2},$$

das in Rede stehende Integral verwandelt sich also in

$$2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\tfrac{1}{2}r^2\,d\lambda,$$

und dieser Ausdruck liefert die doppelte Fläche des Ellipsenquadranten, ist also gleich $\frac{\pi}{2\sqrt{AB}}$. Führen wir diesen Wert ein, so geht der Ausdruck für das Potential in den folgenden über, der nur ein einfaches Integral enthält,

$$4\pi\mu h dh abc^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sin^3\varphi\sqrt{(a^2+c^2\operatorname{ctg}^2\varphi)(b^2+c^2\operatorname{ctg}^2\varphi)}}.$$

Wir fügen im Nenner des Bruches unter dem Integral noch den Faktor

$$\frac{1}{c}\sin\varphi\sqrt{c^2+c^2\operatorname{ctg}^2\varphi} = 1$$

hinzu und setzen

$$c\operatorname{ctg}\varphi = \sqrt{u}, \quad \text{woraus } c^2\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi} = -\tfrac{1}{2}du,$$

dann wird das Potential

$$2\pi\mu abchdh \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}, \tag{1}$$

wofür wir auch schreiben können

$$\tfrac{1}{2}m \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2h^2+u)(b^2h^2+u)(c^2h^2+u)}}, \tag{2}$$

wenn wir mit

$$m = 4\pi\mu abch^2dh = \tfrac{4}{3}\pi\mu abc[h^3-(h-dh)^3]$$

die Gesamtmasse des Homöoids bezeichnen.

4. Die Chaslesschen Sätze. Die Rechnungen, die erforderlich wären, um die Anziehung eines Homöoids auch für einen äußeren Punkt zu finden, werden ungeheuer abgekürzt durch eine Reihe von Sätzen, die Chasles durch synthetische Betrachtungen gefunden hat.

Diese Sätze knüpfen an zwei konfokale Ellipsoide mit den Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} = 1$$

an, wobei

$$a'^2 = a^2 + \lambda, \quad b'^2 = b^2 + \lambda, \quad c'^2 = c^2 + \lambda,$$

und beruhen auf der von Ivory betrachteten Transformation

$$\frac{x'}{a'} = \frac{x}{a}, \quad \frac{y'}{b'} = \frac{y}{b}, \quad \frac{z'}{c'} = \frac{z}{c},$$

durch die das erste Ellipsoid in das zweite übergeführt wird.

Der grundlegende Satz, der von dieser Transformation gilt, lautet: Gehen bei der Transformation die Punkte P und Q des ersten Ellipsoids in die Punkte P' und Q' des zweiten Ellipsoids über, so wird die Entfernung PQ' gleich der Entfernung $P'Q$. In der Tat, haben P und P' die Koordinaten x, y, z und x', y', z', Q und Q' die Koordinaten x_1, y_1, z_1 und x_1', y_1', z_1', so wird

$$\begin{aligned} PQ'^2 &= (x - x_1')^2 + (y - y_1')^2 + (z - z_1')^2 \\ &= \left(x - \frac{a'}{a} x_1\right)^2 + \left(y - \frac{b'}{b} y_1\right)^2 + \left(z - \frac{c'}{c} z_1\right)^2 \end{aligned}$$

und analog

$$P'Q^2 = \left(\frac{a'}{a} x - x_1\right)^2 + \left(\frac{b'}{b} y - y_1\right)^2 + \left(\frac{c'}{c} z - z_1\right)^2,$$

mithin

$$\begin{aligned} PQ'^2 - P'Q^2 = \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x_1^2}{a^2}\right)(a'^2 - a^2) + \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y_1^2}{b^2}\right)(b'^2 - b^2) \\ + \left(\frac{z^2}{c^2} - \frac{z_1^2}{c^2}\right)(c'^2 - c^2). \end{aligned}$$

Es ist aber

$$a'^2 - a^2 = b'^2 - b^2 = c'^2 - c^2 = \lambda,$$

also wird

$$PQ'^2 - P'Q^2 = \lambda\left[\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) - \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2}\right)\right].$$

Der Inhalt der eckigen Klammer verschwindet aber, denn die beiden runden Klammern werden gleich 1, weil die Koordinaten x, y, z und x_1, y_1, z_1 der Gleichung des ersten Ellipsoides genügen. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir fügen den zweiten Satz hinzu, daß das Volumen eines Raumstückes τ zu dem Volumen des Raum-

üben auf die Punkte, die außerhalb von beiden liegen, eine Anziehung aus, die für beide dieselbe Richtung hat und ihren Massen proportional ist.

Der Satz läßt sich sofort erweitern auf zwei konfokale Ellipsoide, die sich in homogene konfokale Schichten zerlegen lassen, was insbesondere der Fall ist, wenn die Ellipsoide selbst homogen sind. So finden wir den Satz von Maclaurin:

Zwei homogene konfokale Ellipsoide üben auf einen äußeren Punkt Anziehungen aus, die gleich gerichtet und den Massen der Ellipsoide proportional sind.

Für das Folgende werden wir noch einen Satz gebrauchen, der sich unmittelbar aus dem abgeleiteten grundlegenden Theorem ergibt:

Das Potential eines homogenen Homöoids für einen äußeren Punkt ist gleich dem Potential des durch diesen Punkt hindurchgehenden konfokalen Homöoids für seinen Mittelpunkt.

5. Anziehung eines homogenen Ellipsoids. Wir vereinigen unendlich viele, unendlich dünne Homöoide zu einem Homöoid $\mathfrak{H}$ von endlicher Dicke. Wir haben dann in der Formel (1), um das Potential des Homöoids für einen Punkt im inneren Hohlraum zu finden, von einem Werte h_0 bis zu einem Werte h_1 zu integrieren. Wenn wir der Einfachheit halber die Dichte in allen den elementaren Homöoiden gleich, das Homöoid $\mathfrak{H}$ also ebenfalls homogen annehmen, so erhalten wir sofort den gesuchten Wert des Potentials

$$V_i = \pi\mu abc(h_1^2 - h_0^2)\int\limits_0^\infty \frac{du}{\sqrt{U}}, \tag{3}$$

indem wir zur Abkürzung

$$U = (a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u) \tag{4}$$

setzen.

Um nun auch den Wert des Potentials V_a für einen äußeren Punkt zu finden, benutzen wir den letzten Satz des vorigen

Paragraphen. Wir haben dann das Homöoid $\mathfrak{H}$ durch homothetische Flächen, deren Gleichungen von der Form

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=h^2$$

sind, in elementare Homöoide einzuteilen und zu allen diesen je ein konfokales Homöoid durch den gegebenen äußeren Punkt P zu legen. Die Gleichungen dieser Flächen haben die Form

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=h^2 \tag{5}$$

und müssen erfüllt sein, wenn wir für x, y, z die gegebenen Koordinaten des Punktes P nehmen.

Der Wert des Potentials eines dieser Homöoide für einen inneren Punkt ergibt sich aus (2) sofort in der Form

$$2\pi\mu abch^2dh\int_0^\infty \frac{dw}{\sqrt{(a^2h^2+\lambda h^2+w)(b^2h^2+\lambda h^2+w)(c^2h^2+\lambda h^2+w)}}$$

oder, wenn wir $\lambda h^2+w=h^2u$ setzen,

$$2\pi\mu abchdh\int_\lambda^\infty\frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Hierbei ist zu beachten, daß durch (5) λ als Funktion von h gegeben ist.

Integrieren wir den vorstehenden Ausdruck von h_0 bis h_1, so erhalten wir nach dem benutzten Satze das Potential des gegebenen Homöoids $\mathfrak{H}$ für den äußeren Punkt P, denn die Potentiale der elementaren Homöoide, in die wir $\mathfrak{H}$ zerlegt haben, sind gleich den Potentialen der durch P gehenden Homöoide für einen inneren Punkt. So ergibt sich

$$V_a=2\pi\mu abc\int_{h_0}^{h_1}hdh\int_\lambda^\infty\frac{du}{\sqrt{U}}$$

oder

$$V_a=-\pi\mu abc\int_{h_0}^{h_1}d(1-h^2)\int_\lambda^\infty\frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Wir integrieren nun partiell und finden

$$V_a = -\pi\mu abc\left\{\left[(1-h^2)\int\limits_\lambda^\infty \frac{du}{\sqrt{U}}\right]_{h_0}^{h_1} - \int\limits_{h_0}^{h_1}(1-h^2)\,d\int\limits_\lambda^\infty \frac{du}{\sqrt{U}}\right\}.$$

Das Differential im letzten Gliede ist aber

$$= -\frac{d\lambda}{\sqrt{U(\lambda)}},$$

indem wir mit $U(\lambda)$ das bezeichnen, was aus U wird, wenn wir uns darin λ für u geschrieben denken. Nennen wir noch λ_0, λ_1 die Werte von λ, die zu den Werten h_0, h_1 von h gehören, so können wir den Wert von V_a schreiben, indem wir in dem letzten Integral wieder λ durch u ersetzen,

$$\pi\mu abc\left\{(1-h_0^2)\int\limits_{\lambda_0}^\infty \frac{du}{\sqrt{U}} - (1-h_1^2)\int\limits_{\lambda_1}^\infty \frac{du}{\sqrt{U}} - \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda_1}(1-h^2)\frac{du}{\sqrt{U}}\right\}.$$

Wir wollen nun auch den Wert des Potentials V_i für einen Punkt P berechnen, der dem Homöoid selbst angehört, d. h. zwischen seine begrenzenden Flächen fällt. Durch ihn legen wir dann ein zu diesen Flächen homothetisches Ellipsoid hindurch, das $\mathfrak{H}$ in zwei Homöoide $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ zerlegt und die Gleichung hat

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = h'^2, \tag{6}$$

die für die Koordinaten x, y, z von P erfüllt ist. Es gehört also zu h' der Wert $\lambda = 0$, während für die begrenzenden Flächen von $\mathfrak{H}$ die Werte h_0, h_1 und λ_0, λ_1 bleiben mögen. Wenn wir dann nach den vorstehenden Formeln die Werte des Potentials von $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ einzelnen berechnen und addieren, so finden wir

$$V_i = \pi\mu abc[(1-h'^2) - (1-h_1^2)]\int\limits_0^\infty \frac{du}{\sqrt{U}}$$

$$+\pi\mu abc\left[(1-h_0^2)\int\limits_{\lambda_0}^\infty \frac{du}{\sqrt{U}} - (1-h'^2)\int\limits_0^\infty \frac{du}{\sqrt{U}} + \int\limits_0^{\lambda_0}(1-h^2)\frac{du}{\sqrt{U}}\right]$$

oder

$$V_i = \pi\mu abc\left[(1-h_0^2)\int\limits_{\lambda_0}^{\infty}\frac{du}{\sqrt{U}} - (1-h_1^2)\int\limits_0^{\infty}\frac{du}{\sqrt{U}} + \int\limits_0^{\lambda_0}(1-h^2)\frac{du}{\sqrt{U}}\right].$$

Wir gehen jetzt von dem Homöoid zu einem Ellipsoid über, indem wir $h_0 = 0$ annehmen, so daß die innere Begrenzungsfläche sich auf einen Punkt reduziert. Wir können ferner $h_1 = 1$ annehmen, so daß λ_1 die (dem durch P gehenden konfokalen Ellipsoid entsprechende) positive Wurzel λ der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1 \tag{7}$$

wird, während $\lambda_0 = \infty$ ist. Dann werden die gefundenen Ausdrücke für V_a und V_i, da das erste Integral in ihnen verschwindet und ebenso das zweite Glied, bei dem $1 - h_1^2 = 0$ wird,

$$V_a = \pi\mu abc\int\limits_{\lambda}^{\infty}(1-h^2)\frac{du}{\sqrt{U}}, \tag{8}$$

$$V_i = \pi\mu abc\int\limits_0^{\infty}(1-h^2)\frac{du}{\sqrt{U}}; \tag{9}$$

dabei ist

$$h^2 = \frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u}. \tag{10}$$

Es wird also die zweite Formel

$$V_i = \pi\mu abc\int\limits_0^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{y^2}{b^2+u} - \frac{z^2}{c^2+u}\right)\frac{du}{\sqrt{U}}, \tag{11}$$

wobei U durch (4) definiert ist. V_a geht aus V_i hervor, indem man die untere Grenze des Integrals gleich λ nimmt.

Man kann aber auch die Grenze lassen und u durch $u + \lambda$ ersetzen. Macht man dann

$$a^2 + \lambda = a'^2, \quad b^2 + \lambda = b'^2, \quad c^2 + \lambda = c'^2,$$

so findet man

$$V_a = \pi\mu abc\int_0^\infty\left(1 - \frac{x^2}{a'^2+u} - \frac{y^2}{b'^2+u} - \frac{z^2}{c'^2+u}\right)\frac{du}{\sqrt{U'}}, \tag{12}$$

wenn $U' = \sqrt{(a'^2+u)(b'^2+u)(c'^2+u)}$.

Man kann auch allein mit den Integralen

$$\mathfrak{J} = \pi\mu abc\int_0^\infty\frac{du}{\sqrt{U}}, \quad \mathfrak{J}' = \pi\mu abc\int_0^\infty\frac{du}{\sqrt{U'}}$$

auskommen. In der Tat ergibt sich z. B. durch Differentiation unter dem Integralzeichen

$$\mathfrak{J}_a = 2\frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial a^2} = -\pi\mu abc\int_0^\infty\frac{du}{(a^2+u)\sqrt{U}}$$

und analog für $\mathfrak{J}_b = 2\frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial b^2}$, $\mathfrak{J}_c = 2\frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial c^2}$. Wir können aber setzen

$$V_i = \mathfrak{J} + \mathfrak{J}_a x^2 + \mathfrak{J}_b y^2 + \mathfrak{J}_c z^2$$

und sehen sofort, daß die Flächen V_i = konst., d. h. die Niveauflächen des Potentials im Inneren des Ellipsoids eine Schar homothetischer Ellipsoide bilden.

Für das Potential V_a im Äußeren des Ellipsoids ergibt sich analog

$$V_a = \mathfrak{J}' + 2\left(\frac{\partial\mathfrak{J}'}{\partial a'^2}x^2 + \frac{\partial\mathfrak{J}'}{\partial b'^2}y^2 + \frac{\partial\mathfrak{J}'}{\partial c'^2}z^2\right).$$

Die Flächen V_a = konst. sind aber, da $\mathfrak{J}'$ die durch (7) festgelegte algebraische Funktion λ von x, y, z in transzendenter Form enthält, transzendente Flächen und heißen nach Thomson Plinthoide.

Die Integrale $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}'$ sind sogenannte elliptische Integrale erster Gattung.

Historische Bemerkungen. Newton (Philosophiae naturalis princ. math. Lib. I, Prop. XCI) hat zuerst das Problem der Anziehung eines Rotationsellipsoides für besondere Lagen des angezogenen Punktes behandelt. Maclaurin, *De causa physica fluxus et refluxus maris,* Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'Académie des Sciences, t. VI (1740), A Treatise on Fluxions, Edinburgh 1742,

Book I, Chap. XIV, behandelte auf synthetischem Wege den Fall eines beliebigen Punktes auf der Oberfläche eines Rotationsellipsoides und bewies das nach ihm bekannte Theorem auch für einen beliebigen Punkt der Rotationsachse (l. c. Art. 649) und der Äquatorebene (Art. 651), er gab es ohne Beweis für zwei beliebige konfokale Ellipsoide an, indem er den angezogenen Punkt auf der Verlängerung einer bestimmten Hauptachse voraussetzte (Art. 653). Lagrange, *Sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques,* Nouv. Mémoires de l'Académie Royale de Berlin, 1773, 1775, Œuvres t. III, p. 617, behandelte das Problem analytisch; er bemerkte sofort die große Schwierigkeit der Rechnung im Falle eines äußeren Punktes und gelangte zur Lösung nur in dem Falle eines inneren Punktes. Er bewies aber auch das Maclaurinsche Theorem für jeden äußeren Punkt, der auf der Verlängerung irgend einer der Hauptachsen liegt.

Die vollständige Lösung des Problems glückte zuerst Laplace, *Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes,* Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris 1782, Œuvres t. X, p. 349, und nach ihm Legendre, *Sur les intégrales doubles,* Mém. de l'Acad. de Paris 1788; durch diese Arbeiten wurde, wenn auch nicht auf einfache Weise, das Maclaurinsche Theorem allgemein bewiesen.

Dann haben der Reihe nach die Arbeiten von Ivory, *On the attractions of homogeneous ellipsoids,* Philosophical Transactions vol. 119 (1809) p. 345, von dem die allgemeine Betrachtung der korrespondierenden Punkte herrührt (die sich implicite schon bei Maclaurin findet); Gauß, *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipt. homog.*, Commen. rec. Gotting. vol. 2 (1813), Werke Bd. 5, S. 1; Chasles, Journal de l'école polyt. Cah. 25, p. 266 (1837), Journal de mathém. (1) t. 5 (1840) p. 465, und Dirichlet, *Über eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale,* Bericht der Kgl. preuß. Akademie, Berlin 1839, S. 18, Journal de Mathém. (1) t. 4 (1839) p. 164, *Sur un moyen général de vérifier l'expression du potentiel* etc., Journal für Math. Bd. 32 (1846) S. 80, Werke Bd. 1, S. 375, 381, 391, die Lösung zu einem großen Grade von Einfachheit gebracht. Die Formel (11) und eine analoge, die sich auf ein allgemeineres Attraktionsgesetz bezieht, ist genau so von Dirichlet gegeben worden. Die Arbeiten von Laplace, Ivory, Gauß, Chasles und Dirichlet sind neuerdings von Wangerin in Ostwalds Klassikern, Bd. 19, deutsch herausgegeben. Über die frühere Geschichte des Problems vgl. Todhunter, *History of attraction and the figure of the earth*, London 1873, und für die neuere Litteratur Bacharach, *Geschichte der Potentialtheorie*, Göttingen 1883. Vgl. außerdem die oben angeführten Vorlesungen von Dirichlet über Potentialtheorie;

Thomson und Tait, vol. 2, p. 43; Routh, *Analytical Statics*, vol. 2; Chasles, *Aperçu historique sur le développement des méthodes en géométrie*, p. 163—168; Beltrami *Sulla teoria dell'attrazione degli ellissoidi*, Memorie della R. Accademia di Bologna (4) t. 1, p. 572 (1880).

6. Allgemeine Lehrsätze über das Potential.

a) Rührt das Potential von Massen her, die alle außerhalb einer Kugel mit dem Mittelpunkt O und dem Radius a liegen, so wird der Wert V_0 des Potentials in O ausgedrückt durch ein über die Kugeloberfläche erstrecktes Integral

$$V_0 = \frac{1}{4\pi a^2}\int V d\sigma,$$

d. h. durch das Mittel aus den Werten des Potentials in den Punkten der Kugeloberfläche.[1])

In der Tat, ist $V = \sum \frac{m_i}{r_i}$ der allgemeine Ausdruck für das Potential, so wird das über die Kugelfläche erstreckte Integral

$$\int V d\sigma = \sum m_i \int \frac{d\sigma}{r_i}.$$

Aber $\int \frac{d\sigma}{r_i}$ ist das Potential eines über die Kugel ausgebreiteten gleichförmigen Massenbelegs von der Dichte 1. Das Potential eines solchen Massenbelegs ist gleich dem Potential der in dem Kugelmittelpunkt konzentrierten Gesamtmasse, die hier $4\pi a^2$ ist. Nennen wir also ϱ_i den Abstand des Kugelmittelpunktes O von der Masse m_i, so wird

$$\int V d\sigma = \sum m_i \frac{4\pi a^2}{\varrho_i} = 4\pi a^2 V_0.$$

b) Bezeichnet bei einer gewissen Massenverteilung M die Summe der von einer geschlossenen Fläche σ umgrenzten Massen und F die Attraktionskraft, die

1) Gauß, *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungskräfte* (1840), Werke Bd. 5, S. 200 (Ostwalds Klassiker Nr. 2, S. 30).

diese Massen in einem beliebigen Punkte des Raumes auf die Masse Eins ausüben, endlich n einen Einheitsvektor, der zu der Fläche σ normal und nach innen gerichtet ist, so hat man

$$\int F \times n \, d\sigma = 4\pi M.^{1)} \tag{13}$$

Die linke Seite dieser Gleichung drückt den Kraftfluß aus, der in die Fläche σ eintritt.

Wir betrachten zunächst den Fall einer einzigen Masse M, die in einem Punkte P außerhalb σ liegt. Durch P ziehen wir eine Gerade, die σ in wenigstens zwei Punkten A', A'' trifft. Wir nennen r die von P ausgerechneten Entfernungen; das von der Masse M herrührende Potential ist dann

$$V = \frac{M}{r},$$

Fig. 33.

mithin wird

$$F = \text{grad } V = -\frac{M}{r^3} \text{grad } r$$

und daraus finden wir für die Kräfte in A' und A'', die wir F' und F'' nennen,

$$F' = -\frac{M(A' - P)}{r'^3}, \quad F'' = -\frac{M(A'' - P)}{r''^3},$$

wobei $r' = \text{mod}\,(A' - P)$, $r'' = \text{mod}\,(A'' - P)$. Wir nennen $d\sigma'$ ein Flächenelement um A'; ist $d\omega$ das entsprechende Element der Einheitskugel um P, so wird

$$d\sigma' = \frac{r'^2 d\omega}{(A' - P) \times n'},$$

da $A' - P$ und n' an der Eintrittsstelle einen spitzen Winkel bilden. Ist dagegen $d\sigma''$ das zu demselben $d\omega$ gehörende Flächenelement um A'', so wird

$$d\sigma'' = -\frac{r''^2 d\omega}{(A'' - P) \times n''}.$$

Infolgedessen wird das Produkt $F' \times n' d\sigma'$ für die Eintritts-

1) Gauß, *Allgem. Lehrsätze* Art. 28, Ostwalds Klassiker Nr. 2, S. 38.

stellen der von P ausgehenden Elementarkegel entgegengesetzt gleich den entsprechenden Produkten $\boldsymbol{F}'' \times \boldsymbol{n}'' d\sigma''$ für die Austrittsstellen. Wenn also die Masse M außerhalb σ liegt, so wird

$$\int \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{n}\, d\sigma = 0. \tag{14}$$

Liegt hingegen der Punkt P im Innern von σ, so werden die beiden erwähnten Produkte gleich und von positivem Vorzeichen. Ihr gemeinsamer Wert ist $M d\omega$, also folgt

$$\int \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{n}\, d\sigma = M \int d\omega = 4\pi M.$$

Dasselbe gilt auch für mehrere Massen und damit ist der Satz bewiesen.

c) Wenden wir jetzt auf die Gleichung (13) das Divergenztheorem an und nehmen an, daß die Massen in dem von σ umschlossenen Raumteil τ kontinuierlich mit der Dichtigkeit μ ausgebreitet sind, so finden wir

$$\int \operatorname{div} \boldsymbol{F} d\tau = -4\pi \int \mu\, d\tau.$$

Diese Beziehung gilt, welches auch der Raumteil τ sei, also ergibt sich: In jedem Punkte des von anziehenden Massen erfüllten Feldes ist

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = -4\pi\mu,$$

in dem von Massen freien Felde

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0.$$

Erinnern wir uns schließlich, daß

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \operatorname{div} \operatorname{grad} V = \Delta V,$$

so zeigt sich: die Newtonsche Potentialfunktion genügt in jedem Punkte des von Massen erfüllten Feldes der Differentialgleichung

$$\Delta V = -4\pi\mu, \tag{15}$$

in jedem Punkte des von Massen freien Feldes dagegen der Gleichung

$$\Delta V = 0. \tag{16}$$

Die erste heißt die Poissonsche, die zweite die Laplacesche Gleichung.[1])

d) Die Potentialfunktion kann in dem von Masse freien Raum weder ein Maximum noch ein Minimum besitzen.[2])

Wenn nämlich in einem Punkte P der Wert von V ein Maximum wäre, so könnten wir um P eine hinreichend kleine Kugel konstruieren, die keine Masse einschließt, die Funktion V nimmt dann von P aus nach einem Punkte Q der Kugel hin ab und die Kraft in Q ist demnach von P nach Q gerichtet, also wird $\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{n}$ immer negativ und die Gleichung (14) kann für die Oberfläche der Kugel nicht erfüllt sein. Ähnlich verläuft der Beweis, wenn wir statt des Maximums ein Minimum annehmen.

Wenn wir indessen die Art der Verschiebung beschränken, z. B. den Punkt P derart auf eine Kurve wandern lassen, daß er keine Massen trifft, so kann es sehr wohl geschehen, daß für einzelne Punkte V ein Maximum oder Minimum wird.

Punkte, in denen P in stabilem Gleichgewichte wäre, müßten einem Maximum von V entsprechen, also kann für keinen Punkt stabiles Gleichgewicht vorhanden sein.[3])

---

1) Laplace, *Mémoire sur la théorie de l'anneau de Saturne*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris 1787, p. 249, Œuvres t. XI, p. 278. Poisson, *Remarques sur une équation qui se présente dans la théorie des attractions des sphéroïdes*, Nouveau Bulletin de la Soc. philomathique de Paris, vol. 3, p. 388 (1813). Des Weiteren vgl. man, die Bestimmung der Funktion durch ihre Differentialgleichung und ihre Stetigkeit betreffend, Lejeune-Dirichlet, Journal für Math. Bd. 32 (1846), S. 80, Werke Bd. 2, S. 10. Unter den neueren zusammenfassenden Darstellungen vgl. man außer den in § 1 genannten Werken: Kroneckers Vorlesungen, 1. Band: Vorlesungen über Integrale, Leipzig 1894; Marcolongo, Teoria matematica dello equilibrio dei corpi elastici, Milano 1904, Cap. II.

2) Stokes, *On attractions and on Clairaut's theorem*, Cambridge and Dublin math. Journal vol. IV, p. 194 (1849), Math. and phys. Papers, Vol. II, p. 104 (Prop. X).

3) Earnshaw, *On the nature of the molecular forces* etc., Transactions of the Cambridge Philos. Society vol. VII, p. 97 (1842).

e) Ist eine Masse flächenhaft ausgebreitet, so erleidet beim Durchgang durch diese Fläche σ die Derivierte von V nach der Flächennormalen einen plötzlichen Zuwachs von $4\pi\varepsilon$, wenn ε die Flächendichte des Massenbelages bedeutet und der Durchgang in dem Sinne erfolgt, den man der Normalenrichtung gibt.

Zum Beweis haben wir nur den Satz b) auf einem Zylinder anzuwenden, dessen Seitenlinien senkrecht zu der Fläche σ und unendlich kurz gegen die selbst sehr kleine Grundfläche $d\sigma$ des Zylinders sind. Der Kraftfluß durch die Oberfläche des Zylinders reduziert sich dann auf die zwei Bestandteile

$$F_n^+ \, d\sigma \quad \text{und} \quad -F_n^- \, d\sigma,$$

wenn wir durch das + und — Zeichen die Komponenten der Kraft auf beiden Seiten der Flächen, nach derselben Normalenrichtung n genommen kennzeichnen, und zwar nehmen wir + da, wo die Normalenrichtung nach dem Äußeren des Zylinders geht. Es ergibt sich dann

$$F_n^+ - F_n^- = -4\pi\varepsilon$$

und somit

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_+ - \left(\frac{dV}{dn}\right)_- = -4\pi\varepsilon,$$

wenn wir mit n auch die auf der Normalen abgetragenen Längen, nach der einen Seite positiv, nach der anderen negativ gerechnet, bezeichnen.

Übungsbeispiele.

1. Aufgabe. *Die Anziehung einer homogenen kreisförmigen Scheibe auf einen Punkt P, der senkrecht über ihrem Mittelpunkte O liegt, zu bestimmen.*

Auflösung. Wir zerlegen die Scheibe in konzentrische, unendlich schmale Ringe. Sei r der Radius eines dieser Ringe, dr seine Breite, Q ein Punkt auf ihm, sei ferner ε die Dichtigkeit des Flächenbelags, so wird das Potential dieses Ringes, da die Masse des Ringes $2\pi\varepsilon r dr$ ist, gleich

$$\frac{2\pi\varepsilon r dr}{PQ}.$$

Es wird aber, wenn $PO = p$ ist,

$$PQ = \sqrt{p^2 + r^2},$$

also das Potential des Ringes

$$= \frac{2\pi\varepsilon r dr}{\sqrt{p^2 + r^2}}.$$

Durch Integration ergibt sich für das Potential der ganzen Scheibe, wenn a der Radius des Kreises ist,

$$V = 2\pi\varepsilon \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{p^2 + r^2}} = 2\pi\varepsilon \left(\sqrt{p^2 + a^2} - p\right),$$

daraus finden wir für die in die Richtung des Lotes fallende Kraft

$$F = -\frac{\partial V}{\partial p} = 2\pi\varepsilon \left[1 - \frac{p}{\sqrt{p^2 + a^2}}\right].$$

2. Aufgabe. *Die Anziehung eines gleichförmig mit Masse erfüllten, geraden Kreiszylinders auf einen Punkt seiner Achse zu bestimmen.*

Auflösung. Es habe der Grundkreis des Zylinders den Radius a, l sei die Länge des Zylinders, und es seien r_1 und r_2 die Abstände des angezogenen Punktes P von den begrenzenden Kreisen des Zylinders, $p + l$ sein Abstand von der Ebene des Grundkreises, also p sein Abstand von der Ebene des zweiten begrenzenden Kreises. Liegt dann P außerhalb, so zerlegen wir den Zylinder in unendlich viele kreisförmige Scheiben von der Dicke dz, deren Flächendichtigkeit μdz wird, wenn μ die Volumdichtigkeit des Zylinders ist, und finden durch Integration der Endformel der vorigen Aufgabe, indem wir mit z den Abstand des Punktes P von der Ebene der variablen Kreisscheibe bezeichnen, für die Anziehung, welche natürlich in die Zylinderachse fällt,

$$\begin{aligned} F &= 2\pi\mu \int_p^{p+l} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right] dz \\ &= 2\pi\mu \left[l - \sqrt{(p + l)^2 + a^2} + \sqrt{p^2 + a^2}\right] \\ &= 2\pi\mu \left[l + r_1 - r_2\right]. \end{aligned}$$

Bei der Anziehung eines inneren Punktes beachten wir, daß ein Zylinder auf einen Punkt in seinem Schwerpunkt keine Anziehung ausübt. Ist also jetzt p_1 der Abstand des angezogenen Punktes von der oberen Kreisfläche des Zylinders, und dieser $< l/2$, so haben wir

nur die Anziehung eines Zylinders von der Höhe $l_1 = l - 2p_1$ zu berücksichtigen, von dessen Grundfläche der angezogene Punkt den Abstand $l - p_1 = l_1 + p_1$ hat. Lassen wir also die Bedeutung von r_1 und r_2 ungeändert, so ergibt sich aus der vorigen Formel sofort die Anziehung

$$F_1 = 2\pi\mu[l_1 + r_1 - r_2].$$

8. Aufgabe. *Das Potential einer homogenen ebenen Platte zu finden.*

Auflösung. P sei der potenzierte Punkt, O der Fußpunkt des aus ihm auf die ebene Platte gefällten Lotes, $PO = h$, Q ein beliebiger Punkt der Platte, $PQ = \varrho$, $d\sigma$ ein Oberflächenelement um Q, $d\omega$ das Oberflächenelement, welches der das ebene Flächenelement $d\sigma$ aus P projizierende Kegel aus der mit dem Radius 1 um P beschriebenen Kugel ausschneidet und φ der Winkel OPQ oder der Winkel, den $d\omega$ mit der Ebene der Platte bildet, dann wird die Komponente der Anziehung dieses Plattenelementes nach PO, wenn ε die Flächendichtigkeit bezeichnet,

$$\varepsilon \frac{d\sigma}{\varrho^2} \cos\varphi = \varepsilon\, d\omega \cos\varphi,$$

also gleich der mit ε multiplizierten Projektion des Oberflächenelementes der Einheitskugel auf die Ebene der Platte. Führen wir dies für alle Flächenelemente der Platte aus, so erhalten wir für die Komponente der Gesamtanziehung nach PO die mit ε multiplizierte Fläche (σ), die wir bekommen, wenn wir die Projektion der Platte aus dem Punkte P auf die Einheitskugel wieder auf die Ebene der Platte senkrecht zurückprojizieren.

Wir wollen nun das Potential der Platte selbst berechnen. Führen wir in der Ebene der Platte für O als Ursprung Polarkoordinaten r, θ ein, so wird $\varrho = \sqrt{h^2 + r^2}$ und das Potential

$$V = \varepsilon \iint \frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{h^2 + r^2}} = \varepsilon \iint d\sqrt{h^2 + r^2}\,d\theta = \varepsilon \int (R - h)\,d\theta,$$

wenn wir mit R die Entfernung eines Randpunktes der Platte von P bezeichnen und die letzte Integration um den Rand der Platte erstrecken.

Für die Komponente der Kraft senkrecht zur Ebene der Platte ergibt sich, da $R^2 = r^2 + h^2$, also $\frac{\partial R}{\partial h} = \frac{h}{R}$,

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \varepsilon \int \left(\frac{\partial R}{\partial h} - 1\right) d\theta = \varepsilon \int \left(\frac{h}{R} - 1\right) d\theta$$

und dies wird $= -\varepsilon \cdot (\sigma)$.

Anderseits ist

$$R - h = \frac{r^2}{R} + h\left(\frac{h}{R} - 1\right) \quad \text{und } r^2 d\theta = q ds,$$

wenn ds das Linienelement des Randes und q die Länge des auf die Tangente des Randes aus O gefällten Lotes bezeichnet. So erhalten wir

$$V = \varepsilon \int \frac{q\,ds}{R} - h\varepsilon \cdot (\sigma).$$

Ist die Platte ein Polygon und nennen wir $V_1, V_2, \ldots$ die Potentiale ihrer mit der Dichtigkeit 1 belegten Seiten, $q_1, q_2, \ldots$ die Abstände des Punktes O von diesen Seiten, so wird

$$V = \varepsilon[q_1 V_1 + q_2 V_2 + \cdots - h \cdot (\sigma)].$$

4. Aufgabe. *Die Anziehung eines geraden, homogenen Stabes von verschwindenden Querdimensionen zu bestimmen.*

Auflösung. Man beschreibe um den angezogenen Punkt P in der Ebene, die ihn mit dem Stab AB verbindet, einen Kreis, der die Gerade AB in O berührt; A_1, B_1 seien die Punkte, welche die

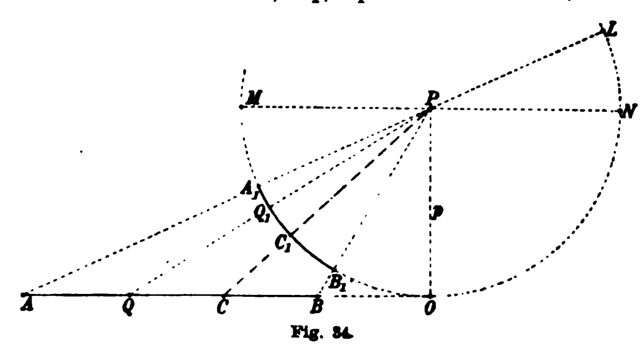


Fig. 34.

Strecken PA und PB aus diesem Kreise ausschneiden. Man bezeichne mit Q einen beliebigen Punkt des Stabes, mit dx ein Linienelement des Stabes, das Q enthält, mit $\varkappa dx$ die Masse dieses Linienelementes. Nennt man noch p die Länge des Lotes PO, θ den Winkel OPQ, so wird die Anziehung jenes Massenelementes

$$\varkappa dx : PQ^2 = \varkappa p d \operatorname{tang} \theta : \frac{p^2}{\cos^2\theta} = \frac{\varkappa p d\theta}{p^2},$$

also ebenso groß wie die Anziehung der in der gleichen Dichtigkeit mit Masse belegten Projektion von dx auf den Kreis aus seinem Mittelpunkte P. Wir können also für die auf den Punkt P ausge-

übte Anziehung den Stab AB ersetzen durch seine Projektion $A_1 B_1$ auf den Kreis, wenn wir diese in der gleichen Dichtigkeit mit Masse belegen. Die Resultante dieser Anziehung muß nun in die Halbierungslinie des Winkels $APB = \alpha$ fallen; die in diese Richtung fallende Komponente der Anziehung des Linienelementes, dessen Verbindungslinie mit P gegen diese Halbierungslinie den Winkel φ einschließt, wird aber, da $d\theta = d\varphi$ ist,

$$\frac{\varkappa d\varphi}{p} \cos \varphi$$

und wir finden die Gesamtanziehung, wenn wir von $\varphi = -\frac{1}{2}\alpha$ bis $\varphi = +\frac{1}{2}\alpha$ integrieren, in der Form

$$R = \frac{2\varkappa}{p} \sin \tfrac{1}{2}\alpha. \tag{a}$$

Da die Richtung der Kraft den Winkel APB halbiert, berührt sie eine Hyperbel, deren Brennpunkte A und B sind, und jede solche Hyperbel muß in allen ihren Punkten von der Richtung der Kraft berührt werden. Diese Hyperbeln bilden also in der Ebene die Kraftlinien, und die Linien gleichen Potentials sind die zu diesen Hyperbeln orthogonalen Ellipsen, die A und B zu Brennpunkten haben. In allen Punkten einer solchen Ellipse ist mithin das Potential dasselbe, und wir können, um es zu bestimmen, insbesondere den einen Endpunkt E oder E' der großen Achse als den potenzierten Punkt wählen. Rechnen wir die Abszissen von der Mitte des Stabes AB aus und setzen $AB = 2c$, $EE = 2a$, so finden wir für den Wert des Potentials sofort

$$V = \int_{-c}^{+c} \frac{\varkappa dx}{a + x} = \varkappa \log \frac{a + c}{a - c}.$$

Nach der Grundeigenschaft der Ellipse muß aber, wenn wir für einen beliebigen Ellipsenpunkt P die Abstände $PA = r_1$, $PB = r_2$ setzen,

$$r_1 + r_2 = 2a$$

werden, also ergibt sich endlich

$$V = \varkappa \log \frac{r_1 + r_2 + 2c}{r_1 + r_2 - 2c}. \tag{b}$$

Die Niveauflächen des Potentials im Raume entstehen, indem man die konfokalen Ellipsen um den Stab rotieren läßt, es sind also konfokale Rotationsellipsoide.

Ist der Stab nach beiden Seiten ins Unendliche ausgedehnt, so

wird $\alpha = \pi$, $\sin\frac{\alpha}{2} = 1$, also ergibt sich aus (a) sofort die Anziehung

$$R = \frac{2\varkappa}{p}.$$

Die Richtung dieser Kraft muß den gestreckten Winkel α, dessen Schenkel nach den unendlich fernen Endpunkten des Stabes hinlaufen, halbieren, also ist die Kraft senkrecht zu dem Stabe selbst und auf ihn zu gerichtet. Ihre Größe ist, wie man sieht, dem Abstande des angezogenen Punktes von dem Stabe umgekehrt proportional

5. Aufgabe. *Das Potential eines unendlich dünnen Homöoids, das die Form eines verlängerten Rotationsellipsoids hat, für einen inneren Punkt zu finden.*

Auflösung. Das Potential wird gegeben durch die Formel (2), in der jetzt $a = b$ $(c > a)$ zu setzen ist. Es wird also, wenn wir $h = 1$ annehmen,

$$V = \tfrac{1}{2}m\int_0^\infty \frac{du}{(a^2 + u)\sqrt{c^2 + u}};$$

für $t = \sqrt{c^2 + u}$, $e^2 = c^2 - a^2$ ergibt sich daraus

$$V = m\int_c^\infty \frac{dt}{t^2 - e^2} = \frac{m}{2e}\log\frac{c + e}{c - e}.$$

Denken wir uns die Masse des Homöoids kontinuierlich auf der Strecke zwischen seinen Brennpunkten A, B, welche den Abstand $2e$ haben, ausgebreitet, so wird die Dichtigkeit dieses linienförmigen Massenbelages

$$\varkappa = \frac{m}{2e}.$$

Für einen Punkt P des Homöoids wird aber, wenn wir $PA = r_1$, $PB = r_2$ setzen,

$$r_1 + r_2 = 2c,$$

und so können wir auch schreiben

$$V = \varkappa\log\frac{r_1 + r_2 + 2e}{r_1 + r_2 - 2e},$$

wobei wir das Potential direkt auf den Punkt P auf der Innenseite des Homöoids beziehen können. Dieser Wert stimmt aber überein mit dem Potential eines Stabes AB von der Liniendichtigkeit $\varkappa$, also ist das Potential des Homöoids dasselbe, als wenn man seine Masse auf der Strecke zwischen den Brennpunkten gleichförmig ausbreitete.

6. Aufgabe. *Die Anziehung eines abgeplatteten Rotationsellipsoides (Sphäroids) für einen Punkt seiner Oberfläche zu finden.*

Auflösung. Wir gehen davon aus, daß sich für einen Punkt auf der Oberfläche des Ellipsoids nach den früher gefundenen Formeln die folgenden Werte für die Anziehungskomponenten ergeben, wenn wir die Dichtigkeit $\mu = 1$ annehmen,

$$X = 2\pi a^2 c x \frac{\partial J}{\partial (a^2)}, \quad Y = 2\pi a^2 c y \frac{\partial J}{\partial (a^2)}, \quad Z = 4\pi a^2 c z \frac{\partial J}{\partial (c^2)}.$$

Der Wert des Integrales J ist hier

$$J = \int_0^\infty \frac{du}{(a^2 + u)\sqrt{c^2 + u}}$$

oder für $t = \sqrt{c^2 + u}$, $a > c$

$$J = \int_c^\infty \frac{2\,dt}{a^2 - c^2 + t^2}.$$

Dieses Integral ist sofort auszuführen, es ergibt sich

$$J = \frac{2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{c^2}},$$

wofür wir auch, wenn wir

$$\sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2}} = \sin\gamma, \quad \frac{c}{a} = \cos\gamma$$

machen, schreiben können

$$J = \frac{2}{a} \frac{\gamma}{\sin\gamma}.$$

Rechnen wir nun die Derivierten von J nach a^2, c^2 aus, so ergibt sich

$$X = -\frac{2\pi x \cos\gamma}{\sin^3\gamma}(\gamma - \tfrac{1}{2}\sin 2\gamma), \quad Y = -\frac{2\pi y \cos\gamma}{\sin\gamma^3}(\gamma - \tfrac{1}{2}\sin 2\gamma),$$

$$Z = -\frac{4\pi z \cos\gamma}{\sin^3\gamma}(\operatorname{tang}\gamma - \gamma)$$

(Gauß, *Theoria attractionis* etc., Art. 14).

Die ersten beiden Komponenten vereinigen sich zu einer Kraft, die senkrecht zur Rotationsachse ist und den Wert hat

$$R = -\frac{2\pi r \cos\gamma}{\sin^3\gamma}(\gamma - \tfrac{1}{2}\sin 2\gamma),$$

wenn $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ den Abstand des Punktes von der Rotationsachse bedeutet.

7. Aufgabe. *Die Anziehung eines nach beiden Seiten unendlich ausgedehnten, homogenen hohlen Kreiszylinders zu bestimmen.*

Auflösung. Die Anziehung verschwindet für einen Punkt im Innern. Für einen Punkt im Äußeren zerlegen wir den Hohlzylinder, den wir uns zunächst unendlich dünn denken, in unendlich schmale Streifen und können dann die Anziehung eines Streifens, dessen Masse dm sei, nach der vierten Aufgabe finden. Hiernach zeigt sich, daß die Anziehung des Kreiszylinders dieselbe ist, die ein Kreis auf einen Punkt seiner Ebene ausübt, wenn die Anziehung nicht umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung, sondern der Entfernung selbst ist.

Wir verfahren dann genau analog, wie bei der Hohlkugel. Wir nehmen in der Ebene außer dem angezogenen Punkt P einen Punkt Q auf der Verbindungsstrecke von P mit dem Mittelpunkte M des Kreises an, derart, daß $MP \cdot MQ = a^2$, nämlich gleich dem Quadrate des Kreisradius wird, und zerlegen den Kreis durch Strahlen, die durch Q gehen. Sind dann durch zwei den unendlich kleinen Winkel $d\omega$ einschließende solche Strahlen zwei Stücke aus dem Kreise ausgeschnittene und A, A' zwei Punkte auf diesen Stücken, so werden die Anziehungen, die von diesen Stücken wieder einander gleich, weil $AQ : AP = MA : MP = A'Q : A'P$ ist und folglich, wenn α wieder den Winkel $MAQ =$ Winkel $MA'Q$ und $\varkappa$ die Dichtigkeit des Belages bezeichnet,

$$\varkappa \frac{AQ}{AP} \frac{d\omega}{\cos\alpha} = \varkappa \frac{MA}{MP} \frac{d\omega}{\cos\alpha} = \varkappa \frac{A'Q}{A'P} \frac{d\omega}{\cos\alpha}$$

wird, und die beiden Elemente liefern zusammen eine Anziehung, die längs PM wirkt und die Größe $\varkappa \frac{2a\,d\omega}{MP}$ hat. Die Gesamtanziehung ist also dieselbe, als wenn die gesamte Masse im Mittelpunkte M konzentriert wäre, und es ergibt sich für den Kreiszylinder, daß er auf einen äußeren Punkt ebenso wirkt, als ob seine ganze Masse gleichförmig über seine Achse ausgebreitet wäre.

8. Aufgabe. *Nachzuweisen, daß, wenn ein beliebiger, nach beiden Seiten unendlich ausgedehnter Zylinder so mit Masse erfüllt ist, daß die Dichtigkeit μ in allen Punkten einer zu seinen Seitenlinien parallelen Geraden immer dieselbe ist, alle senkrechten Querschnitte des Zylinders also dieselbe Massenverteilung zeigen, die Anziehung zurückgeführt werden kann auf ein Potential*

$$W = -\int \varepsilon \log r \, d\sigma,$$

für $\varepsilon = 2\mu$, wobei die Integration über den Schnitt σ des Zylinders mit der durch den angezogenen Punkt gelegten Querschnittsebene η zu erstrecken ist und r den Abstand eines Elementes $d\sigma$ dieses Schnittes von dem angezogenen Punkt P bedeutet. Ferner zu zeigen, daß in der Ebene η für beliebige rechtwinklige Koordinaten die Gleichung

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -2\pi\varepsilon$$

erfüllt ist.

Auflösung. Es ergibt sich bei der Differentiation nach irgend einer Richtung s

$$\frac{\partial W}{\partial s} = -\int \frac{2\mu}{r}\frac{dr}{ds}\,d\sigma = -\int \frac{2\mu}{r}\cos(r, s)\,d\sigma.$$

Danach ist dies wirklich die Komponente der ausgeübten Anziehung nach der Richtung s, denn der ganze Zylinder setzt sich zusammen aus unendlich dünnen Streifen von dem Querschnitt $d\sigma$ und der Liniendichte $\mu\,d\sigma$, deren Anziehung gleich $\frac{2\mu\,d\sigma}{r}$ wird und in die Richtung von r fällt.

Die Differentialgleichung aber ist erfüllt, weil W das gewöhnliche Potential der wirkenden Kräfte und von z unabhängig ist. Eine solche Funktion W heißt logarithmisches Potential, und ist in der Ebene dem Newtonschen Potential im Raume vollkommen analog.

9. Aufgabe. *Zu zeigen, daß der Wert V_0 des Potentials in einem Punkte O durch die Werte V des Potentials in den Punkten P einer beliebigen geschlossenen Oberfläche σ, die alle Massen des Systems, aber nicht den Punkt O umschließt, gegeben wird vermöge der Formel*

$$V_0 = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(V\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{dV}{dn}\right)d\sigma,$$

wobei $OP = r$ gesetzt ist und n die nach außen gerichtete Normale der Oberfläche bedeutet, so daß $n \times dP = dn$.

Auflösung. Man erhält die Formel, indem man von dem Greenschen Satze (I. Band, S. 42)

$$\int_{\sigma'}\left(V\frac{dU}{dn} - U\frac{dV}{dn}\right)d\sigma' = -\int_{\tau'}(U\Delta V - V\Delta U)\,d\tau'$$

ausgeht, wobei man für τ' den Raum innerhalb einer Kugel mit unendlich großem Radius mit Ausschluß des von der Oberfläche σ umschlossenen Raumes und einer sehr kleinen Kugel um O wählt, für σ' die Gesamtoberfläche von τ' und $U = \frac{1}{r}$ nimmt.

Auf der rechten Seite wird dann für alle Punkte des Raumes τ'

$$\Delta V = 0 \quad \text{und } \Delta U = \Delta \frac{1}{r} = 0.$$

Auf der linken Seite ergibt sich zunächst das Integral, daß sich über die Oberfläche σ erstreckt. Bei der Integration über die Kugeloberfläche wird, wenn ϱ der Radius dieser Kugel ist,

$$U = \frac{1}{\varrho}, \quad \frac{dU}{dn} = \frac{d\frac{1}{\varrho}}{dn} = \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \varrho} = -\frac{1}{\varrho^2}, \quad d\sigma = \varrho^2 d\omega,$$

also wird dieser Bestandteil

$$-\int^{\circ}\left(V + \varrho\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right) d\omega.$$

Geht man zur Grenze $(\varrho = 0)$ über, so verschwindet das zweite Glied in der Klammer gegen das erste, V wird V_0 und tritt vor das Integralzeichen und das Integral $\int d\omega$ ist über die Fläche der Einheitskugel zu erstrecken, also $= 4\pi$.

Das Integral über die unendlich ferne Kugel verschwindet, denn es wird analog wie das vorige

$$\int\left(V + R\frac{\partial V}{\partial R}\right) d\omega,$$

wenn R den unendlich großen Radius bezeichnet, und hierin wird $V = 0$ und $R\frac{\partial V}{\partial R} = 0$, weil die Derivierten von V wie $\frac{1}{R^2}$ verschwinden sollen, also ist in der Tat das ganze Integral Null.

So aber erhalten wir

$$\int\limits_{\sigma}\left(V\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{dV}{dn}\right) d\sigma - 4\pi V_0 = 0,$$

d. h. die zu beweisende Formel.

Für das logarithmische Potential W wird diese Formel analog, wenn in der Ebene eine geschlossene Kurve s angenommen wird, die alle Massen umschließt,

$$W_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{s}\left(\log r\frac{dW}{dn} - W\frac{d\log r}{dn}\right) ds,$$

wobei W_0 sich auf einen außerhalb s liegenden Punkt O bezieht.

10. Aufgabe. *Eine gegebene homogene Masse so zu formen, daß sie auf einen bestimmten Punkt P an ihrer Oberfläche eine möglichst große Anziehung ausübt.*

Auflösung. Wir lassen von dem angezogenen Punkte P Elementarkegel mit gleicher Öffnung ausgehen und benutzen den folgenden einfachen Grundsatz: Wenn man am Ende eines Kegels eine Masse hinzufügt, so vergrößert man seine Anziehung, nimmt man eine Masse weg, so verkleinert man sie.

Wir fassen nun zunächst die Kegel ins Auge, die mit der resultierenden Anziehungskraft gleiche Winkel einschließen. Wenn dann ein Maximum vorhanden ist, so darf die Anziehung nicht geändert werden, indem man ein Massenelement vom Ende eines Kegels wegnimmt und am Ende eines anderen Kegels hinzufügt. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn alle die Kegel gleiche Länge haben, denn die Größe der Anziehung eines Massenteilchens ist bestimmt durch seine Entfernung von dem angezogenen Punkte. Die Begrenzungsfläche des Körpers muß deshalb eine Rotationsfläche sein, deren Achse die Wirkungslinie der Resultante ist. Denn sind die Radienvektoren, die von P ausgehen und mit der Resultante gleiche Winkel bilden, alle gleich lang, so sind auch ihre Endpunkte von der Linie der Resultante alle gleich weit entfernt.

Wir fassen darauf zwei Elementarkegel ins Auge, die in eine Meridianebene der Rotationsfläche fallen und verschiedene Winkel mit der Resultante bilden. Die Bedingung des Maximums fordert dann wieder, daß die Anziehung nicht geändert wird, wenn wir ein Massenelement dm am Ende des einen Kegels wegnehmen und am Ende des anderen Kegels hinzufügen. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn die Komponente der Anziehung des Massenelementes dm am Ende des einen Kegels gleich ist der entsprechenden Komponente für das gleiche Massenelement am Ende des anderen Kegels. Nennen wir also r die Länge des Kegels, φ den Winkel, den er mit der Resultante, d. h. der Rotationsachse bildet, so muß

$$\frac{dm}{r^2} \cos\varphi = \text{konst.}$$

oder

$$c^2 \cos\varphi = r^2$$

sein, wenn c eine Konstante bedeutet. Dies aber ist sofort die Gleichung für die Meridiankurve der gesuchten Fläche in Polarkoordinaten. In kartesischen Koordinaten wird sie, wenn P der Ursprung und die Rotationsachse die x-Achse ist,

$$c^4 x^2 = (x^2 + y^2)^2$$

und damit wird die Gleichung der Rotationsfläche selbst

$$c^4 x^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2.$$

Sie ist also von der vierten Ordnung und gehört zu den sogenannten Zykliden.

DRITTER TEIL

MECHANIK DER DEFORMIERBAREN KÖRPER

Siebentes Kapitel.

Kinematik der deformierbaren Körper.

1. Infinitesimale Deformation eines unendlich kleinen Bereichs. Bis jetzt haben wir uns auf die Betrachtung starrer Körper beschränkt; aber in der Natur finden sich Körper (wie z. B. eine Flüssigkeitsmenge, ein elastischer Körper), die unter der Einwirkung gewisser Kräfte sich deformieren, so daß der Abstand zweier Punkte und der Winkel zweier Geraden sich verändert.

Wir wollen uns nun mit solchen deformierbaren Körpern beschäftigen und zunächst versuchen, uns eine Vorstellung zu bilden von der Deformation der Umgebung eines Punktes P, den wir aus dem Körper willkürlich herausgreifen.

Ein solcher Punkt wird nach der Deformation in eine Lage P_1 gelangt sein. Wir nennen dann $P_1 - P = s$ die Verrückung des Punktes P. Diese Verrückung ist eine Funktion des Punktes P (und damit auch seiner Koordinaten). Wir nehmen an, daß während der Deformation in dem Körper keine Zerreißungen, Durchdringungen und Übereinanderlagerungen einzelner Teile vorkommen, so daß s eine stetige eindeutige Funktion von P ist. Bezüglich eines orthogonalen Tripels von festen Achsen e_1, e_2, e_3 seien x, y, z die Koordinaten von P, u, v, w die Komponenten von s, die wir als die Verrückungskomponenten bezeichnen; dann sind u, v, w eindeutige, stetige Funktionen von x, y, z.

Wir beschränken uns außerdem auf die Betrachtung des Falles, wo u, v, w und ihre Derivierten nach den Koordinaten derart sind, daß sich gegen sie die höheren Derivierten vernachlässigen lassen, ebenso wie ihre Produkte und Quadrate,

mit anderen Worten, wir beschränken uns auf die Betrachtung infinitesimaler Deformationen.

Wir nehmen eine hinreichend enge Umgebung des Punktes P und in ihr einen anderen Punkt M an, der bei der Deformation nach M_1 gelange. Es sei $M - P = \boldsymbol{a}$ und ξ, η, ζ seien die Komponenten von $\boldsymbol{a}$; wir wollen die Verrückung $M_1 - M$ von M berechnen. Zu dem Zweck beachten wir, daß wir von der Verrückung $P_1 - P$ zu der Verrückung $M_1 - M$ übergehen, indem wir an die Stelle der Koordinaten x, y, z die Werte $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ setzen. Dann aber werden die Verrückungskomponenten u, v, w zufolge der gemachten Voraussetzungen

$$u + \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta, \quad v + \frac{\partial v}{\partial x}\xi + \cdots, \quad w + \frac{\partial w}{\partial x}\xi + \cdots$$

Dies sind die Komponenten der Verrückung $M_1 - M$. Wir machen nun

$$M_1 - M = \boldsymbol{s} + \alpha \boldsymbol{a}, \tag{1}$$

dann haben wir für die Komponenten des Vektors $\alpha\boldsymbol{a}$ die Werte

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta, \\ \eta' &= \frac{\partial v}{\partial x}\xi + \frac{\partial v}{\partial y}\eta + \frac{\partial v}{\partial z}\zeta, \\ \zeta' &= \frac{\partial w}{\partial x}\xi + \frac{\partial w}{\partial y}\eta + \frac{\partial w}{\partial z}\zeta. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Der durch das Symbol $\alpha\boldsymbol{a}$ bezeichnete Vektor geht also aus dem Vektor $\boldsymbol{a}$, dessen Komponenten ξ, η, ζ sind, durch eine bestimmte Operation hervor, die durch die Gleichungen (2) dargestellt wird.

Da diese Gleichungen homogen und linear sind, ist sofort zu sehen, daß, wenn $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ zwei verschiedene Vektoren sind und m eine reelle Zahl bezeichnet,

$$\left.\begin{aligned} \alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}, \quad \alpha(m\boldsymbol{a}) = m \cdot \alpha\boldsymbol{a}, \\ \alpha(dP) = d\boldsymbol{s}, \quad d(\alpha\boldsymbol{a}) = \alpha(d\boldsymbol{a}) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

wird. Addieren wir zu der Gleichung (1) die Gleichung

$$\boldsymbol{M} - \boldsymbol{P}_1 = (\boldsymbol{M} - \boldsymbol{P}) - (\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}) = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{s},$$

so ergibt sich

$$\boldsymbol{M}_1 - \boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{a} + \alpha \boldsymbol{a}. \tag{4}$$

Die Formeln (3) und (4) lassen die Eigenschaften der infinitesimalen Deformation sofort erkennen.

Ist N ein Punkt der Geraden PM, so wird

$$\boldsymbol{N} - \boldsymbol{P} = m\boldsymbol{a},$$

also nach (3) und (4)

$$\boldsymbol{N}_1 - \boldsymbol{P}_1 = m\boldsymbol{a} + \alpha(m\boldsymbol{a}) = m(\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{a}) = m(\boldsymbol{M}_1 - \boldsymbol{P}_1)$$

d. h. der Punkt N_1, in den N durch die Deformation übergeht, ist ein Punkt der Geraden $P_1 M_1$; demnach transformieren sich die Geraden, die von P ausgehen, wieder in Gerade. Das Gleiche gilt aber auch von allen geraden Linien, und ebenso ist leicht zu sehen, daß parallele Gerade immer wieder in parallele Gerade übergehen. Es gehen auch alle Ebenen immer wieder in Ebenen und parallele Ebenen wieder in parallele Ebenen über, und ein Volumenelement, das die Gestalt eines Parallelepipedon hat, wird wieder in ein ebensolches transformiert.

2. Linearer Dilatationskoeffizient. Ausweitung zweier Richtungen. Wir setzen

$$\boldsymbol{M} - \boldsymbol{N} = m\boldsymbol{a},$$

wobei $\boldsymbol{a}$ einen Einheitsvektor bezeichnet, der dieselbe Richtung wie der Vektor $\boldsymbol{M} - \boldsymbol{N}$ hat. Es wird demnach, wie man sofort aus (4) ableitet,

$$\boldsymbol{M}_1 - \boldsymbol{N}_1 = m(\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{a}).$$

Wir bezeichnen nun als den linearen Dilatationskoeffizienten ε für die Richtung $\boldsymbol{a}$ das Verhältnis

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{mod}(\boldsymbol{M}_1 - \boldsymbol{N}_1) - \operatorname{mod}(\boldsymbol{M} - \boldsymbol{N})}{\operatorname{mod}(\boldsymbol{M} - \boldsymbol{N})};$$

es wird dann

$$1 + \varepsilon = \operatorname{mod}(\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{a}). \tag{5}$$

Wir betrachten in gleicher Weise einen anderen Einheitsvektor $\boldsymbol{b}$ und nennen ε' den zugehörigen Dilatationskoeffizienten, so daß

$$1 + \varepsilon' = \operatorname{mod}(\boldsymbol{b} + \alpha\boldsymbol{b});$$

ferner sei φ der Winkel zwischen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$, also

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \cos\varphi,$$

dann bezeichnen wir als die Ausweitung σ der beiden Richtungen $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ die Änderung des Winkels φ bei der Deformation, und es ergibt sich

$$(M_1 - N_1) \times (M_1' - N_1')$$
$$= \operatorname{mod}(M_1 - N_1) \cdot \operatorname{mod}(M_1' - N_1') \cdot \cos(\varphi - \sigma),$$

wenn

$$M_1' - N_1' = n\boldsymbol{b}$$

gesetzt wird und mithin

$$(\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{a}) \times (\boldsymbol{b} + \alpha\boldsymbol{b}) = (1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon')(\cos\varphi\cos\sigma + \sin\varphi\sin\sigma).$$

Auf der rechten Seite können wir 1 und σ statt $\cos\sigma$ und $\sin\sigma$ setzen und beim Ausrechnen alle Glieder vernachlässigen, die zu höherer Ordnung unendlich klein sind, während die endlichen Bestandteile $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ links und $\cos\varphi$ rechts sich wegheben. So finden wir

$$\boldsymbol{a} \times \alpha\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \alpha\boldsymbol{a} = (\varepsilon + \varepsilon')\cos\varphi + \sigma\sin\varphi. \tag{6}$$

Zwei spezielle Fälle dieser Formel haben besonderes Interesse. Wenn wir $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, also $\varepsilon = \varepsilon'$, $\varphi = 0$ voraussetzen, erhalten wir

$$\varepsilon = \boldsymbol{a} \times \alpha\boldsymbol{a}. \tag{7}$$

Wenn wir zweitens $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, also $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$ annehmen, so ergibt sich

$$\sigma = \boldsymbol{a} \times \alpha\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \alpha\boldsymbol{a}. \tag{8}$$

Diese Formel lehrt die Ausweitung zweier zueinander senkrechten Geraden finden.

3. Die sechs Deformationskomponenten. Wir nehmen jetzt die Achsenrichtungen e_1, e_2, e_3 und bezeichnen mit a, b, c die linearen Dilatationskoeffizienten für diese Richtungen, so daß

$$a = e_1 \times \alpha e_1, \quad b = e_2 \times \alpha e_2, \quad c = e_3 \times \alpha e_3 \tag{9}$$

wird, und mit f, g, h die Ausweitungen je zweier der drei Richtungen, so daß

$$\left.\begin{aligned} f &= e_2 \times \alpha e_3 + e_3 \times \alpha e_2, \\ g &= e_3 \times \alpha e_1 + e_1 \times \alpha e_3, \\ h &= e_1 \times \alpha e_2 + e_2 \times \alpha e_1. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Die Kenntnis dieser sechs Größen für die unmittelbare Umgebung des Punktes P erlaubt zu bestimmen, wie sich ein Parallelepipedon, dessen Kanten den Achsen parallel sind, deformiert, und außerdem, wie wir sofort sehen werden, den linearen Dilatationskoeffizienten für eine beliebige Richtung und die Ausweitung für irgend zwei Richtungen zu finden. Deshalb heißen die sechs Größen (9) und (10) die **Deformationskomponenten** für den Punkt P.

Da zufolge (2) $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}$ die Komponenten von αe_1 sind usw., finden wir sofort

$$\left.\begin{aligned} &a = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad c = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ &f = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad g = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad h = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Wir wollen nun ε durch die sechs Deformationskomponenten ausdrücken. Setzen wir zu dem Zweck

$$a = l e_1 + m e_2 + n e_3,$$

bezeichnen also mit l, m, n die Richtungskosinus der Richtung a, so wird

$$\alpha a = l \cdot \alpha e_1 + m \cdot \alpha e_2 + n \cdot \alpha e_3,$$

und wenn wir diese Werte von a und αa in (7) substituieren und (9) und (10) beachten, ergibt sich

$$\varepsilon = a l^2 + b m^2 + c n^2 + f m n + g n l + h l m, \tag{12}$$

der Dilatationskoeffizient für die Richtung a ist also eine homogene quadratische Funktion der Richtungskosinus l, m, n und die Koeffizienten dieser Funktion

werden durch die sechs Deformationskomponenten gegeben.

Wenn wir in gleicher Weise annehmen

$$b = l'e_1 + m'e_2 + n'e_3, \quad \alpha b = l' \cdot \alpha e_1 + m' \cdot \alpha e_2 + n' \cdot \alpha e_3$$

und in (8) einsetzen, so finden wir sofort

$$\sigma = 2[all' + bmm' + cnn'] \\ + f(mn' + m'n) + g(nl' + n'l) + h(lm' + l'm), \quad (13)$$

die Ausweitung zweier zu einander senkrechter Geraden ist also eine bilineare Funktion der Richtungskosinus dieser Geraden, und die Koeffizienten dieser bilinearen Funktion werden wieder durch die sechs Deformationskomponenten gegeben.

Daraus kann man schließen, daß, wenn für den Punkt P

$$a, b, c, f, g, h = 0$$

sind, die Geraden keine Dilatationen und Ausweitungen erleiden. Die Umgebung von P verhält sich also wie ein starrer Körper, mit anderen Worten: das Verschwinden der sämtlichen Deformationskomponenten bedeutet, daß die Umgebung von P keine Deformation im eigentlichen Sinne des Wortes erleidet, sondern sich höchstens wie ein starrer Körper im Raume verschiebt.

4. Zerlegung der Deformationen. Um schließlich zu einer klaren Vorstellung von der Art, wie die Deformation der Umgebung von P vor sich geht, zu gelangen, gehen wir von einer Formel aus, die schon im ersten Bande abgeleitet ist.

Wenn der Vektor s eine Funktion des Punktes P ist, so findet man für irgend zwei Verrückungen dP und δP des Punktes P:

$$\operatorname{rot} s \wedge dP \times \delta P = ds \times \delta P - \delta s \times dP \quad (14)$$

[Bd. I, Kap. II, Formel (20)]. Ist dann α die im vorigen Paragraphen definierte Operation, sind ferner a und b zwei zu dP und δP parallele Einheitsvektoren, derart, daß

$$dP = ma, \quad \delta P = nb$$

ist, so haben wir

$$ds = \alpha(dP) = m\alpha\boldsymbol{a}, \quad \delta s = \alpha(\delta P) = n\alpha\boldsymbol{b};$$

setzen wir dies in (14) ein und teilen durch mn, so ergibt sich

$$\text{rot}\, s \wedge \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \alpha\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \times \alpha\boldsymbol{b}. \tag{15}$$

Wir wollen nun damit beginnen, daß wir zunächst die Umgebung von P als starr voraussetzen. Dann gilt für die Geschwindigkeit des Punktes M zur Zeit t die Formel

$$\dot{M} = \dot{P} + \Omega \wedge (M - P)$$

[vgl. im ersten Bande Kap. V, Formel (6)]. Multiplizieren wir mit einer sehr kleinen Zeit τ, so können wir annehmen, daß $\tau\dot{M}$, $\tau\dot{P}$ die Verrückungen $M_1 - M$, $P_1 - P = s$ der Punkte M und P sind; wir finden dann

$$M_1 - M = s + \Omega \wedge (M - P), \tag{16}$$

indem wir Ω für $\tau\Omega$ schreiben.

Wir nehmen nun für den Punkt M den Punkt $P + dP$, die Verrückung $M_1 - M$ von M ist dann $s + ds$, mithin liefert (16)

$$ds = \Omega \wedge dP.$$

In genau analoger Weise ergibt sich für eine Verrückung δP

$$\delta s = \Omega \wedge \delta P.$$

Setzen wir diese Werte in (14) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\text{rot}\, s \wedge dP \times \delta P &= \Omega \wedge dP \times \delta P - \Omega \wedge \delta P \times dP \\ &= 2\Omega \wedge dP \times \delta P,\end{aligned}$$

und somit

$$\Omega = \tfrac{1}{2}\,\text{rot}\, s,$$

wodurch die Gleichung (16) übergeht in

$$M_1 - M = s + \tfrac{1}{2}\,\text{rot}\, s \wedge \boldsymbol{a}, \tag{17}$$

wenn $\boldsymbol{a} = M - P$. Diese Gleichung gilt aber, wie gesagt, nur für den Fall einer starren Umgebung.

Wenn die Umgebung von P deformierbar ist, so gilt die Gleichung (1). Wollen wir nun aus einer solchen Deformation eine Verschiebung der als starr vorausgesetzten Umgebung herausheben, so liegt es nahe zu setzen

$$M_1 - M = s + \alpha a = s + \tfrac{1}{2}\operatorname{rot} s \wedge a + \beta a$$

oder

$$\alpha a = \tfrac{1}{2}\operatorname{rot} s \wedge a + \beta a. \tag{18}$$

Wir zerlegen so die Deformation in die bloße Ortsänderung eines starren Körpers und eine besondere, durch βa dargestellte Deformation, die als eine reine Deformation (pure strain) bezeichnet wird.

Wir wollen uns nun weiter mit dieser letzteren beschäftigen. Wir können aus (18) sofort ableiten:

$$a \times \alpha a = a \times \beta a,$$

und weiter, indem wir (18) mit einem anderen Vektor b skalar multiplizieren und (15) beachten,

$$b \times \beta a = a \times \beta b, \tag{19}$$

endlich, indem wir dieselbe Gleichung (18) noch einmal für den Vektor b bilden und über Kreuz mit den Vektoren a und b skalar multiplizieren,

$$a \times \alpha b + b \times \alpha a = a \times \beta b + b \times \beta a = 2a \times \beta b.$$

Erinnern wir uns dann an die Formeln (7) und (8), so sehen wir, daß wir für die Berechnung von ε und σ die Deformation β statt der Deformation α benutzen können.

Wir wollen schließlich setzen

$$2\varphi = a \times \alpha a = (M - P) \times \beta(M - P) \tag{20}$$

und φ als Funktion von M betrachten. Die Form von 2φ ist dieselbe wie die von ε, wir finden also analog zu (12)

$$2\varphi = a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + f\eta\zeta + g\zeta\xi + h\xi\eta. \tag{21}$$

Differenzieren wir (20) nach M, so wird

$$2d\varphi = dM \times \beta(M - P) + (M - P) \times d\{\beta(M - P)\}.$$

Es ist aber

$$d\{\beta(M-P)\} = \beta(dM),\ (M-P) \times \beta(dM) = dM \times \beta(M-P),$$

das letztere zufolge (19), mithin wird

$$d\varphi = \beta(M - P) \times dM, \tag{22}$$

und diese Gleichung drückt aus, daß

$$\beta a = \beta(M - P) = \operatorname{grad} \varphi. \tag{23}$$

Man sagt kurzerhand, daß die reine Deformation ein Potential φ besitzt.

Die Flächen zweiter Ordnung

$$\varphi = \text{konst.} \tag{24}$$

heißen Dilatationsflächen; ihr Mittelpunkt liegt in dem Punkte P, der bei der reinen Deformation unverrückt bleibt. Denken wir uns die Verschiebung dM in der durch M gehenden Deformationsfläche genommen, so wird $d\varphi = 0$ und zufolge (22) $\beta(M-P)$ senkrecht zu dM, der Deformationsvektor $\beta(M-P)$ steht also auf der Deformationsfläche senkrecht. Bei einer reinen Deformation verschieben sich die Punkte der Umgebung von P senkrecht zu den Deformationsflächen, auf denen sie liegen.

Die Punkte auf den gemeinsamen Hauptachsen der Deformationsflächen verschieben sich daher längs dieser Achsen selbst. Beziehen wir die Gleichung der Deformationsflächen auf diese Hauptachsen, nehmen wir also die Grundvektoren e_1, e_2, e_3 zu diesen Achsen parallel an, so wird $f, g, h = 0$ und mithin

$$2\varphi = a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2,$$

folglich nach (23)

$$\beta(M-P) = a\xi e_1 + b\eta e_2 + c\zeta e_3.$$

Die einzelnen Glieder der rechten Seite lassen sich aber deuten als drei besondere Deformationen, bei denen sich alle Punkte parallel zu einer der Hauptachsen und zwar um eine Strecke, die proportional ist ihrem Abstande von der Ebene der beiden anderen Hauptachsen, verschieben. Eine solche besondere Deformation bezeichnen wir als eine einfache Dehnung. So finden wir:

Die allgemeinste infinitesimale Deformation der Umgebung eines Punktes in einem deformierbaren Körper besteht aus einer einfachen Ortsänderung, welche die ganze Umgebung wie ein starrer Körper erleidet, und einer reinen Deformation. Die reine Deformation selbst aber setzt sich wieder zusammen aus drei einfachen Dehnungen nach drei zu einander

senkrechten Richtungen. Die in diesen Richtungen durch P gezogenen Geraden heißen die Hauptachsen der Umgebung von P, a, b, c die Hauptdilatationskoeffizienten.

Um die Deformationsflächen zu untersuchen, geht man zweckmäßig von ihrem Asymptotenkegel aus, dessen Gleichung lautet

$$\boldsymbol{a} \times \alpha \boldsymbol{a} = 0.$$

Die den Mantellinien dieses Kegels parallelen Richtungen haben nach (7) verschwindende Dilatationskoeffizienten, deshalb heißt der Kegel der Nullkegel der Deformation. Wenn er imaginär ist, so sind die Deformationsflächen Ellipsoide und der Dilatationskoeffizient hat für alle Richtungen dasselbe Vorzeichen, es erfahren also entweder alle Geraden eine Ausdehnung oder alle eine Verkürzung. Wenn hingegen der Nullkegel reell ist, so werden die Deformationsflächen ein- und zweischalige Hyperboloide und der Nullkegel trennt ein Gebiet, in dem Verkürzung stattfindet, von einem Gebiete, in dem die Linienelemente verlängert werden.

Die definitive Formel für die allgemeine Deformation lautet jetzt

$$\boldsymbol{M}_1 - \boldsymbol{M} = \boldsymbol{s} + \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{s} \wedge \boldsymbol{a} + \operatorname{grad} \varphi.$$

Um sie in kartesischer Form zu schreiben, beachten wir, daß die Komponenten von $\boldsymbol{s}$ die Verschiebungskomponenten u, v, w von P waren, ferner finden wir für die Komponenten von $\frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{s}$ die Werte

$$p = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad q = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad r = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{25}$$

endlich folgt aus (21) für die Komponenten von $\operatorname{grad} \varphi$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = a\xi + \tfrac{1}{2}h\eta + \tfrac{1}{2}g\zeta \quad \text{usw.}$$

So finden wir für die Komponenten $\xi_1 - \xi$, $\eta_1 - \eta$, $\zeta_1 - \zeta$ von $\boldsymbol{M}_1 - \boldsymbol{M}$ die Werte

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 - \xi &= (u + q\zeta - r\eta) + (a\xi + \tfrac{1}{2}h\eta + \tfrac{1}{2}g\zeta), \\ \eta_1 - \eta &= (v + r\xi - p\zeta) + (\tfrac{1}{2}h\xi + b\eta + \tfrac{1}{2}f\zeta), \\ \zeta_1 - \zeta &= (w + p\eta - q\xi) + (\tfrac{1}{2}g\xi + \tfrac{1}{2}f\eta + c\zeta). \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Diese Gleichungen sind gleichbedeutend mit den Gleichungen

(2), wie man sofort sieht, wenn man die Werte der Koeffizienten $p, q, r, a, b, \ldots$ aus (25) und (11) einsetzt.

5. Räumlicher Dilatationskoeffizient. Wir betrachten ein Parallelepiped mit den Kanten $\mu_1 e_1, \mu_2 e_2, \mu_3 e_3$; durch die Deformation geht es über in ein Parallelepiped mit den Kanten $\mu_1(e_1 + \alpha e_1)$ usw. Das Volumen dieses Parallelepipeds ist

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 (e_1 + \alpha e_1) \wedge (e_2 + \alpha e_2) \times (e_3 + \alpha e_3),$$

das Volumen des ursprünglichen Parallelepipeds dagegen $\mu_1 \mu_2 \mu_3$. Wir definieren nun den räumlichen Dilatationskoeffizienten Θ durch die Gleichung

$$\Theta = (e_1 + \alpha e_1) \wedge (e_2 + \alpha e_2) \times (e_3 + \alpha e_3) - 1,$$

er drückt das Verhältnis der Volumenänderung zu dem ursprünglichen Volumen für das angenommene Parallelepiped und auch für jedes andere Parallelepiped aus der Umgebung von P aus.

Bei dem von uns beobachteten Grade der Annäherung haben wir bei der Ausrechnung von Θ alle Glieder zu vernachlässigen, die mehr als ein α enthalten und finden

$$\Theta = \alpha e_1 \wedge e_2 \times e_3 + \alpha e_2 \wedge e_3 \times e_1 + \alpha e_3 \wedge e_1 \times e_2.$$

Es wird aber

$$\alpha e_1 \wedge e_2 \times e_3 = \alpha e_1 \times e_2 \wedge e_3 = \alpha e_1 \times e_1 = a \text{ usw.}$$

[vgl. (9)] und mithin

$$\Theta = a + b + c. \tag{27}$$

Der räumliche Dilatationskoeffizient ist die Summe der linearen Dilatationskoeffizienten für irgend drei zu einander rechtwinklige Achsen.

Da

$$a + b + c = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

ist und die rechte Seite dieser Gleichung die Divergenz des Vektors s, dessen Komponenten u, v, w waren, darstellt, wird

$$\Theta = \operatorname{div} s, \tag{28}$$

der räumliche Dilatationskoeffizient ist die Divergenz der Verrückung des Punktes P. Er heißt die lineare Deformationsinvariante und ist eine Invariante der Transformation α, die mit $I_1 \alpha$ bezeichnet wird.

Wir können auch zeigen, daß

$$I_2\alpha = (bc - \tfrac{1}{4}f^2) + (ca - \tfrac{1}{4}g^2) + (ab - \tfrac{1}{4}h^2)$$

eine quadratische Invariante von α ist, und endlich, daß die Diskriminante von φ eine kubische Invariante $I_3\alpha$ ist.[1])

Übungsbeispiele.

1. Aufgabe. *Zu untersuchen, wie sich bei der Deformation die Dilatationsflächen transformieren.*

Auflösung. Wir legen das Tripel der Hauptachsen für die Umgebung des Punktes P zugrunde und nennen a_0, b_0, c_0 die zugehörigen Hauptdilatationskoeffizienten. Die Dilatationsflächen haben dann die Gleichung

$$a_0x^2 + b_0y^2 + c_0z^2 = \text{konst.}$$

Anderseits wird ein Punkt M mit den Koordinaten x, y, z in einen Punkt M' transformiert, dessen Koordinaten x', y', z' aus den Gleichungen

$$x' = x(1 + a_0), \quad y' = y(1 + b_0), \quad z' = z(1 + c_0)$$

hervorgehen. Demnach gehen die Gleichungen der Dilatationsflächen über in

$$\frac{a_0x'^2}{(1+a_0)^2} + \frac{b_0y'^2}{(1+b_0)^2} + \frac{c_0z'^2}{(1+c_0)^2} = \text{konst.}$$

Mit dem hier beobachteten Grade der Annäherung wird aber

$$(1 + a_0)^2 = 1 + 2a_0, \quad (1 + b_0)^2 = 1 + 2b_0, \quad (1 + c_0)^2 = 1 + 2c_0.$$

Demnach erhalten, wenn die Konstante $= 1$, für die transformierte Dilatationsfläche die Quadrate der Halbachsen die Werte

$$\frac{1}{a_0} + 2, \quad \frac{1}{b_0} + 2, \quad \frac{1}{c_0} + 2,$$

und da für die ursprüngliche Fläche die Quadrate der Halbachsen $\frac{1}{a_0}, \frac{1}{b_0}, \frac{1}{c_0}$ sind, ergibt sich, daß die Dilatationsflächen sich in konfokale Flächen transformieren.

Man sieht auch leicht, daß die Kugel mit dem Radius 1

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

1) Cauchy (Exercices de Math. 1827; Œuvr. (2) t. VII, p. 82) hat die Dilatationsflächen und die Hauptachsen der Umgebung von P behandelt. Die allgemeine Zerlegung der Deformationen stammt von Helmholtz (Journ. für Mathem. Bd. 55, S. 22 (1858)).

sich in ein Ellipsoid mit den Halbachsen $1 + a_0$, $1 + b_0$, $1 + c_0$ transformiert, und daß umgekehrt das Ellipsoid

$$(1 + a_0)^2 x^2 + (1 + b_0)^2 y^2 + (1 + c_0)^2 z^2 = 1,$$

dessen Halbachsen $\frac{1}{1+a_0}$, $\frac{1}{1+b_0}$, $\frac{1}{1+c_0}$ sind, in eine Kugel mit dem Radius 1 übergeht.

2. Aufgabe. *Auf analytischem Wege zu beweisen, daß, wenn in dem ganzen von einem Körper eingenommenen Raum die sechs Deformationskomponenten stets verschwinden, der Körper starr ist.*

Auflösung. Unter der angegebenen Voraussetzung haben wir für jeden Punkt des Körpers

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Wir können die letzten drei Gleichungen, die erste nach x, die zweite nach y, die dritte nach z differenzieren; wenn wir dann von der Summe der beiden ersten so gewonnenen Gleichungen die dritte subtrahieren, erhalten wir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$$

Aus der ersten der sechs Gleichungen (a) folgt aber sofort auch

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0.$$

Differenzieren wir endlich die zweite Gleichung (a) nach x und ziehen sie von der nach y differenzierten sechsten Gleichung ab, so finden wir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

So erkennen wir schließlich, daß alle zweiten Derivierten von u, v, w Null sind. Es muß also sein

$$\begin{aligned} u &= u_0 + ax + by + cz, \\ v &= v_0 + a'x + b'y + c'z, \\ w &= w_0 + a''x + b''y + c''z. \end{aligned}$$

Aus den sechs Gleichungen (a) folgt dann aber weiter

$$a = 0, \quad b' = 0, \quad c'' = 0,$$
$$b'' + c' = 0, \quad c + a'' = 0, \quad a' + b = 0.$$

Wenn wir demnach setzen

$$b'' = -c' = p, \quad c = -a'' = q, \quad a' = -b = r,$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} u &= u_0 + qz - ry, \\ v &= v_0 + rx - pz, \\ w &= w_0 + py - qx. \end{aligned}$$

Dies sind aber die Formeln für die Verrückungen eines starren Körpers.

3. Aufgabe. *Zu beweisen, daß zwei Deformationen, welche dieselben Komponenten besitzen, sich nur um eine einfache Bewegung unterscheiden.*

Auflösung. Seien u, v, w und u'', v'', w'' die Verrückungskomponenten bei den beiden Deformationen und sei

$$u = u' - u'', \quad v = v' - v'', \quad w = w' - w''$$

gesetzt, so folgt aus

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\partial u''}{\partial x}, \cdots, \frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z} = \frac{\partial w''}{\partial y} + \frac{\partial v''}{\partial z}, \cdots$$

sofort

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \cdots, \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \cdots$$

und mithin nach der vorigen Aufgabe

$$u = u_0 + qz - ry, \cdots$$

4. Aufgabe. *Die Beziehungen zwischen den Deformationskomponenten zu finden, die notwendig und hinreichend sind, damit diesen Komponenten eine mögliche Deformation des Körpers entspreche.*

Auflösung. Wir setzen die sechs Komponenten a, b, c, f, g, h als gegeben voraus und betrachten mit ihnen zusammen die drei Komponenten p, q, r der auf die Umgebung des Punktes P bezüglichen Rotation. Wir finden sofort, daß

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \tfrac{1}{2}h - r, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \tfrac{1}{2}g + q$$

wird und mithin

$$du = a\,dx + (\tfrac{1}{2}h - r)dy + (\tfrac{1}{2}g + q)dz.$$

Damit die rechte Seite ein exaktes Differential wird, d. h. damit die Funktion u existiert, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\tfrac{1}{2}h - r\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\tfrac{1}{2}g + q\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{1}{2}g + q\right) = \frac{\partial a}{\partial z},$$
$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{1}{2}h - r\right).$$

Da aber

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0,$$

findet man aus den vorstehenden Gleichungen

$$2\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial z},\ 2\frac{\partial q}{\partial x} = 2\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial x},\ 2\frac{\partial r}{\partial z} = -2\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Auf dieselbe Weise erhält man

$$2\frac{\partial p}{\partial y} = -2\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y},\ 2\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x},\qquad 2\frac{\partial r}{\partial y} = 2\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y},$$
$$2\frac{\partial p}{\partial z} = 2\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z},\qquad 2\frac{\partial q}{\partial z} = -2\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z},\ 2\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Indem man durch erneutes Differenzieren aus je zweien dieser Gleichungen p, q oder r eliminiert, erhält man neue Gleichungen, von denen die drei durch Elimination von p entstehenden sind:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(-2\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial z}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Beim Ausdifferenzieren der Klammern erkennt man aber sofort, daß sich auf diese Weise im ganzen sechs Gleichungen ergeben und zwar lauten diese:

$$\frac{\partial^2 b}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y},\quad 2\frac{\partial^2 a}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z},\quad 2\frac{\partial^2 b}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x},\quad 2\frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial z}\right).$$

Achtes Kapitel.

Statik der deformierbaren Körper.

1. Innere Druckkräfte. Wir haben schon gesagt, daß ein Körper sich unter dem Einfluß von Kräften, die auf sein Inneres und auf seine Oberfläche (als Druck- oder Zugkräfte) wirken, in bestimmter Weise deformiert.

Wir nehmen an, daß ein bestimmter Körper, nachdem er eine Deformation erfahren, wieder einen Zustand des Gleichgewichts erreicht habe. Wenn wir durch ihn einen Schnitt, z. B. einen ebenen, führen und so den Körper in zwei Teile A und B zerlegen, von denen wir uns den einen A weggenommen denken, so wird das Gleichgewicht nicht mehr bestehen. Wir wollen nun aber, wie wir es im Falle des Gleichgewichts eines Fadens oder einer Flüssigkeitsmenge schon getan haben, das folgende Postulat der inneren Druckkräfte voraussetzen:

Das zerstörte Gleichgewicht läßt sich dadurch wieder herstellen, daß man gewisse über die Punkte der Schnittfläche verteilte Kräfte hinzufügt. Diese Kräfte heißen die inneren Druckkräfte für die Schnittfläche.

Es sei P ein Punkt der Schnittfläche, den wir beliebig annehmen wollen, $d\sigma$ ein Oberflächenelement, dem P angehört, $\boldsymbol{n}$ ein Einheitsvektor, der zu $d\sigma$ senkrecht und nach dem nicht abgeschnittenen Teil zu gerichtet ist. Der innere Druck auf das Flächenelement $d\sigma$ wird von derselben Ordnung unendlich klein sein wie $d\sigma$; wir wollen keinerlei Voraussetzung über seine Richtung machen, es ist aber einleuchtend, daß er von der Lage des Punktes P und von der Orientierung des Ele-

mentes $d\sigma$, also von $\boldsymbol{n}$ abhängen wird. Wir wollen ihn, als Vektor aufgefaßt, mit $\boldsymbol{F}_n d\sigma$ bezeichnen, wobei der Modul des Vektors $\boldsymbol{F}_n$ im allgemeinen endlich sein wird.

In dem Falle der Flüssigkeiten fällt diese Kraft zusammen mit der, die man schlechtweg als Druck bezeichnet, und ist beständig senkrecht zu dem Flächenelement $d\sigma$. Aber dies tritt im allgemeinen für einen deformierbaren, z. B. einen festen elastischen Körper nicht mehr ein. Die Komponente von $\boldsymbol{F}_n$ nach $\boldsymbol{n}$ kann in die Richtung von $\boldsymbol{n}$ oder in die entgegengesetzte Richtung fallen oder endlich Null sein. Im ersten Falle sprechen wir von einer eigentlichen Druckkraft, im zweiten Falle von einer Zugkraft, im dritten von einer Scherkraft.

Wir wollen schließlich als Erfahrungstatsache annehmen, daß die Kraft $\boldsymbol{F}_n$ mit dem Punkte P sich kontinuierlich ändert und eine differenzierbare Funktion des Ortes ist.

Wir können dann zwei grundlegende Eigenschaften dieser Druckkräfte beweisen. Die erste spricht sich aus in dem folgenden

Theorem: Die inneren Druckkräfte entsprechen dem Reaktionsprinzip.

Mit anderen Worten, die Kraft, die an dem Flächenelement $d\sigma$ angreift, wenn man den Teil A fortnimmt, ist entgegengesetzt gleich der Kraft, die an demselben Flächenelement angreift, wenn man den Teil B wegnimmt. Zum Beweis denken wir uns einen Zylinder, dessen Seitenlinien durch eine beliebige geschlossene Kurve auf der Schnittfläche σ gehen und zu dieser Fläche senkrecht sind; wir nennen σ' und σ'' die Grundflächen, σ_1 die Mantelfläche dieses Zylinders; $\boldsymbol{n}', \boldsymbol{n}'', \boldsymbol{n}_1$ seien drei Einheitsvektoren, die der Reihe nach zu einem Element von $\sigma', \sigma'', \sigma_1$ senkrecht und nach dem Innern des Zylinders gerichtet sind, schließlich seien $\boldsymbol{F}_{n'}, \boldsymbol{F}_{n''}, \boldsymbol{F}_{n_1}$ die Vektoren der Druckkräfte für je einen Punkt der drei Flächenelemente. Wenn wir uns diesen Zylinder abgetrennt denken, so bleibt er nach dem angenommenen Axiom im Gleichgewicht unter der Einwirkung der über seine Oberfläche verteilten Druckkräfte

und der an seinem Innern angreifenden äußeren Kräfte; es muß also die erste Vektorgleichung für das Gleichgewicht an dem starr gedachten Zylinder erfüllt sein; ist daher F die auf die Masseneinheit bezogene äußere Kraft, ϱ die Dichtigkeit für das Volumenelement $d\tau$ des Zylinders[1]), so müssen wir haben

$$\int F_{n'} d\sigma' + \int F_{n''} d\sigma'' + \int F_{n_1} d\sigma_1 + \int \varrho F d\tau = 0.$$

Lassen wir nun σ' und σ'' sich unbegrenzt nähern, dann folgt, da F_{n_1} und F nach Voraussetzung endlich bleiben, σ_1 und das Zylindervolumen τ dagegen nach Null konvergieren, wenn schließlich $\sigma' = \sigma''$,

$$\int (F_{n'} + F_{n''}) d\sigma' = 0;$$

da diese Gleichung aber für jedes Stück der Schnittfläche erfüllt sein muß, ergibt sich, indem nun $n' = n$, $n'' = -n$ wird, allgemein

$$F_n = -F_{-n},$$

und das Theorem ist so bewiesen.

2. Der Cauchysche Fundamentalsatz. Die zweite Eigenschaft, die wir beweisen wollen, besteht in folgendem. Es sei O ein Punkt im Innern des Körpers und Ursprung eines rechtwinkligen Achsentripels, in dessen Richtungen die Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 fallen. Wir schneiden dies Achsentripel in drei Punkten A, B, C mit einer Ebene und setzen dabei voraus, daß das ganze Tetraeder $OABC$ im Innern des Körpers liegt; wir trennen es dann nach dem Verfahren des vorigen Paragraphen von dem Körper ab. In der Seitenfläche ABC sei M ein willkürlicher Punkt, der einem Flächenelement $d\sigma$ angehört; es sei F_n' der Druckvektor für dieses Flächenelement, indem n einen zu der Ebene ABC senkrechten und nach dem Tetraederinnern gerichteten Einheitsvektor bezeichnet. Wir nennen M_1 die Projektion von M auf die Ebene BOC, $d\sigma_1$

1) Wir bezeichnen in diesem Kapitel die Dichtigkeit mit ϱ, weil der früher gebrauchte Buchstabe μ hier einer anderen Größe, nämlich einer Elastizitätskonstanten, vorbehalten bleibt.

die Projektion von $d\sigma$ auf dieselbe Ebene; wir können dann mit F_{e_1}' den Druckvektor für das Element $d\sigma_1$ bezeichnen. Dasselbe führen wir auch für die letzten beiden Seitenflächen aus. Wir betrachten der Einfachheit wegen nur den Fall, wo A, B, C auf den positiven Seiten der Achsen liegen.

Die erste Gleichgewichtsbedingung für das erstarrt gedachte Tetraeder liefert uns nun

$$\int F_n' d\sigma + \int F_{e_1}' d\sigma_1 + \int F_{e_2}' d\sigma_2 + \int F_{e_3}' d\sigma_3 + \int \varrho F d\tau = 0$$

Es wird aber, wenn wir beachten, daß der Winkel (n, e_1) ein stumpfer ist,

$$d\sigma_1 = -d\sigma \cos(n, e_1) \text{ usw.}$$

mithin liefert die vorstehende Gleichung

$$\int \{F_n' - F_{e_1}' \cos(n, e_1) - F_{e_2}' \cos(n, e_2) - F_{e_3}' \cos(n, e_3)\} d\sigma \\ + \int \varrho F d\tau = 0.$$

Wir können nun immer

$$F_n' = F_n + \delta F_n$$

setzen, indem wir mit F_n den Druckvektor für ein an der Stelle O befindliches und zu der Ebene ABC, also auch zu $d\sigma$ paralleles Flächenelement bezeichnen. Analog setzen wir auch

$$F_{e_1}' = F_{e_1} + \delta F_{e_1}, \quad F_{e_2}' = F_{e_2} + \delta F_{e_2}, \quad F_{e_3}' = F_{e_3} + \delta F_{e_3}.$$

Dann ergibt sich, indem F_n, F_{e_1}, F_{e_2}, F_{e_3} vor das Integralzeichen treten, wenn σ den Flächeninhalt des Dreiecks ABC, h den Abstand seiner Ebene von O, also $\tau = \frac{1}{3}\sigma h$ das Tetraedervolumen bezeichnet,

$$F_n - F_{e_1} \cos(n, e_1) - F_{e_2} \cos(n, e_2) - F_{e_3} \cos(n, e_3) \\ + \frac{1}{\sigma} \int \{\delta F_n - \delta F_{e_1} \cos(n, e_1) - \cdots\} d\sigma + \frac{4h}{3\tau} \int \varrho F d\tau = 0.$$

Gehen wir nun zur Grenze über, indem wir das Volumen des Tetraeders kleiner und kleiner werden lassen, so streben die Integralausdrücke in der vorstehenden Gleichung der Null zu, denn δF_n, $\delta F_{e_1} \ldots$ und h tun es; beachten wir nun noch, daß

$\frac{1}{\tau}\int \varrho \boldsymbol{F} d\tau$ eine endliche Grenze hat, so behalten wir schließlich übrig

$$\boldsymbol{F}_n = \boldsymbol{F}_{e_1} \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{e}_1) + \boldsymbol{F}_{e_2} \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{e}_2) + \boldsymbol{F}_{e_3} \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{e}_3), \quad (1)$$

wobei sich jetzt alle Terme auf den Punkt O und eine Fläche mit der Normalen $\boldsymbol{n}$ beziehen.

Wir bezeichnen mit X_n, Y_n, Z_n die orthogonalen Komponenten von $\boldsymbol{F}_n$, die von $\boldsymbol{F}_{e_1}$ mit X_x, Y_x, Z_x, die von $\boldsymbol{F}_{e_2}$ mit X_y, Y_y, Z_y, die von $\boldsymbol{F}_{e_3}$ mit X_z, Y_z, Z_z, indem wir x, y, z auf die durch die Vektoren $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ gegebenen Achsen beziehen, Wir nennen die so gefundenen Komponenten die speziellen Druckkomponenten für den Punkt O und das Achsentripel x, y, z.

Bezeichnen wir dann weiter der Kürze halber die Richtungskosinus des Vektors $\boldsymbol{n}$ einfach mit α, β, γ, so zerfällt die Gleichung (1) in die folgenden Cauchyschen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} X_n &= \alpha X_x + \beta X_y + \gamma X_z, \\ Y_n &= \alpha Y_x + \beta Y_y + \gamma Y_z, \\ Z_n &= \alpha Z_x + \beta Z_y + \gamma Z_z. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Für eine bestimmte Orientierung der Bezugsachsen sind die speziellen Druckkomponenten nur Funktionen des Punktes O und von den Richtungskosinus α, β, γ unabhängig. Wir können somit den Satz aufstellen:

Die orthogonalen Komponenten des auf ein ebenes Flächenelement ausgeübten Druckes sind homogene lineare Funktionen von den Richtungskosinus der Normalen dieses Flächenelementes. Dieser Satz zeigt, in welcher Weise die Druckkomponenten von α, β, γ abhängen.

Indem wir hier auf die Betrachtungen des vorigen Kapitels zurückgreifen, können wir sagen, daß $\boldsymbol{F}_n$ aus dem Vektor $\boldsymbol{n}$ durch eine lineare Transformation hervorgeht, deren Koeffizienten Funktionen des Ortes sind. Nennen wir diese Transformation σ, so können wir schreiben

$$\boldsymbol{F}_n = \sigma \boldsymbol{n}. \quad (3)$$

Diese Gleichung können wir auch an die Stelle von (2) treten lassen.

3. Die unbestimmten Gleichgewichtsbedingungen eines deformierbaren Körpers. Ohne noch irgendeine besondere Voraussetzung über die physikalische Beschaffenheit des Körpers zu machen, können wir nach dem in der Hydrostatik befolgten Verfahren die Gleichgewichtsbedingungen finden. Wir denken uns von dem Körper, den wir im Gleichgewicht voraussetzen, ein Volumen τ mit der Oberfläche σ abgetrennt; die erste Gleichgewichtsbedingung für dieses Stück, wenn wir es uns erstarrt denken, liefert

$$\int \varrho \mathbf{F} d\tau + \int \mathbf{F}_n d\sigma = 0,$$

demnach wird für die Komponente nach der x-Achse

$$\int \varrho X d\tau + \int X_n d\sigma = 0.$$

Aber nach der ersten Gleichung (2) wird

$$\int X_n d\sigma = \int (X_x \alpha + X_y \beta + X_z \gamma) d\sigma$$
$$= -\int \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) d\tau$$

(vgl. Bd. I, S. 48). Setzen wir dies in die vorhergehende Gleichung ein, so erhalten wir

$$\int \left(\varrho X - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) d\tau = 0,$$

und da τ ein willkürliches Stück des Körpers ist und noch zwei analoge Gleichungen hinzutreten, finden wir:

$$\left.\begin{aligned} \varrho X &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}, \\ \varrho Y &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \\ \varrho Z &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Es ist zu beachten, daß die durch (2) gegebene lineare Transformation von α, β, γ, die wir symbolisch mit σ bezeich-

net haben, durch die in (4) wieder vorkommenden neun Größen $X_x, \ldots Z_z$ festgelegt wird, ferner, daß die Form der rechten Seiten dieser Gleichungen (4) bei einer Veränderung des Koordinatensystems dieselbe bleibt; es ist daher der Vektor, dessen Komponenten die rechten Seiten von (4) sind, unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems und ferner vollständig bestimmt durch die Transformation σ. Wir schreiben ihn

$$\operatorname{grad} \sigma$$

(lies Gradient von σ); er umfaßt in der Tat, wie wir noch sehen werden, als Spezialfall den Gradienten einer skalaren Ortsfunktion. Die Gleichungen (4) nehmen dann die einfache vektorielle Form an

$$\varrho F = \operatorname{grad} \sigma. \tag{5}$$

Wir müssen jetzt auch die zweite Gleichgewichtsbedingung, die Momentengleichung, in Betracht ziehen. Bezeichnen wir mit P einen veränderlichen Punkt, der entweder dem Innern τ des abgetrennten Stückes oder seiner Oberfläche σ angehört, so haben wir

$$\int \varrho (P - O) \wedge F d\tau + \int (P - O) \wedge F_n d\sigma = 0.$$

Nehmen wir die Komponente nach der x-Achse, so folgt

$$\int \varrho (yZ - zY) d\tau + \int (yZ_n - zY_n) d\sigma = 0.$$

Verfahren wir wieder genau so wie vorhin, so gelangen wir von hier aus zu der Gleichung

$$\begin{aligned} \varrho(yZ - zY) &= \frac{\partial(yZ_x - zY_x)}{\partial x} + \frac{\partial(yZ_y - zY_y)}{\partial y} + \frac{\partial(yZ_z - zZ_y)}{\partial z} \\ &= y\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right) - z\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial y}\right) \\ &\quad + Z_y - Y_z, \end{aligned}$$

und zufolge (4) verwandelt sich dies in die einfache Gleichung

$$Y_z = Z_y.$$

Wir haben so, wenn wir die analogen Gleichungen hinzufügen, die neuen Bedingungen

$$Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z, \quad X_y = Y_x. \tag{6}$$

Diese Gleichungen sagen aus, daß die speziellen Druckkomponenten sich allgemein auf sechs reduzieren. Die Gleichungen (4) und (6) müssen für jeden inneren Punkt des Körpers erfüllt sein und heißen seine unbestimmten Gleichgewichtsbedingungen. Die Gleichungen (6) drücken eine Symmetrieeigenschaft der Gleichungen (4) und damit auch der Transformation σ aus. Man sagt, daß σ eine symmetrische lineare Transformation oder eine reine Deformation ist. Sie ist in der Tat von derselben Art wie die im vorigen Kapitel mit β bezeichneten Transformationen.

Die Gleichungen (2) müssen auch für die Oberfläche des Körpers gelten, wenn X_n, Y_n, Z_n die Komponenten des auf diese Oberfläche ausgeübten Drucks bezeichnen; sie heißen in dieser Bedeutung die Oberflächen- oder Grenzbedingungen.

4. Druckflächen. Laméscbes Ellipsoid. Hauptebenen. Die vorstehenden Entwicklungen lassen sich auf einfache Art geometrisch deuten. Wir wollen zunächst beachten, daß wenn $\boldsymbol{n}'$ ein neuer Einheitsvektor mit den Richtungskosinus α', β', γ' ist, aus den Gleichungen (2) mit Rücksicht auf (6) unmittelbar folgt

$$\boldsymbol{n}' \times \boldsymbol{F}_n = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{F}_{n'}, \tag{7}$$

d. h. die Projektion des Druckvektors für ein Flächenelement mit der Normale $\boldsymbol{n}'$ auf die Normale $\boldsymbol{n}$ ist gleich der Projektion des Druckvektors für ein Flächenelement mit der Normale $\boldsymbol{n}$ auf die Normale $\boldsymbol{n}'$.

Wir betrachten nun die homogene quadratische Funktion von α, β, γ

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{F}_n = \boldsymbol{n} \times \sigma \boldsymbol{n} = 2\varphi;$$

sie bedeutet die Normalkomponente des Druckes. Wir setzen ferner

$$\boldsymbol{n} = N - 0$$

und nennen Druckflächen die Flächen zweiter Ordnung, deren Gleichung, wenn wir uns statt α, β, γ die Punktkoordinaten x, y, z von N eingesetzt denken, die Form hat

$$\varphi = \text{konst.} \tag{8}$$

Die Richtung des Druckes ist zu der Ebenenstellung des zugehörigen Flächenelementes konjugiert bezüg-

lich dieser Druckflächen. Durch Differentiation finden wir nämlich

$$dn \times \sigma n + n \times \sigma(dn) = 2d\varphi;$$

schreiben wir aber (7) in der Form

$$n' \times \sigma n = n \times \sigma n'$$

und setzen $n' = dn$, so folgt

$$n \times \sigma(dn) = dn \times \sigma n$$

und mithin

$$dn \times \sigma n = d\varphi$$

oder

$$\sigma n = F_n = \mathrm{grad}_N\, \varphi,$$

d. h. in kartesischen Koordinaten

$$X_n = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad Y_n = \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \quad Z_n = \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}.$$

Aus den Gleichungen (2) lassen sich, wenn ihre Determinante nicht verschwindet, α, β, γ umgekehrt als homogene, lineare Funktionen von X_n, Y_n, Z_n berechnen, die Beziehung (3) ist also umkehrbar, so daß wir auch schreiben können

$$n = \sigma' F_n, \tag{10}$$

und σ' hat dieselben Eigenschaften wie σ. Setzen wir dann

$$F_n = P - O,$$

so wird

$$2\varphi = F_n \times \sigma' F_n = (P - O) \times \sigma'(P - O)$$

und mithin φ eine homogene quadratische Funktion der Koordinaten von P. Aus der vorstehenden Gleichung folgt noch, da sich (7) auch in der Form

$$F_n \times \sigma' F_{n'} = F_{n'} \times \sigma' F_n$$

schreiben läßt, daß

$$dF_n \times \sigma' F_n = dP \times \sigma'(P - O) = d\varphi$$

und mithin

$$\sigma'(P - O) = n = \mathrm{grad}_P\, \varphi. \tag{11}$$

Für den Ort des Punktes P finden wir, wenn wir beachten, daß $n^2 = 1$ ist, sofort die Darstellung

$$[\sigma'(P - O)]^2 = 1; \tag{12}$$

diese Fläche ist ein Ellipsoid, das Lamésche Ellipsoid, und dessen Halbmesser liefern sonach die Größe der in ihre Richtung fallenden Druckkräfte.

Wir werden sogleich sehen, daß die Druckflächen und das Lamésche Ellipsoid, die denselben Mittelpunkt O besitzen, auch dieselben Hauptachsen haben. Auf die Hauptebenen der Druckflächen muß aber, da die Druckrichtung ihnen konjugiert ist bezüglich der Druckflächen, ein senkrechter Druck ausgeübt werden, es gibt also für einen beliebigen Punkt im Innern des Körpers mindestens drei zu einander paarweise senkrechte Flächenelemente, auf welche ein normaler Druck ausgeübt wird. Die Ebenen dieser Elemente heißen die Hauptebenen des Punktes O. Der Asymptotenkegel der Druckflächen hat die Gleichung

$$\varphi = 0,$$

er ist mithin, da zufolge der Definition von φ dann $\mathfrak{n} \times \sigma\mathfrak{n} = 0$ wird, die Hüllfläche der Ebenen, für welche der Druck tangential ist.

Beziehen wir die Druckflächen auf ihre Hauptachsen, so nimmt ihre Gleichung die Form an

$$p_1 x^2 + p_2 y^2 + p_3 z^2 = \text{konst.},$$

wobei p_1, p_2, p_3 positiv oder negativ sein können und die Hauptdrucke für den Punkt O heißen.

Die ursprüngliche Gestalt der Funktion 2φ wird also

$$2\varphi = p_1 \alpha^2 + p_2 \beta^2 + p_3 \gamma^2$$

und es ergibt sich durch ihre Differentiation nach α, β, γ

$$X_n = p_1 \alpha, \quad Y_n = p_2 \beta, \quad Z_n = p_3 \gamma.$$

Vergleicht man dies mit den Gleichungen (2), so sieht man, daß jetzt

$$X_x = p_1, \quad Y_y = p_2, \quad Z_z = p_3,$$

$$Y_x = X_y = 0, \quad Z_y = Y_z = 0, \quad X_z = Z_x = 0.$$

Die Koordinaten des Punktes P sind $\xi = X_n$, $\eta = Y_n$, $\zeta = Z_n$, es ergibt sich also

$$2\varphi = \frac{\xi^2}{p_1} + \frac{\eta^2}{p_2} + \frac{\zeta^2}{p_3},$$

und weiter folgt aus $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, da $\alpha = \frac{\xi}{p_1}$, $\beta = \frac{\eta}{p_2}$, $\gamma = \frac{\zeta}{p_3}$,

$$\frac{\xi^2}{p_1^2} + \frac{\eta^2}{p_2^2} + \frac{\zeta^2}{p_3^2} = 1.$$

Dies ist die Gleichung des Laméschen Ellipsoids, und wir sehen so in der Tat, daß die Hauptachsen dieses Ellipsoids der Lage nach mit denen der Druckflächen zusammenfallen.[1])

Man findet noch, daß, wenn die Druckflächen Kugeln sind, auch das Lamésche Ellipsoid eine Kugel wird; wenn also auf jede durch O gelegte Ebene ein senkrechter Druck ausgeübt wird, so sind die Druckkräfte auch einander gleich.

Dies ist der Fall der idealen Flüssigkeiten, es wird für diese

$$p_1 = p_2 = p_3 = p,$$

wenn p den Flüssigkeitsdruck bezeichnet. Dann liefern die Gleichungen (2)

$$X_n = p\alpha, \quad Y_n = p\beta, \quad Z_n = p\gamma,$$

so daß die Transformation σ sich auf die Multiplikation mit einem Zahlfaktor p reduziert, und die Gleichung (5) wird dabei (Bd. I, S. 314)

$$\varrho F = \operatorname{grad} p.$$

5. Die speziellen Druckkomponenten als Funktionen der Hauptdrucke. Beziehen wir die Richtungskosinus auf die Hauptachsen der betrachteten Druckflächen, so wird

$$F_n \times n' = \alpha'\alpha p_1 + \beta'\beta p_2 + \gamma'\gamma p_3.$$

Wir denken uns jetzt drei durch O gehende Flächenelemente,

---

1) Die ganze Theorie der inneren Druckkräfte stammt von Cauchy, der die Druckkomponenten und die Hauptdrucke behandelt, mit Hilfe des Elementartetraeders die Gleichungen (2) gefunden, darauf die Gleichungen (4) abgeleitet und auch die Druckflächen eingeführt hat (Exercices de Math. vol. II, 1827, Œuvres (2) t. VII: *De la pression ou tension dans un corps solide*, p. 60, *Sur les relations qui existent dans l'état d'équilibre d'un corps solide ou fluide entre les pressions et les tensions et les forces accélératrices* p. 141). Dies Ellipsoid (12) rührt von Lamé und Clapeyron her: *Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences, t. 4, p. 463 Paris 1833, Journal für Math. Bd. 7, S. 145 (1831).

die zu Normalen drei orthogonale Achsen x, y, z haben, und es seien $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ die Richtungskosinus dieser drei Achsen, auf die Hauptdruckrichtungen bezogen. Lassen wir der Reihe nach n und n' gleichzeitig mit der x-, y- oder z-Achse zusammenfallen, so erhalten wir aus der obenstehenden Gleichung der Reihe nach X_x, Y_y, Z_z und finden so

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \alpha_1^2 p_1 + \beta_1^2 p_2 + \gamma_1^2 p_3, \\ Y_y &= \alpha_2^2 p_1 + \beta_2^2 p_2 + \gamma_2^2 p_3, \\ Z_z &= \alpha_3^2 p_1 + \beta_3^2 p_2 + \gamma_3^2 p_3. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Lassen wir dagegen n mit y, n' mit z usw. zusammenfallen, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} Z_y = Y_z &= \alpha_2\alpha_3 p_1 + \beta_2\beta_3 p_2 + \gamma_2\gamma_3 p_3, \\ X_z = Z_x &= \alpha_3\alpha_1 p_1 + \beta_3\beta_1 p_2 + \gamma_3\gamma_1 p_3, \\ Y_x = X_y &= \alpha_1\alpha_2 p_1 + \beta_1\beta_2 p_2 + \gamma_1\gamma_2 p_3. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Aus (13) können wir sofort erkennen, daß

$$X_x + Y_y + Z_z = p_1 + p_2 + p_3$$

wird und somit von der Wahl des Achsentripels x, y, z unabhängig ist. Es heißt der Ausdruck $X_x + Y_y + Z_z$ deswegen die lineare Druckinvariante; er ist auch eine Invariante der Transformation σ und wird als solche mit $I_1\sigma$ bezeichnet. Ebenso läßt sich zeigen, daß

$$I_2\sigma = (Y_y Z_z - Y_z^2) + (Z_z X_x - Z_x^2) + (X_x Y_y - X_y^2)$$

eine quadratische Invariante (nämlich $= p_2 p_3 + p_3 p_1 + p_1 p_2$) ist. Endlich wird die Determinante des Gleichungssystems (2), die wir von 0 verschieden voraussetzten, eine kubische Invariante $I_3\sigma$.

6. Elastische Körper. Hookesches Gesetz. Die Elastizitätsmoduln. Die elastischen Körper, welche die Natur darbietet, deformieren sich unter der Einwirkung äußerer Kräfte, mögen diese nun am Innern des Körpers als Volumenkräfte oder in Gestalt von Zug- oder Druckkräften an der Oberfläche angreifen, und erreichen so einen gewissen Gleichgewichtszustand. Um diese Deformation zu verändern, muß man neue

Kräfte hinzufügen. Werden die Kräfte fortgenommen, so strebt der Körper die ursprüngliche Gestalt wieder anzunehmen, ohne sie aber in allen Fällen wieder zu erreichen, und deswegen unterscheidet man die unter der Einwirkung der Kräfte eintretende **elastische** und die **permanente** Deformation, die nach Aufhebung der Kräfte übrig bleibt.

Man scheidet sodann die elastischen Körper in **isotrope** und **anisotrope**; die ersteren zeigen nach verschiedenen Richtungen keine verschiedenen elastischen Eigenschaften, dahin gehören z. B. die Metalle und der Zement; bei den anisotropen Körpern wie z. B. den Kristallen und dem Holz ist das aber nicht der Fall. Zwei kongruente Stücke, die aus verschiedenen Stellen eines isotropen Materials ausgeschnitten sind, erleiden unter der Einwirkung desselben Kräftesystems dieselbe Deformation; dies geschieht aber im allgemeinen nicht, wenn das Material anisotrop ist. Die Deformation ist bei den zu technischen Konstruktionen gebrauchten Materialien so gering, daß sich alles das anwenden läßt, was im vorigen Kapitel über die Deformation eines kontinuierlichen Mediums oder Körpers gesagt wurde. Das experimentelle Gesetz, das diese Deformation beherrscht, ist das **Hookesche Gesetz** (1660), das von seinem Urheber mit den Worten *Ut tensio sic vis* ausgesprochen wurde, d. h. **die in einem Körper hervorgebrachte Deformation ist der Größe nach proportional der Belastung, die sie hervorbringt**, oder wie wir es genauer ausdrücken wollen: **die Druckkomponenten sind lineare homogene Funktionen der Deformationskomponenten.**

Wir wollen zunächst nur isotrope Körper betrachten. Ein isotroper Stab von parallelepipedischer Gestalt wird unter der Einwirkung eines Gewichtes, das ihn streckt, sich verlängern und im allgemeinen seitlich zusammenziehen. Eine Ausnahme bildet der Kautschuk und unter den anisotropen Körpern einige Kristalle, z. B. der Pyrit und das Steinsalz. Wir nennen p den Druck pro Flächeneinheit (cm^2), ε den linearen Dilatationskoeffizienten, η den transversalen Kontraktionskoeffizienten. Die Erfahrung zeigt dann, daß dem Hookeschen Gesetz entsprechend

innerhalb gewisser Grenzen ε proportional zu p und η ebenfalls proportional zu p, mithin auch zu ε ist, so daß man setzen kann

$$p = E\varepsilon, \quad \eta = \varkappa\varepsilon. \tag{15}$$

E und $\varkappa$ sind hierbei Konstanten des Körpers, die für einen bestimmten Körper und eine bestimmte Temperatur immer denselben Wert haben; sie heißen die isothermischen Konstanten des Körpers. E wird auch als der Youngsche Modul bezeichnet und gewöhnlich in gr und cm^2 ausgedrückt, er ist immer eine positive und für die Baumaterialien recht große Zahl. Die größten Werte hat er für Stahl, ungefähr 2200×10^6; für einzelne anisotrope Körper nimmt er indes noch größere Werte an, z. B. ist er gleich 5200×10^6 für Korund.

Die Konstante $\varkappa$ heißt das Poissonsche Verhältnis; sie ist positiv, wenn eine seitliche Kontraktion eintritt, negativ, wenn eine seitliche Schwellung stattfindet. Wir werden sehen, daß immer

$$-1 < \varkappa \leqq \tfrac{1}{2}. \tag{16}$$

Für Glas ist $\varkappa$ sehr nahe gleich $^1/_4$, für Kupfer ist es ungefähr 0,374, für Eisen 0,321, für Stahl 0,294. Ist $\varkappa = \frac{1}{2}$, so ist der Körper inkompressibel. Für eine rote Art vulkanisierten Kautschuks ist $\varkappa = -\frac{1}{2}$, für den Zucker $\varkappa = 0$.

Man benutzt noch zwei andere Konstanten λ, μ, welche die Laméschen Konstanten heißen und durch E und $\varkappa$ folgendermaßen definiert werden:

$$\lambda = \frac{E\varkappa}{(1+\varkappa)(1-2\varkappa)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\varkappa)}. \tag{17}$$

Die Konstante μ heißt der Modul der Starrheit und ist immer positiv; λ hat dasselbe Zeichen wie $\varkappa$. Aus (17) kann man umgekehrt $\varkappa, E$ durch λ, μ ausdrücken und findet

$$\varkappa = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}, \quad E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}. \tag{18}$$

Es ergibt sich aus (17), da E, $1+\varkappa$ und $1-2\varkappa$ positiv sind,

$$\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0.$$

Demnach sind auch die Verhältnisse von $\lambda + 2\mu$ zu ϱ (der

Dichtigkeit des isotropen homogenen Körpers) und von μ zu ϱ positiv und wir können setzen

$$\Omega^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}, \quad \omega^2 = \frac{\mu}{\varrho}.$$

Diese beiden neuen Konstanten Ω und ω haben eine wichtige physikalische Bedeutung.[1])

7. Beziehungen zwischen Druckkomponenten und Deformationskomponenten bei einem isotropen Körper. Aus Symmetriegründen kann man schließen, daß für jeden inneren Punkt O eines isotropen Körpers die Hauptdruckrichtungen von den im vorigen Kapitel definierten Hauptdeformationsrichtungen nicht verschieden und daß außerdem die Elastizitätseigenschaften für diese drei Richtungen dieselben sind.

Wir denken uns demnach aus dem Körper ein sehr kleines rechtwinkliges Paralleliped ausgeschnitten, dessen Kanten die soeben bezeichneten Richtungen x, y, z haben, wenn für den Punkt O eine Ecke des Parallelepipeds genommen wird. Auf die zu x senkrechten Seitenflächen denken wir uns einen Druck p_1 (pro Flächeneinheit) ausgeübt; durch diesen werden die Kanten von der Richtung x verkürzt und die anderen Kanten in demselben Verhältnis verlängert, die Koeffizienten sind die aus den Gleichungen (15) folgenden, aber mit dem entgegengesetzten Vorzeichen genommen. Wir finden so für die Dilatationskoeffizienten in den Richtungen der Kanten

$$-\frac{p_1}{E}, \quad \frac{\varkappa p_1}{E}, \quad \frac{\varkappa p_1}{E}.$$

Analoges ergibt sich für einen Druck von der Stärke p_2 auf die zu y senkrechten Seitenflächen; wir finden für die Dilatationskoeffizienten

$$\frac{\varkappa p_2}{E}, \quad -\frac{p_2}{E}, \quad \frac{\varkappa p_2}{E},$$

1) Weitere Einzelheiten über die Elastizitätskonstanten findet man in dem Artikel von W. Thomson (Lord Kelvin) *Elasticity*, Encyclopaedia Britannica (1876) oder Math. and Phys. Papers vol. 3, p. 31; Voigt, *L'état actuel de nos connaissances sur l'élasticité des cristaux,* Rapports présentés au Congrès international de Physique, Paris 1900, vol. 1; Chwolson, Traité de Physique, t. I.

und schließlich, wenn auf die zu z senkrechten Seitenflächen der Druck p_3 ausgeübt wird, für dieselben Koeffizienten

$$\frac{\varkappa p_3}{E}, \quad \frac{\varkappa p_3}{E}, \quad -\frac{p_3}{E}.$$

Durch Addition dieser drei Wertesysteme erhalten wir für die dem resultierenden Drucksystem entsprechenden Dilatationskoeffizienten a_0, b_0, c_0, wenn wir

$$P = p_1 + p_2 + p_3 = I_1 \sigma \tag{19}$$

setzen,

$$a_0 = \frac{\varkappa P - (1+\varkappa) p_1}{E}, \quad b_0 = \frac{\varkappa P - (1+\varkappa) p_2}{E}, \quad c_0 = \frac{\varkappa P - (1+\varkappa) p_3}{E};$$

diese Gleichungen stellen, dem Hookeschen Gesetz entsprechend, die Hauptdilatationen als lineare homogene Funktionen der Hauptdrucke dar.

Es ist jetzt leicht, auch die Deformationskomponenten für den Punkt O, auf ein beliebiges Achsentripel bezogen, darzustellen. Wir nennen x_1, y_1, z_1 ein solches Tripel, die Achse x_1 habe gegen die Hauptachsen die Richtungskosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ seien die Richtungskosinus der Achse y_1, $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ die der Achse z_1. Wir bezeichnen mit a, b, c die linearen Dilatationskoeffizienten für die Richtungen x_1, y_1, z_1, mit f, g, h die Ausweitungen für diese paarweise zusammengenommenen Richtungen. Nach den Formeln (12) und (13) des vorigen Kapitels finden wir dann

$$a = a_0 \alpha_1^2 + b_0 \beta_1^2 + c_0 \gamma_1^2, \quad f = 2(a_0 \alpha_2 \alpha_3 + b_0 \beta_2 \beta_3 + c_0 \gamma_2 \gamma_3) \text{ usw.}$$

Setzen wir hierin die vorstehend gefundenen Werte für a_0, b_0, c_0 ein und benutzen die Formeln (13) und (14) dieses Kapitels, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\varkappa P - (1+\varkappa) X_x}{E}, & f &= -\frac{2(1+\varkappa) Y_z}{E}, \\ b &= \frac{\varkappa P - (1+\varkappa) Y_y}{E}, & g &= -\frac{2(1+\varkappa) Z_x}{E}, \\ c &= \frac{\varkappa P - (1+\varkappa) Z_z}{E}, & h &= -\frac{2(1+\varkappa) X_y}{E}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Diese Gleichungen liefern die Deformationskomponenten in Funktion der Druckkomponenten. Wir können aber auch umgekehrt die Druckkomponenten durch die Deformationskomponenten ausdrücken.

Addieren wir die linksstehenden der obigen Gleichungen, so finden wir den räumlichen Dilatationskoeffizienten

$$\Theta = a + b + c,$$

den wir als die lineare Invariante der Deformation anzusehen haben, und zwar ergibt sich, da

$$P = p_1 + p_2 + p_3 = X_x + Y_y + Z_z,$$

die einfache Gleichung

$$\Theta = -\frac{(1-2\varkappa)P}{E}, \tag{21}$$

also eine Beziehung zwischen der linearen Druckinvariante und der linearen Deformationsinvariante. Die erste Gleichung (20) liefert dann weiter

$$Ea = \varkappa P - (1+\varkappa)X_x = -\frac{\varkappa E}{1-2\varkappa}\Theta - (1+\varkappa)X_x;$$

lösen wir nach X_x auf und führen die durch (17) definierten Konstanten λ, μ ein, so folgt, indem wir die weiteren Gleichungen sofort hinzufügen,

$$\left.\begin{aligned} -X_x &= \lambda\Theta + 2\mu a, & -Y_z &= \mu f, \\ -Y_y &= \lambda\Theta + 2\mu b, & -Z_x &= \mu g, \\ -Z_z &= \lambda\Theta + 2\mu c, & -X_y &= \mu h. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Die Erfahrung lehrt nun, daß in der Natur die Körper unter der Einwirkung eines auf ihre Oberfläche ausgeübten gleichförmigen Druckes, wenn sie nicht inkompressibel sind, an Volumen abnehmen. Es folgt also aus (21), da für $P > 0$ $\Theta \leqq 0$ sein soll,

$$1 - 2\varkappa \geqq 0,$$

d. h., wie schon gesagt wurde,

$$\varkappa \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Außerdem lehrt die Erfahrung, daß unter dem Einfluß einer Scherkraft eine zu der Scherkraft senkrechte Linie in

der Richtung der Kraft umgebogen wird. Ist also Y_z (die y-Komponente des Druckes auf die xy-Ebene) > 0, so nimmt der Winkel yz bei der Deformation zu und die Ausweitung f der y- und z-Achse wird deshalb nach unseren Festsetzungen negativ; aus der zweiten Gleichung (20) folgt also

$$1 + \varkappa > 0$$

und mithin wird $\varkappa > -1$, wie schon in (16) ausgesagt ist.

8. Das elastische Potential. Wir betrachten die folgende homogene quadratische Funktion der Druckkomponenten

$$2\Pi = -\frac{1+\varkappa}{E}\{X_x^2 + Y_y^2 + Z_z^2 + 2Y_z^2 + 2Z_x^2 + X_y^2\} + \frac{\varkappa}{E}P^2. \quad (23)$$

Beachtet man, daß

$$P^2 - 2Y_yZ_z - 2Z_zX_x - 2X_xY_y = X_x^2 + Y_y^2 + Z_z^2,$$

so kann man 2Π auch in die Form bringen

$$2\Pi = \frac{2(1+\varkappa)}{E}\{(Y_yZ_z - Y_z^2) + (Z_zX_x - Z_x^2) + (X_xY_y - X_y^2)\} - \frac{1}{E}P^2.$$

Aus dieser Form geht sofort hervor, daß diese Funktion eine lineare Kombination des Quadrates der linearen und der quadratischen Druckinvariante (s. § 5) und mithin selbst eine Invariante ist. Außerdem leitet man aus (20) sofort ab, daß

$$\left.\begin{array}{lll} a = \dfrac{\partial \Pi}{\partial X_x}, & b = \dfrac{\partial \Pi}{\partial Y_y}, & c = \dfrac{\partial \Pi}{\partial Z_z}, \\ f = \dfrac{\partial \Pi}{\partial Y_z}, & g = \dfrac{\partial \Pi}{\partial Z_x}, & h = \dfrac{\partial \Pi}{\partial X_y} \end{array}\right\} \quad (24)$$

wird. Mit Hilfe der Gleichungen (22) können wir auch Π als homogene quadratische Funktion der sechs Deformationskomponenten darstellen; es ist indessen einfacher, von den Gleichungen (22) ausgehend die folgende Funktion zu bilden, deren Identität mit der vorstehenden Funktion Π leicht nachzuweisen ist:

$$2\Pi = -2\mu(a^2 + b^2 + c^2 + \tfrac{1}{2}f^2 + \tfrac{1}{2}g^2 + \tfrac{1}{2}h^2) - \lambda\Theta^2. \quad (25)$$

Beachten wir, daß

$$\Theta^2 - 2bc - 2ca - 2ab = a^2 + b^2 + c^2,$$

so ergibt sich auch

$$2\Pi = 4\mu\{(bc - \tfrac{1}{4}f^2) + (ca - \tfrac{1}{4}g^2) + (ab - \tfrac{1}{4}h^2)\} - (\lambda + 2\mu)\Theta^2,$$

d. h. Π ist eine lineare Kombination des Quadrates der linearen und der quadratischen Deformationsinvariante.

Außerdem wird

$$\left.\begin{array}{lll} X_x = \dfrac{\partial \Pi}{\partial a}, & Y_y = \dfrac{\partial \Pi}{\partial b}, & Z_z = \dfrac{\partial \Pi}{\partial c}, \\ Y_z = \dfrac{\partial \Pi}{\partial f}, & Z_x = \dfrac{\partial \Pi}{\partial g}, & X_y = \dfrac{\partial \Pi}{\partial h}. \end{array}\right\} \qquad (26)$$

Wir können also sagen: Für die isotropen elastischen Körper gibt es eine invariante, homogene quadratische Funktion der Druckkomponenten oder der Deformationskomponenten, deren Derivierten nach den Druckkomponenten die Deformationskomponenten und deren Derivierten nach den Deformationskomponenten die Druckkomponenten liefern. Diese Funktion Π heißt das elastische Potential.

Um ihre physikalische Bedeutung zu erkennen, denken wir uns den elastischen Körper deformiert und im Gleichgewicht. Ein Punkt (x, y, z) geht bei der Deformation über in $(x + u, y + v, z + w)$, wenn u, v, w die Komponenten der Verrückung bezeichnen. Wir wollen dem Körper nun eine virtuelle Verschiebung erteilen, so daß der Punkt $(x + u, y + v, z + w)$ in $(x + u + \delta u, y + v + \delta v, z + w + \delta w)$ übergeht, und die dabei von den wirkenden Kräften geleistete Arbeit $\delta\mathfrak{W}$ berechnen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta\mathfrak{W} = & \int \varrho(X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)d\tau \\ & + \int (X_n\delta u + Y_n\delta v + Z_n\delta w)d\sigma. \end{aligned} \qquad (27)$$

Um die rechte Seite dieser Gleichung umzuformen, stellen wir uns allgemeiner die Aufgabe, den folgenden Ausdruck zu transformieren

$$\Phi = \int \varrho(Xu' + Yv' + Zw')d\tau + \int (X_n u' + Y_n v' + Z_n w')d\sigma, \qquad (28)$$

wobei u', v', w' die Verrückungskomponenten für irgend eine

andere Deformation sind. Das zweite dieser beiden Integrale wird zufolge von (2)

$$\int [(X_x u' + Y_x v' + Z_x w')\alpha + (X_y u' + Y_y v' + Z_y w')\beta + \cdots] d\sigma,$$

und transformieren wir dieses Flächenintegral nach dem zu Anfang von § 3 benutzten Satze in ein Raumintegral, so finden wir dafür

$$-\int \left\{ \frac{\partial (X_x u' + \cdots)}{\partial x} + \frac{\partial (X_y u' + \cdots)}{\partial y} + \frac{\partial (X_z u' + \cdots)}{\partial z} \right\} d\tau$$

$$= -\int \left\{ u' \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) + \cdots \right\} d\tau$$

$$-\int \left\{ X_x \frac{\partial u'}{\partial x} + \cdots + Y_z \left(\frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z} \right) + \cdots \right\} d\tau,$$

oder mit Rücksicht auf (4), wenn wir mit a', b', c', f', g', h', die den Verrückungen (u', v', w') entsprechenden Deformationskomponenten bezeichnen,

$$-\int \varrho (X u' + Y v' + Z w') d\tau - \int (X_x a' + \cdots + Y_z f' + \cdots) d\tau.$$

Setzen wir dies in dem Ausdrucke Φ für das zweite Integral ein, so ergibt sich

$$\Phi = -\int (X_x a' + Y_y b' + Z_z c' + Y_z f' + Z_x g' + X_y h') d\tau$$

oder nach (26)

$$\Phi = -\int \left(\frac{\partial \Pi}{\partial a} a' + \frac{\partial \Pi}{\partial b} b' + \frac{\partial \Pi}{\partial c} c' + \frac{\partial \Pi}{\partial f} f' + \frac{\partial \Pi}{\partial g} g' + \frac{\partial \Pi}{\partial h} h' \right) d\tau. \quad (28\text{a})$$

Nehmen wir jetzt $u' = \delta u$, $v' = \delta v$, $w' = \delta w$, so wird $\Phi = \delta \mathfrak{W}$. Außerdem sieht man sofort, daß $a' = \delta a$, $b' = \delta b, \cdots$ zu setzen ist und deswegen

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} a' + \cdots + \frac{\partial \Pi}{\partial f} f' + \cdots = \frac{\partial \Pi}{\partial a} \delta a + \cdots + \frac{\partial \Pi}{\partial f} \delta f + \cdots = \delta \Pi,$$

also

$$\delta \mathfrak{W} = -\int \delta \Pi \, d\tau$$

und, wenn das Volumen bei der Variation ungeändert bleibt,

$$\delta \mathfrak{W} = -\delta \int \Pi \, d\tau$$

wird. Ist anderseits $\delta\mathfrak{w}$ die Arbeit der inneren Kräfte, so ist für das Gleichgewicht erforderlich

$$\delta\mathfrak{W} + \delta\mathfrak{w} = 0,$$

und es folgt

$$\delta\mathfrak{w} = -\delta\mathfrak{W} = \delta\int \Pi d\tau. \tag{29}$$

Die Funktion $\int \Pi d\tau$, die von dem Deformationszustand des Körpers abhängt, liefert durch ihre Zunahme die von den inneren Kräften und durch ihre Abnahme die von den äußeren Kräften geleistete Elementararbeit. Die Änderung der Funktion Π stellt daher gewissermaßen die Arbeit pro Volumeneinheit dar und diese Funktion wird deshalb auch das elastische Einheitspotential genannt.

Gehen wir von der Gleichung (25) aus, so ist leicht zu zeigen, daß -2Π immer > 0 wird. Es ist nämlich

$$3(a^2 + b^2 + c^2) - \Theta^2 = (b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2 > 0,$$

also wird $\Theta^2 < 3(a^2 + b^2 + c^2)$ und mithin, wenn $\lambda < 0$,

$$-2\Pi > (2\mu + 3\lambda)(a^2 + b^2 + c^2) + \mu(f^2 + g^2 + h^2),$$

es war aber $2\mu + 3\lambda > 0$, $\mu > 0$, also ist auch $-2\Pi > 0$. Für $\lambda \geqq 0$ ist dies aber schon nach dem ursprünglichen Ausdruck (25) der Fall, also sehen wir: Π ist als quadratische homogene Funktion der Deformations- oder der Druckkomponenten eine definite negative Form. Nur wenn alle Deformationskomponenten verschwinden, der Körper also im undeformierten Zustande ist, wird $\Pi = 0$.

9. Das elastische Potential kristallinischer Körper. Der Bettische Reziprozitätssatz. Betrachtungen, die wir hier nicht wiedergeben können, rechtfertigen die Annahme, daß die vorstehend abgeleiteten Resultate auch für einen beliebigen kristallinischen Körper bestehen bleiben. In diesem Falle ist das Potential ebenfalls eine definite negative quadratische Form der sechs Deformationskomponenten und enthält mithin 21 Koeffizienten oder isothermische Elastizitätsmoduln. Diese Koeffizienten lassen sich aber auf eine ge-

ringere Anzahl reduzieren; im Falle des isotropen Körpers reduzieren sie sich, wie wir gesehen haben, auf zwei.[1]) Nehmen wir die Existenz einer solchen Funktion allgemein an und nennen $a, b, \ldots h$ und $a', b', \ldots h'$ die sechs Deformationskomponenten von zwei Deformationen desselben elastischen Körpers, dann ergibt sich sofort die Gleichung

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} a' + \cdots + \frac{\partial \Pi}{\partial f} f' + \cdots = \frac{\partial \Pi'}{\partial a'} a + \cdots + \frac{\partial \Pi'}{\partial f'} f + \cdots,$$

indem wir mit Π' dieselbe Funktion wie Π, nur gebildet für $a', b', \ldots h'$, bezeichnen. Dies folgt sofort daraus, daß Π eine homogene quadratische Funktion von $a, b, \ldots h$, der links stehende Ausdruck also eine symmetrische bilineare Funktion der beiden Sextupel $a, b, \ldots h$ und $a', b', \ldots h'$ wird und sich durch Vertauschung dieser beiden Sextupel nicht ändert.

Anderseits wird aber die linke Seite nach der oben stehenden Transformation des in (28) eingeführten Φ:

$$\int \varrho (Xu' + Yv' + Zw') d\tau + \int (X_n u' + Y_n v' + Z_n w') d\sigma$$

oder in Vektorbezeichnung, wenn $\boldsymbol{s}'$ der Verrückungsvektor (u', v', w') ist,

$$\int \varrho \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{s}' d\tau + \int \boldsymbol{F}_n \times \boldsymbol{s}' d\sigma.$$

Die rechte Seite wird einem analog gebildeten Ausdruck gleich, und wir erhalten sonach die Gleichung

$$\int \varrho \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{s}' d\tau + \int \boldsymbol{F}_n \times \boldsymbol{s}' d\sigma = \int \varrho \boldsymbol{F}' \times \boldsymbol{s} d\tau + \int \boldsymbol{F}_n' \times \boldsymbol{s} d\sigma. \quad (30)$$

Wenn ein Körper zwei Kräftesystemen unterworfen wird, die zwei verschiedene Deformationen hervorrufen, so ist die Arbeit, die von den Kräften $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}_n$ des ersten Systems bei den durch das zweite System hervorgerufenen Verrückungen $\boldsymbol{s}'$ geleistet wird, ebenso

1) Der Begriff des elastischen Potentials stammt von G. Green, *On the laws of reflexion and refraction of light* (Trans. Phil. Cambridge, v. VII, p. 1, 1837); aber erst Lord Kelvin hat die Existenz des Potentials in einigen wichtigen Fällen bewiesen (1853, 1864), Math. and Phys. Papers, vol. 1, p. 291, vol. 3, p. 386. Vgl. Voigt: Thermodynamik, Bd. II, Kap. IV, Leipzig 1903.

groß wie die Arbeit, die von den Kräften F', F_s' des zweiten Systems bei den durch das erste System hervorgerufenen Verrückungen s geleistet wird. Dies ist der Bettische Reziprozitätssatz.[1])

10. Die Gleichgewichtsbedingungen für isotrope elastische Körper. Benutzen wir die Gleichungen (4) für das Gleichgewicht eines beliebigen deformierbaren Körpers und nehmen die Ausdrücke (22) hinzu, so ist es sehr leicht, die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu finden, denen die Verrückungskomponenten eines isotropen elastischen Körpers im Falle des Gleichgewichtes genügen.

Wir haben

$$\varrho X + \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial a}{\partial x} + \mu \frac{\partial h}{\partial y} + \mu \frac{\partial g}{\partial z} = 0.$$

Es wird aber

$$2\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \Delta u,$$

und da

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

ergibt sich bei Hinzufügung der beiden analogen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varrho X + (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \Delta u &= 0,\\ \varrho Y + (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mu \Delta v &= 0,\\ \varrho Z + (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial z} + \mu \Delta w &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Diese unbestimmten Gleichungen des Gleichgewichts schreiben sich in vektorieller Form

$$\varrho F + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad\,div}\, s + \mu \Delta s = 0, \tag{32}$$

1) Betti, *Teoria della elasticità*, Nuovo Cimento (2), t. 7—10 (1872, 73), Cap. VI, Annali di Mat. (2) t. 6, p. 101 (1875). Der Satz ist die weiteste Verallgemeinerung eines von Maxwell in die Theorie des Fachwerkes eingeführten Prinzips.

und da nach S. 47 im ersten Bande

$$\Delta s = \text{grad div } s - \text{rot rot } s,$$

finden wir auch

$$\varrho F + (\lambda + 2\mu) \text{ grad div } s - \mu \text{ rot rot } s = 0$$

oder, wenn wir die Konstanten Ω^2 und ω^2 einführen,

$$F + \Omega^2 \text{ grad div } s - \omega^2 \text{ rot rot } s = 0. \tag{33}$$

Es lassen sich auch leicht nach derselben Methode die Oberflächenbedingungen aus den Gleichungen (2) ableiten.[1])

Übungsbeispiele.

1. Aufgabe. *Ein homogener und isotroper gerader Zylinder mit beliebiger Grundfläche ist einem gleichförmigen Zug auf seine Grundflächen unterworfen und seitlich frei. Die Massenkräfte sind zu vernachlässigen. Die Deformation des Zylinders zu bestimmen.*

Auflösung. Die z-Achse sei den Seitenlinien des Zylinders parallel. Ich behaupte, daß sich allen Bedingungen der Aufgabe genügen läßt, indem man setzt

$$u = ax, \quad v = by, \quad w = cz, \quad f, g, h = 0,$$

wobei a, b, c Konstanten sind. Die Druckkomponenten werden demnach

$$\begin{aligned} -X_x &= \lambda(a + b + c) + 2\mu a, \\ -Y_y &= \lambda(a + b + c) + 2\mu b, \\ -Z_z &= \lambda(a + b + c) + 2\mu c, \\ Y_z = 0, &\quad Z_x = 0, \quad X_y = 0. \end{aligned}$$

1) Die Gleichungen für das Gleichgewicht der isotropen elastischen Körper wurden von Navier im Jahre 1821 gefunden, *Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques* (Mémoires de l'Acad. des Sciences, t. 7, 1827, p. 375) unter der Annahme, daß für jeden Körper $\varkappa = \frac{1}{4}$ und mithin $\lambda = \mu$. Darauf gaben sie Lamé und Clapeyron in den zitierten Abhandlungen auf Grund eines direkten, aber nicht strengen Verfahrens und Poisson (Mém. de l'Acad. des Sciences t. 8, p. 357, 1828), der die Gleichungen (22) ableitete; endlich schlug Cauchy (Exercices de Math. 1828, Œuvres compl. (2) t. 8, p. 204) ein von allen Voraussetzungen über die Molekularwirkung freies Verfahren ein, das wir auch im vorstehenden befolgt haben.

Man sieht sofort, daß die unbestimmten Gleichgewichtsgleichungen durch diesen Ansatz identisch befriedigt werden. Die Grenzbedingungen für die Grundflächen liefern

$$\lambda(a+b+c)+2\mu a=0,\quad \lambda(a+b+c)+2\mu b=0,$$
$$\lambda(a+b+c)+2\mu c=p,$$

wenn p den auf die Flächeneinheit ausgeübten Zug bedeutet. Aus diesen drei Gleichungen können wir leicht die Werte der Konstanten a, b, c berechnen, es ergibt sich

$$a=b=-\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}p,\quad c=\frac{p}{2\mu}-\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}p.$$

Demnach findet man für den räumlichen Dilatationskoeffizienten

$$\Theta=\frac{p}{3\lambda+2\mu}.$$

2. Aufgabe. *Die Deformation einer homogenen und isotropen Kugelschale zu bestimmen, die einem senkrechten und gleichförmigen Druck unterworfen ist.*

Auflösung. Aus Symmetriegründen folgt sofort, daß die Verschiebung, die ein beliebiger Punkt M der Schale erfährt, in die Richtung des Radiusvektors fällt, also radial ist. Bezeichnen wir ihre Größe mit σ, so ergibt sich demnach für ihre orthogonalen Komponenten

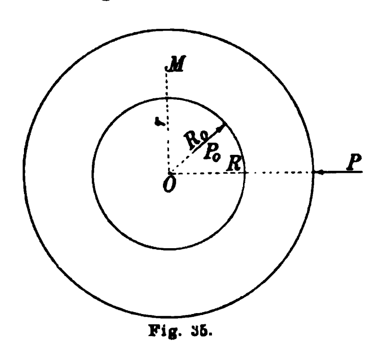


Fig. 35.

$$u=\sigma\frac{x}{r},\quad v=\sigma\frac{y}{r},\quad w=\sigma\frac{z}{r}.$$

Außerdem ist σ eine Funktion allein von der Länge r des Radiusvektors. Setzen wir demgemäß $\sigma=r\varrho$, wobei ϱ eine neue Funktion von r wird, so sind die Verrückungskomponenten

$$u=\varrho x,\quad v=\varrho y,\quad w=\varrho z. \tag{1}$$

Mit diesen Werten bilden wir die sechs Deformationskomponenten, z. B.

$$a=\frac{\partial u}{\partial x}=\varrho+\varrho'\frac{x^2}{r},$$

für $\varrho'=\frac{d\varrho}{dr}$, und erhalten so

$$a = \varrho + \varrho' \frac{x^2}{r}, \quad b = \varrho + \varrho' \frac{y^2}{r}, \quad c = \varrho + \varrho' \frac{z^2}{r},$$

$$f = 2\varrho' \frac{yz}{r}, \quad g = 2\varrho' \frac{zx}{r}, \quad h = 2\varrho' \frac{xy}{r},$$

$$\Theta = a + b + c = 3\varrho + r\varrho'.$$

Aus der zweiten Derivierten von u ergibt sich

$$\Delta u = 4\varrho' \frac{x}{r} + \varrho'' x,$$

und demnach wird die erste Gleichgewichtsgleichung, die, weil hier keine Massenkräfte wirken,

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0$$

lautet,

$$\frac{x}{r}(r\varrho'' + 4\varrho') = 0.$$

Die zweite und dritte Gleichung erhält man hieraus, indem man x mit y und z vertauscht.

Wir finden also

$$r\varrho'' + 4\varrho' = 0,$$

und diese Gleichung enthält, wenn man sie noch mit r^3 multipliziert, auf der linken Seite die vollständige Derivierte von $r^4\varrho'$, demnach ist

$$r^4\varrho' = -3C$$

zu setzen, wenn C eine Konstante bezeichnet, und folglich wird

$$\varrho' = -\frac{3C}{r^4}, \quad \varrho = C_1 + \frac{C}{r^3}.$$

Handelt es sich um eine Vollkugel, so muß ϱ für $r = 0$ endlich bleiben, also muß $C = 0$ sein und ϱ wird konstant.

Wir berechnen jetzt die inneren Druckkräfte. Wir finden

$$-X_x = \lambda(3\varrho + r\varrho') + 2\mu\left(\varrho + \varrho' \frac{x^2}{r}\right)$$

oder

$$-X_x = (3\lambda + 2\mu)\varrho + \left(\lambda r + 2\mu \frac{x^2}{r}\right)\varrho'$$

und zwei analoge Formeln für Y_y und Z_z. Es sind dann noch für ϱ und ϱ' ihre Ausdrücke in r einzusetzen. Wir finden ferner

$$-Y_z = 2\mu\varrho' \frac{yz}{r}, \quad -Z_x = 2\mu\varrho' \frac{zx}{r}, \quad -X_y = 2\mu\varrho' \frac{xy}{r}.$$

Wir können hier aber eine Bemerkung machen. Wir nehmen den Punkt $x = r$, $y = 0$, $z = 0$. Er ist notwendigerweise ein Punkt der Schale; für ihn wird aber

$$Y_y = Z_z, \quad Y_z, Z_x, X_y = 0,$$

mithin ist das Elastizitätsellipsoid für einen beliebigen Punkt der Kugelschale ein Rotationsellipsoid und dessen Achse der durch den Punkt gehende Radiusvektor.

Nennen wir den radialen Druck $\mathfrak{R}$, so wird seine Komponente nach der x-Achse $\mathfrak{R}\frac{x}{r}$, sie ist aber andererseits $= X_x \frac{x}{r} + Y_x \frac{y}{r} + Z_x \frac{z}{r}$, wir haben demnach

$$\mathfrak{R}\frac{x}{r} = X_x \frac{x}{r} + Y_x \frac{y}{r} + Z_x \frac{z}{r}.$$

Wir finden daraus sofort

$$-\mathfrak{R} = (3\lambda + 2\mu)\varrho + (\lambda + 2\mu) r \varrho'.$$

Dieser Druck muß für die innere und äußere Begrenzungsfläche der Kugelschale gegebene Werte P_0 und $-P$ haben. Sind R_0 und R die Radien der beiden begrenzenden Kugelflächen, so wird

$$-P_0 = (3\lambda + 2\mu)\left(C_1 + \frac{C}{R_0^3}\right) - 3(\lambda + 2\mu)\frac{C}{R_0^3},$$

$$P = (3\lambda + 2\mu)\left(C_1 + \frac{C}{R^3}\right) - 3(\lambda + 2\mu)\frac{C}{R^3},$$

woraus sich C und C_1 sofort finden lassen. Ziehen wir die zweite Gleichung von der ersten ab, so ergibt sich

$$C = \frac{1}{4\mu}\frac{(P + P_0)R^3 R_0^3}{R^3 - R_0^3}$$

und darauf

$$C_1 = \frac{1}{3\lambda + 2\mu}\frac{P_0 R_0^3 + P R^3}{R^3 - R_0^3}.$$

Schließlich folgt für den räumlichen Dilatationskoeffizienten

$$\Theta = 3 C_1,$$

er ist also konstant.

3. Aufgabe. *Das vorige Problem für eine zylindrische Röhre, auf deren Endflächen keine Druckkräfte wirken und deren Seitenflächen unter gleichförmigem Druck stehen.*

Auflösung. Wir setzen hier

$$u = \varrho x, \quad v = \varrho y, \quad w = cz,$$

indem ϱ eine Funktion des Achsenabstandes $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und c

eine Konstante bedeutet. Wir finden dann

$$a = \varrho + \varrho' \frac{x^2}{r}, \quad b = \varrho + \varrho' \frac{y^2}{r}, \quad c = c,$$

$$f = 0, \quad g = 0, \quad h = 2\varrho' \frac{xy}{r},$$

$$\Theta = 2\varrho + r\varrho' + c.$$

Außerdem wird

$$\Delta u = 3\varrho' \frac{x}{r} + \varrho'' x, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial x} = 3\varrho' \frac{x}{r} + \varrho'' x \text{ usw.},$$

mithin liefern die beiden ersten unbestimmten Gleichgewichtsgleichungen:

$$3\varrho' + r\varrho'' = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dr}(r^3 \varrho') = 0,$$

woraus

$$\varrho = m + \frac{n}{r^3}.$$

wenn m und n zwei Konstanten bezeichnen.

Für die sechs speziellen Druckkomponenten finden wir die folgenden Werte

$$-X_x = \lambda(2\varrho + r\varrho' + c) + 2\mu\left(\varrho + \varrho' \frac{x^2}{r}\right),$$

$$-Y_y = \lambda(2\varrho + r\varrho' + c) + 2\mu\left(\varrho + \varrho' \frac{y^2}{r}\right),$$

$$-Z_z = \lambda(2\varrho + r\varrho' + c) + 2\mu c,$$

$$Y_z = 0, \quad Z_x = 0, \quad -X_y = 2\mu\varrho' \frac{xy}{r}.$$

Analog wie bei der vorigen Aufgabe finden wir für den radialen Druck $\mathfrak{R}$

$$-\mathfrak{R} = \lambda(2\varrho + r\varrho' + c) + 2\mu(\varrho + \varrho' r).$$

Nennen wir also wieder R_0 den innern, R den äußeren Halbmesser, P_0 und $-P$ die Größe des zugehörigen gleichförmigen Drucks, so erhalten wir die folgenden zwei Bedingungsgleichungen:

$$-P_0 = 2(\lambda + \mu)\left(m + \frac{n}{R_0^2}\right) + \lambda c - 2(\lambda + 2\mu)\frac{n}{R_0^2},$$

$$P = 2(\lambda + \mu)\left(m + \frac{n}{R^2}\right) + \lambda c - 2(\lambda + 2\mu)\frac{n}{R^2}.$$

Hier ist aber auch c unbekannt, wir brauchen deshalb noch eine dritte Gleichung, die durch die Bedingung $Z_z = 0$ geliefert wird, sie ergibt

$$\lambda\left(2m + \frac{2n}{r^2} - \frac{2n}{r^2} + c\right) + 2\mu c = 0,$$

woraus

$$c = -\frac{2m\lambda}{\lambda + 2\mu}$$

folgt; m und n sind dann leicht zu berechnen. Für Θ findet man

$$\Theta = \frac{4m\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{2}{3\lambda + 2\mu} \frac{P_0 R_0^2 + PR^2}{R^2 - R_0^2}.$$

4. Aufgabe. *Die gesamte räumliche Dilatation eines homogenen, isotropen Körpers in Funktion der Massenkräfte und der Oberflächenspannungen zu finden.*

Auflösung. Wir gehen von einer Deformation des Körpers aus, bei der die zugehörigen speziellen Druckkomponenten

$$X_x' = Y_y' = Z_z' = -1, \quad Y_z' = Z_x' = X_y' = 0$$

sind und nennen a', b', c', f', g', h' die Deformationskomponenten; es wird dann

$$\lambda(a' + b' + c') + 2\mu a' = 1, \text{ usw.}$$

$$2\mu f' = 0, \text{ usw.,}$$

woraus

$$a' = b' = c' = \frac{1}{3\lambda + 2\mu}, \quad f' = g' = h' = 0.$$

Die entsprechenden Verrückungen sind bis auf eine Parallelverschiebung

$$u' = a'x, \quad v' = a'y, \quad w' = a'z$$

oder

$$s' = a'(P - O).$$

Wir wenden nun den Bettischen Reziprozitätssatz an, wonach, da hier $F' = 0$,

$$\int \varrho F \times s' d\tau + \int F_n \times s' d\sigma = \int F_n' \times s d\sigma.$$

Man sieht aber sofort, daß hier $F_n' = -n$ wird; die rechte Seite der Gleichung wird also nach dem Divergenztheorem gleich $\int \operatorname{div} s\, d\tau$ oder $\int \Theta\, d\tau$, woraus sich mit Rücksicht auf den Wert von s' die Gleichung ergibt

$$(3\lambda + 2\mu)\int \Theta\, d\tau = \int \varrho F \times (P - O)\, d\tau + \int F_n \times (P - O)\, d\sigma.$$

Nehmen wir insbesondere an, daß die Massenkräfte zu vernachlässigen

sind und der Körper einem gleichförmigen äußeren Druck p unterworfen ist, so wird $\boldsymbol{F} = 0$, $\boldsymbol{F}_n = p\boldsymbol{n}$, mithin

$$(3\lambda + 2\mu)\int \Theta\, d\tau = p\int \boldsymbol{n} \times (P - O)\, d\sigma = -p\int \operatorname{div}(P - O)\, d\tau$$

und da $\operatorname{div}(P - O) = 3$, ergibt sich

$$\int \Theta\, d\tau = -\frac{pv}{\lambda + \frac{2}{3}\mu} = -\frac{pv}{k},$$

wenn v das anfängliche Volumen des Körpers bedeutet und

$$k = \lambda + \tfrac{2}{3}\mu$$

gesetzt wird; dieses k heißt der Koeffizient der gleichförmigen Kompression.

Wird z. B. ein geschlossenes Gefäß, dessen inneres Volumen v_0 und dessen äußeres Volumen v ist, einem gleichförmigen Druck p_0 von innen her und einem Druck p von außen her unterworfen, so verändert es sich derart, daß das anfängliche Volumen $v - v_0$ der Gefäßsubstanz sich um

$$\frac{pv + p_0 v_0}{k}$$

verringert.

5. Aufgabe. *Die graphische Darstellung der Spannungen in einem kontinuierlichen Körper nach Mohr zu behandeln.*

Auflösung. Wir nennen p_1, p_2, p_3 die drei Hauptspannungen für einen bestimmten Punkt P. In P betrachten wir dann ein ebenes Flächenelement mit der Normalen $\boldsymbol{n}$, auf welches pro Flächeneinheit der Druck $\boldsymbol{F}_n$ mit den Komponenten

$$X_n = p_1\alpha, \quad Y_n = p_2\beta, \quad Z_n = p_3\gamma$$

ausgeübt wird. Wir zerlegen $\boldsymbol{F}_n$ in zwei Kräfte, eine von der Größe σ, die längs der Normalen $\boldsymbol{n}$ gerichtet ist, und eine Tangentialkraft τ, die in die Ebene des Flächenelementes fällt. Wir finden dann

Fig. 36.

$$\sigma = p_1\alpha^2 + p_2\beta^2 + p_3\gamma^2 \tag{1}$$

und demnach

$$\begin{aligned}\tau^2 &= p_1^2\alpha^2 + p_2^2\beta^2 + p_3^2\gamma^2 - (p_1\alpha^2 + p_2\beta^2 + p_3\gamma^2)^2 \\ &= (p_1^2\alpha^2 + p_2^2\beta^2 + p_3^2\gamma^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (p_1\alpha^2 + p_2\beta^2 + p_3\gamma^2)^2.\end{aligned}$$

Entwickeln wir diesen Ausdruck, so sehen wir sofort, daß die Glie-

der mit α^4, β^4, γ^4 verschwinden und z. B. der Koeffizient von $\beta^2\gamma^2$

$$p_2^2 + p_3^2 - 2p_2p_3$$

wird, demnach ergibt sich

$$\tau^2 = \beta^2\gamma^2(p_2 - p_3)^2 + \gamma^2\alpha^2(p_3 - p_1)^2 + \alpha^2\beta^2(p_1 - p_2)^2. \qquad (2)$$

Nehmen wir noch die identische Beziehung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \qquad (3)$$

hinzu, so können wir uns die Aufgabe stellen, α, β, γ in Funktion von σ, τ und den Hauptspannungen zu bestimmen. Wir finden aus (1) und (3)

$$\sigma - p_2 = \alpha^2(p_1 - p_2) + \gamma^2(p_3 - p_2),$$
$$\sigma - p_3 = \alpha^2(p_1 - p_3) + \beta^2(p_2 - p_3)$$

und weiter

$$\tau^2 + (\sigma - p_2)(\sigma - p_3) = \alpha^2(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

woraus

$$\alpha^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - p_2)(\sigma - p_3)}{(p_3 - p_1)(p_2 - p_1)}.$$

Analog folgt

$$\beta^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - p_3)(\sigma - p_1)}{(p_1 - p_2)(p_3 - p_2)},$$

$$\gamma^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - p_1)(\sigma - p_2)}{(p_2 - p_3)(p_1 - p_3)}.$$

Setzt man p_1, p_2, p_3 als von vornherein gegeben voraus, so entspricht jedem Wert von σ und τ eine Richtung (α, β, γ) als die Richtung der Druckkraft, deren Normal- und Tangentialkomponente σ und τ sind. Betrachten wir nun σ und τ als rechtwinklige kartesische Koordinaten eines Punktes in einer Ebene und tragen auf der σ-Achse die Punkte auf, deren Abszissen p_1, p_2, p_3 sind, die wir für den Augenblick alle drei positiv annehmen wollen, dann entsprechen allen Geraden, die in der Ebene

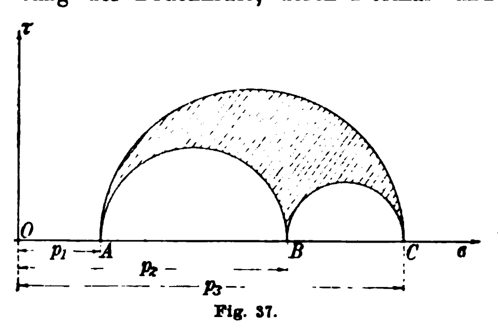


Fig. 37.

der Hauptspannungen p_1, p_2 liegen, für welche also $\gamma = 0$ wird, die Punkte der Bildebene (σ, τ), für welche

$$\sigma^2 + \tau^2 - (p_1 + p_2)\sigma + p_1p_2 = 0;$$

diese Punkte erfüllen einen Kreis, der über AB als Durchmesser beschrieben ist. Ebenso entsprechen den Geraden, für welche $\beta = 0$ ist, die Punkte des über AC beschriebenen Kreises, endlich den Geraden, für welche $\alpha = 0$ ist, die Punkte des Kreises über BC.

Jedem Punkte der dreispitzigen Fläche, die von den drei Halbkreisen in der Halbebene, für die $\sigma > 0$, begrenzt wird, entspricht eine Spannungsrichtung (α, β, γ), für die σ und τ die Spannungskomponenten werden. Umgekehrt entspricht jeder Richtung (α, β, γ) ein Punkt mit den Koordinaten σ, τ. Er ergibt sich als gemeinsamer Punkt der drei Kreise

$$\begin{aligned}
\sigma^2 + \tau^2 - (p_2 + p_3)\sigma + p_2 p_3 &= \alpha^2 (p_3 - p_1)(p_2 - p_1), \\
\sigma^2 + \tau^2 - (p_3 + p_1)\sigma + p_3 p_1 &= \beta^2 (p_1 - p_2)(p_3 - p_2), \\
\sigma^2 + \tau^2 - (p_1 + p_2)\sigma + p_1 p_2 &= \gamma^2 (p_2 - p_3)(p_1 - p_3),
\end{aligned}$$

die in der Tat einem Büschel angehören, weil durch Addition ihrer mit $p_2 - p_3$, $p_3 - p_1$, $p_1 - p_2$ multiplizierten Gleichungen entsteht:

$$\begin{aligned}
p_2 p_3 (p_2 - p_3) + p_3 p_1 (p_3 - p_1) + p_1 p_2 (p_1 - p_2) \\
= -(p_2 - p_3)(p_3 - p_1)(p_1 - p_2),
\end{aligned}$$

was eine Identität ist. Die drei Kreise sind konzentrisch mit den zuerst über BC, CA und AB konstruierten Kreisen.

Neuntes Kapitel.

Grundzüge der Hydrodynamik.

1. Die Bewegungsgleichungen einer Flüssigkeit. Die Anwendung des d'Alembertschen Prinzips gestattet mit Leichtigkeit von den Gleichungen für das Gleichgewicht eines deformierbaren Körpers zu den Bewegungsgleichungen für diesen Körper überzugehen. Wir wollen in diesem Kapitel aber die Betrachtung auf die reibungslosen Flüssigkeiten beschränken und auch für deren Bewegung nur einige allgemeine Sätze geben.

In der Hydrostatik haben wir die Gleichgewichtsbedingung einer Flüssigkeit in der Form gefunden

$$\mu F = \operatorname{grad} p,$$

indem hier μ die Dichtigkeit bezeichnet. Wollen wir zu der Bewegungsgleichung übergehen, so müssen wir die Bedingung dafür anschreiben, daß Gleichgewicht zwischen den äußeren Kräften und den im entgegengesetzten Sinne genommenen Trägheitskräften besteht. Ist P die von einem Flüssigkeitsteilchen zur Zeit t eingenommene Lage, also $\ddot{P}$ die Beschleunigung, so wird $\mu \ddot{P}$ die Trägheitskraft der Volumeneinheit; bezeichnen wir demnach mit p den im Punkte P zur Zeit t herrschenden Druck (der von dem im Falle des Gleichgewichts sich ergebenden im allgemeinen verschieden ist), so erhalten wir

$$\mu(F - \ddot{P}) = \operatorname{grad} p, \tag{1}$$

und dies ist die erste Bewegungsgleichung.

Ist die Flüssigkeit inkompressibel, so ist p unabhängig von der Dichtigkeit μ. Die Dichtigkeit ist ihrerseits entweder konstant (die Flüssigkeit also homogen) oder doch an jeder Stelle bekannt. Im allgemeinen besteht nun zwischen p und μ

eine bestimmte Beziehung, welche die charakteristische Gleichung der Flüssigkeit heißt (und in einem besonderen Falle durch das Mariottesche Gesetz gegeben wird). Wir müssen also ein Gleichung annehmen

$$p = f(\mu). \tag{2}$$

Aber die Gleichungen (1) und (2) genügen offenbar nicht, um, in Funktion der Zeit, die drei Unbekannten P, p, μ zu bestimmen. Es ist also noch eine dritte Gleichung erforderlich. Um diese zu gewinnen, drücken wir in einer Formel die Tatsache aus, daß die Bewegung kontinuierlich erfolgt; d. h. wenn wir in der Flüssigkeit uns eine willkürliche geschlossene Oberfläche denken, so müssen wir ausdrücken, daß die Änderung der in σ eingeschlossenen Flüssigkeitsmenge während einer bestimmten Zeit genau gleich ist der während derselben Zeit durch die Fläche hindurchgetretenen Flüssigkeitsmenge. Die so erhaltene Gleichung heißt die Kontinuitätsgleichung.

Es sei $d\tau$ ein bestimmtes Volumenelement innerhalb σ, seine Masse ist dann zur Zeit t gleich $\mu d\tau$ und wird zur Zeit $t + dt$ gleich $\left(\mu + \frac{\partial \mu}{\partial t} dt\right) d\tau$, demnach ist die Änderung der Masse innerhalb dieses Volumenelementes $d\tau$ während der sehr kurzen Zeit dt gleich $\frac{\partial \mu}{\partial t} dt\, d\tau$, und die Änderung der ganzen in σ enthaltenen Masse wird

$$dt \int \frac{\partial \mu}{\partial t} d\tau.$$

Wir nehmen jetzt ein Element $d\sigma$ in der Oberfläche σ an, es sei n ein zu ihm normaler und nach dem Innern von σ gerichteter Einheitsvektor; in der Zeit dt tritt durch $d\sigma$ eine Flüssigkeitsmenge, die gleich der Masse eines Zylinders mit der Basis $d\sigma$ und der Höhe $\dot{P} dt \times n$ ist, d. h. die Menge

$$\mu \dot{P} \times n\, dt\, d\sigma,$$

demnach ergibt sich für die ganze Oberfläche die Menge

$$dt \int \mu \dot{P} \times n\, d\sigma = -\, dt \int \operatorname{div} (\mu \dot{P})\, d\tau,$$

wenn wir das Divergenztheorem anwenden. Setzen wir die bei-

den gefundenen Ausdrücke einander gleich, so finden wir

$$\int\left(\frac{\partial\mu}{\partial t}+\operatorname{div}\mu\dot{P}\right)d\tau=0,$$

und da diese Gleichung für jedes Volumen τ gelten soll,

$$\frac{\partial\mu}{\partial t}+\operatorname{div}\mu\dot{P}=0;$$

dies ist eine erste Form der Kontinuitätsgleichung.

Wir können auf sie die Formel (28) des Kap. II von Band 1 anwenden und erhalten

$$\frac{\partial\mu}{\partial t}+\dot{P}\times\operatorname{grad}\mu+\mu\operatorname{div}\dot{P}=0.$$

Es liefert aber $\dot{P}\times\operatorname{grad}\mu=\frac{dP\times\operatorname{grad}\mu}{dt}$ die Änderung, die μ durch die Verschiebung des Punktes P in der Zeiteinheit erfährt, und mithin ist

$$\frac{\partial\mu}{\partial t}+\dot{P}\times\operatorname{grad}\mu$$

die totale Änderung von μ, auf die Zeiteinheit verrechnet, d. h. $\frac{d\mu}{dt}$, und wir erhalten

$$\frac{d\mu}{dt}+\mu\operatorname{div}\dot{P}=0 \tag{3}$$

als die definitive Form der Kontinuitätsgleichung.

Die grundlegenden Bewegungsgleichungen sind so gefunden. Wenn die Flüssigkeit inkompressibel ist, ist μ unabhängig von t, also $\frac{d\mu}{dt}=0$ und die Kontinuitätsgleichung reduziert sich einfach auf

$$\operatorname{div}\dot{P}=0. \tag{3a}$$

Ein besonders wichtiger Fall ist ferner der, wo die äußeren Kräfte ein Potential U besitzen. Dann wird

$$F=\operatorname{grad}U.$$

Wir wollen noch bemerken, daß sich immer eine Funktion Π finden läßt, derart daß

$$\frac{1}{\mu}\operatorname{grad}p=\operatorname{grad}\Pi \tag{4}$$

wird. In der Tat geht aus dieser Gleichung, wenn wir sie skalar mit dP multiplizieren, hervor

$$\frac{1}{\mu} dp = d\Pi,$$

mithin

$$\Pi = \int \frac{dp}{\mu} \tag{5}$$

und die Quadratur ist, da durch (2) p als Funktion von μ gegeben wird, prinzipiell immer ausführbar.

Wenn wir demnach setzen

$$\Phi = U - \Pi$$

so verwandelt sich die Gleichung (1) in die folgende

$$\ddot{P} = \text{grad}\, \Phi; \tag{6}$$

Φ heißt dabei das Beschleunigungspotential.

2. Die Eulerschen Gleichungen. Inbezug auf ein festes Achsenkreuz sollen u, v, w die Komponenten der Geschwindigkeit $\dot{P}$ des Punktes P zur Zeit t sein und diese Komponenten mögen als Funktionen der Lage von P und der Zeit betrachtet werden. Wir wollen dann für eine bestimmte Zeit t den Geschwindigkeitszustand der Flüssigkeit bestimmen, d. h. die Geschwindigkeiten, mit denen die Flüssigkeitsteilchen durch die als im Raume fest betrachteten Punkte hindurchgehen. Wir sehen also hier, entgegen dem in der Dynamik befolgten Verfahren, die Koordinaten des Punktes P als unabhängig von der Zeit, d. h. als selbständige Variable an, zu denen als vierte unabhängige Veränderliche die Zeit hinzutritt.

Die Komponenten von $\ddot{P}$ sind $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$, es wird aber

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \dot{P} \times \text{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \text{ usw.}$$

Mithin löst sich die Grundgleichung (1) in die folgenden drei Gleichungen auf

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}&=X-\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x},\\ \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}&=Y-\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y},\\ \frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}&=Z-\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z},\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

und die Kontinuitätsgleichung (3) wird

$$\frac{d\mu}{dt}+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0\tag{8}$$

oder, wenn wir beachten, daß

$$\frac{d\mu}{dt}=\frac{\partial\mu}{\partial t}+u\frac{\partial\mu}{\partial x}+v\frac{\partial\mu}{\partial y}+w\frac{\partial\mu}{\partial z}$$

wird,

$$\frac{\partial\mu}{\partial t}+\frac{\partial(\mu u)}{\partial x}+\frac{\partial(\mu v)}{\partial y}+\frac{\partial(\mu w)}{\partial z}=0.\tag{9}$$

Die partiellen Differentialgleichungen (7) und (9) bilden zusammen mit der Gleichung (2) die sogenannten Eulerschen Grundgleichungen der Hydrodynamik.[1]) Ist mit ihrer Hilfe die Bestimmung von u, v, w als Funktionen von x, y, z, t gelungen, so erfordert die Lösung des Problems noch die Integration der totalen Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dt}=u(x,y,z,t),\quad \frac{dy}{dt}=v(x,y,z,t),\quad \frac{dz}{dt}=w(x,y,z,t).\tag{10}$$

Da sich über die Integration dieser Gleichungssysteme allgemein nichts aussagen läßt, wollen wir suchen, durch die direkte Betrachtung der Grundgleichungen einige allgemeine Gesetze abzuleiten.

3. Das Zirkulationstheorem. Wir wollen von nun an voraussetzen, daß die äußeren Kräfte ein Potential U besitzen und daß mithin für jeden Punkt im Innern der Flüssigkeit die Gleichung (6) gilt, in der Φ ebenso wie U eine eindeutige, endliche, stetige Funktion des Ortes ist.

Wir wollen in der Flüssigkeit eine willkürliche geschlossene Kurve s annehmen und die Flüssigkeitsteilchen betrachten, die

1) Euler, *Principes généraux du mouvement des fluides*, Mém. de l'Acad. de Berlin 1755, p. 274 (s. insbesondere p. 284 u. 286).

sich zur Zeit t auf dieser Kurve befinden. Wir berechnen die Zirkulation des Geschwindigkeitsvektors $\dot{P}$ längs der Kurve s, d. h. (Bd. I, S. 42)

$$\mathfrak{C} = \int_s \dot{P} \times dP. \tag{11}$$

Betrachten wir die Kurve s immer als den Ort derselben Flüssigkeitsteilchen, so verändert sie sich mit der Zeit innerhalb der Flüssigkeit. Wir wollen untersuchen, wie sich hierbei die Zirkulation $\mathfrak{C}$ verändert. Zu dem Zweck nennen wir s_0 die Lage von s zur Zeit t_0, P_0 die zugehörige Anfangslage von P. P_0 ist Funktion eines einzigen Parameters (z. B. der Bogenlänge), der seine Lage auf s_0 festlegt; es sei λ dieser Parameter, wir können dann P auf s als Funktion von λ und t ansehen und demnach schreiben

$$\mathfrak{C} = \int_{s_0} \dot{P} \times \frac{dP}{d\lambda} d\lambda.$$

Differenzieren wir nach der Zeit, so finden wir

$$\frac{d\mathfrak{C}}{dt} = \int_{s_0} \ddot{P} \times \frac{dP}{d\lambda} d\lambda + \int_{s_0} \dot{P} \times \frac{d\dot{P}}{d\lambda} d\lambda,$$

da die Differentiationen nach λ und t umkehrbar sind. Es wird also nach (6)

$$\frac{d\mathfrak{C}}{dt} = \int_{s_0} \operatorname{grad} \Phi \times \frac{dP}{d\lambda} d\lambda + \frac{1}{2}\int_{s_0} \frac{d(\dot{P}^2)}{d\lambda} d\lambda$$

$$= \int_{s_0} \frac{d\Phi}{d\lambda} d\lambda + \frac{1}{2}\int_{s_0} \frac{d(\dot{P}^2)}{d\lambda} d\lambda.$$

Aber die beiden Integrale sind, da Φ und $\dot{P}^2$ eindeutige, endliche, stetige Funktionen sind, gleich Null, also wird

$$\frac{d\mathfrak{C}}{dt} = 0,$$

d. h. $\mathfrak{C}$ ist konstant. Wir finden also:

Die Zirkulation der Geschwindigkeitskurve ist für eine mit der Flüssigkeit bewegliche, willkürliche geschlossene Kurve unter den über die Kräfte ge-

machten Voraussetzungen konstant.[1]) Dies ist das Zirkulationstheorem.

Transformieren wir (11) durch den Stokesschen Satz, so folgt

$$\int_\sigma \operatorname{rot} \dot{P} \times n\, d\sigma = \mathfrak{C}, \tag{12}$$

d. h. der Fluß der Rotation des Geschwindigkeitsvektors durch eine von einer Kurve s begrenzte Fläche σ ist konstant für die ganze Dauer der Bewegung.

Wir können dieses Theorem benutzen zum Beweise eines berühmten Satzes von Lagrange. Dieser Satz lautet:

Wenn in einem bestimmten Augenblick für die ganze Flüssigkeit $\operatorname{rot} \dot{P} = 0$ ist, so ist immer $\operatorname{rot} \dot{P} = 0$.

Dann wird nämlich nach (12) $\mathfrak{C} = 0$ im Augenblicke t_0 und mithin immer $\mathfrak{C} = 0$, es wird also nach (11)

$$\int \dot{P} \times dP = 0$$

und mithin wird (nach Band I, S. 44) immer, wenn ψ eine skalare Funktion von P bezeichnet,

$$\dot{P} = \operatorname{grad} \psi,$$

folglich $\operatorname{rot} \dot{P} = 0$.

In diesem Falle heißt die Bewegung wirbelfrei und ψ das Geschwindigkeitspotential; dieses Potential kann auch mehrdeutig sein.

Man kann dem Lagrangeschen Satz noch eine andere Form geben. Aus $\operatorname{rot} \dot{P} = 0$ folgt, wie wir wissen, $\dot{P} = \operatorname{grad} \psi$ und mithin

$$d\psi = \dot{P} \times dP = u\,dx + v\,dy + w\,dz.$$

Wir können also sagen: Ist das Trinom $udx + vdy + wdz$ in einem bestimmten Augenblick das exakte Differential einer Funktion ψ, so ist es dies in jedem Augen-

1) W. Thomson (Lord Kelvin), *On vortex motion,* Trans. of the Roy. Society Edinburgh, vol. 25 p. 217 (1867).

blick.[1]) Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn die Flüssigkeit von dem Zustand der Ruhe ausgeht, also für $t = 0$ $u, v, w = 0$ wird.

4. Wirbelfreie Bewegung. Wenn ein Geschwindigkeitspotential ψ existiert, vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen in bemerkenswerter Weise. Wir betrachten einen Punkt P und seine Bewegungsrichtung zur Zeit t; in dieser Bewegungsrichtung nehmen wir von ihm aus einen zweiten unendlich benachbarten Punkt P_1, von diesem aus wieder in seiner Bewegungsrichtung einen dritten Punkt P_2 usw. Wir erhalten so eine von P ausgehende Stromlinie. Diese Stromlinien der Flüssigkeit für einen bestimmten Augenblick dürfen natürlich nicht mit den Bahnlinien der einzelnen Flüssigkeitsteilchen verwechselt werden.

Ist nun die Bewegung wirbelfrei, so ergibt sich sofort, daß die Stromlinien zu den Niveauflächen $\psi =$ konst. orthogonal sind, denn der Geschwindigkeitsvektor, dessen Richtung die Tangente der Stromlinie liefert, wird dann $\dot{P} = \operatorname{grad} \psi$, ist also senkrecht zu der durch P gehenden Potentialfläche.

Aus $\dot{P} = \operatorname{grad} \psi$ ergibt sich ferner

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

und weiter

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2\right]\right\} \text{ usw.;}$$

in vektorieller Form können wir schreiben

$$\ddot{P} = \operatorname{grad}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\dot{P}^2\right).$$

Mithin wird die Gleichung (6)

---

1) Lagrange, *Mémoire sur la théorie du mouvement des fluides*, Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin 1781, p. 151, Œuvres t. 4, p. 716. Das Beweisverfahren des Textes entstammt der oben zitierten Arbeit von Thomson.

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}+\tfrac{1}{2}\dot{P}^2+\Pi-U\right)=0$$

oder

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\tfrac{1}{2}\dot{P}^2+\Pi-U=f(t),$$

wenn f eine willkürliche Funktion der Zeit bezeichnet. Denken wir uns diese Funktion in die Funktion auf der linken Seite einbezogen, wodurch deren Gradient nicht geändert wird, so wird die vorige Gleichung

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\tfrac{1}{2}(\operatorname{grad}\psi)^2+\Pi-U=0. \tag{13}$$

Auf diese Weise erhalten wir eine Gleichung zwischen ψ und p.

Die Kontinuitätsgleichung (3) wird

$$\frac{d\mu}{dt}+\mu\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi=0$$

oder

$$\frac{d\mu}{dt}+\mu\Delta\psi=0 \tag{14}$$

und im Falle der inkompressibeln Flüssigkeiten

$$\Delta\psi=0.$$

5. Stationäre Bewegung. Wenn die Geschwindigkeit $\dot{P}$ der verschiedenen Punkte P einer Flüssigkeit sich mit der Zeit nicht ändert, heißt die Bewegung stationär. Dann fallen die Stromlinien mit den Bahnlinien der Flüssigkeitsteilchen zusammen.

Wir fassen eine bestimmte Stromlinie ins Auge, P sei ein Punkt auf ihr, ferner $t=\frac{dP}{ds}=\dot{P}:\frac{ds}{dt}$ ein zu der Tangente in P paralleler Einheitsvektor. Die Tangentialkomponente der Beschleunigung $\ddot{P}\times t$ hat den Wert

$$\dot{P}\times\frac{d\dot{P}}{dt}:\frac{ds}{dt}=\tfrac{1}{2}\frac{d\dot{P}^2}{dt}:\frac{ds}{dt}=\tfrac{1}{2}\frac{d\dot{P}^2}{ds}.$$

Multiplizieren wir demnach die Gleichung

$$\ddot{P}=\operatorname{grad}(U-\Pi)$$

skalar mit t, so erhalten wir

$$\tfrac{1}{2}\frac{d\dot{P}^2}{ds}=\frac{d(U-\Pi)}{ds}$$

und, wenn wir längs der Stromlinie integrieren,

$$\tfrac{1}{2}\dot{P}^2 + \Pi - U = \text{konst.} \tag{15}$$

Die Konstante bezieht sich dabei auf eine bestimmte Stromlinie und ändert sich von einer Linie zur anderen. Die Gleichung (15) drückt das Bernoullische Theorem aus, das für die Flüssigkeiten an die Stelle des Satzes von der Erhaltung der Energie für die Massensysteme tritt.[1])

Unter der weiteren Voraussetzung, daß die stationäre Bewegung auch wirbelfrei ist, können wir die Gleichung (13) anwenden, in denen nun aber, weil die Bewegung stationär ist, das Geschwindigkeitspotential ψ von der Zeit unabhängig, also $\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$. Es wird also, wenn wir wieder grad $\psi = \dot{P}$ schreiben,

$$\tfrac{1}{2}\dot{P} + \Pi - U = \text{konst.} \tag{16}$$

wo jetzt die Konstante nicht mehr von einer Stromlinie zur anderen wechselt, sondern für die ganze Flüssigkeit denselben Wert hat.

Wir wollen dies auf einen besonders wichtigen speziellen Fall anwenden. Wir betrachten eine homogene, schwere Flüssigkeit, die anfänglich in Ruhe und in einem am Boden durchbohrten Gefäß enthalten ist. Dann ist die eintretende Bewegung in der Tat stationär und wirbelfrei. Wählen wir die z-Achse vertikal nach aufwärts gerichtet, so wird

$$U = -gz, \quad \Pi = \frac{p}{\mu}$$

und mithin liefert (16)

$$\tfrac{1}{2}\dot{P}^2 + \frac{p}{\mu} + gz = \text{konst.}$$

An der freien Oberfläche der Flüssigkeit sei $z = z_0$, $p = p_0$, $\dot{P} = 0$, dann wird die Konstante in der vorstehenden Gleichung $= \frac{p_0}{\mu} + gz_0$, und wir finden für den Druck in einem beliebigen Punkte

$$p = p_0 + g\mu(z_0 - z) - \tfrac{1}{2}\mu\dot{P}^2.$$

1) Daniel Bernoulli, *Hydrodynamica*, Argentorati 1738, p. 19.

Im Zustand der Ruhe wird $\dot{P} = 0$ und somit ist der hydrostatische Druck

$$p' = p_0 + g\mu(z_0 - z) > p;$$

der hydrostatische Druck ist also immer größer wie der hydrodynamische Druck. Ist die Höhe h der ruhenden Flüssigkeit im Gefäß so gering, daß wir am Boden noch $p = p_0$ annehmen können, so ergibt sich für die Ausflußgeschwindigkeit V, indem wir $\dot{P}^2 = V^2$, $z_0 - z = h$ setzen, der Wert

$$V = \sqrt{2gh}.$$

Dies ist das berühmte Torricellische Theorem.[1])

6. Wirbelbewegung. In der Kinematik der deformierbaren Körper haben wir die Deformation der unendlich nahen Umgebung eines Punktes P untersucht und gezeigt, daß sie sich immer aus einer bloßen Verschiebung und einer reinen Deformation zusammensetzen läßt. Wenn man im Falle einer Flüssigkeit beachtet, daß die unendlich kleine Verrückung eines beliebigen Punktes P durch $\dot{P}dt$ gegeben wird, erkennt man aus den früher gewonnenen Resultaten sofort, daß die momentane Rotationsgeschwindigkeit der Umgebung von P durch den Vektor $\frac{1}{2}$ rot $\dot{P}$ gegeben wird. Wir setzen voraus, daß dieser Vektor für einen bestimmten Augenblick in einem bestimmten Teil der Flüssigkeit von Null verschieden ist, dann muß er nach dem Lagrangeschen Satz für die ganze Dauer der Bewegung von Null verschieden sein, und die Bewegung heißt dann eine Wirbelbewegung.

Wir betrachten in einem bestimmten Augenblick einen Punkt P der Flüssigkeit und legen durch ihn eine Achse parallel zu rot $\dot{P}$, auf dieser Achse nehmen wir einen zu P unendlich benachbarten Punkt P_1 an und legen durch ihn eine Achse parallel zu dem für dieselbe Zeit genommenen Vektor rot $\dot{P}_1$ usw. Auf diese Weise konstruieren wir eine durch P gehende und auf eine bestimmte Zeit t bezügliche Linie,

1) Torricelli, *Opera geometrica;* De motu, Lib. II, p. 191, Florentiae 1644.

deren Tangenten für diese Zeit die Stellung der Rotationsachse der in ihrem Berührungspunkte liegenden Flüssigkeitsteilchen angeben. Diese Linien ändern sich mit der Zeit und durch jeden Punkt der in der Wirbelbewegung begriffenen Flüssigkeit geht eine von ihnen. Sie heißen Wirbellinien.

Wenn wir von jedem Punkte einer Fläche eine Wirbellinie ausgehen lassen, so erfüllt die Gesamtheit dieser Wirbellinien ein Wirbelrohr. Ist die Fläche unendlich klein, so sprechen wir von einem Wirbelfaden. Das Zirkulationstheorem und der Stokessche Satz erlauben uns nun, einige wichtige Eigenschaften der Wirbelbewegungen zu beweisen.

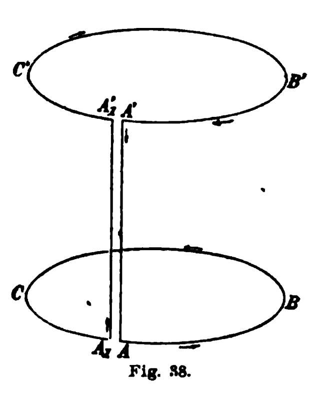


Fig. 88.

a) Wir ziehen auf irgend einem Wirbelrohr zwei das Rohr umschließende geschlossene Kurven ABC und $A'B'C'$. Wir denken uns A mit A' durch eine ebenfalls auf dem Rohr liegende Linie verbunden und bezeichnen mit A_1A_1' eine analoge, der Linie AA' unendlich benachbarte Linie. Es entsteht so auf dem Rohr eine geschlossene Linie $s = ABCA_1A_1'C'B'A'A$, die wir uns in dem Sinne der Pfeile durchlaufen denken. Durch diese Linie wird eine Fläche σ begrenzt, die das Mantelstück des Rohres zwischen den Kurven ABC und $A'B'C'$ darstellt. Nach dem Stokesschen Satz ist nun

$$\int_s \dot{P} \times dP = \int_\sigma \operatorname{rot} \dot{P} \times \boldsymbol{n}\, d\sigma.$$

Aber die Normale $\boldsymbol{n}$ ist auch normal zu rot $\dot{P}$, da dieser Vektor die Richtung der Tangente einer durch P auf σ gezogenen Kurve hat; mithin verschwindet das Integral auf der rechten Seite und wir finden

$$\int_s \dot{P} \times dP = 0.$$

Zerlegen wir den Ringweg s in die Teile ABC, A_1A_1', $A_1'C'B'$, $A'A$, so sehen wir sofort, daß die auf die Teile A_1A_1' und

$A'A$ bezüglichen Integrale entgegengesetzt gleich ausfallen und sich aufheben; denken wir uns also ABC und $A'B'C'$ in demselben Sinne durchlaufen, so finden wir

$$\int_{ABC} \dot{P} \times dP = \int_{A'B'C'} \dot{P} \times dP;$$

wir können also sagen: Die Zirkulation des Geschwindigkeitsvektors für eine das Wirbelrohr umschließende Kurve ist immer dieselbe, wie auch die Kurve angenommen sei.

b) Wir fassen den besonderen Fall ins Auge, wo das Wirbelrohr ein Wirbelfaden wird und betrachten einen senkrechten Querschnitt σ des Fadens mit der Begrenzung s. Die Zirkulation längs s wird nach dem Stokesschen Satz durch das über σ erstreckte Integral von rot $\dot{P} \times n$ gegeben, aber dieser Ausdruck ist, weil es sich um einen senkrechten Querschnitt handelt, gleich mod rot $\dot{P}$, und weil σ unendlich klein ist, wird das Integral $=$ mod rot $\dot{P} \cdot \sigma$. Dieses Produkt muß mithin nach dem vorstehenden Satze konstant sein; wenn wir also wie gewöhnlich mit ω die Rotationsgeschwindigkeit bezeichnen und demnach $\frac{1}{2}$ mod rot $\dot{P} = \omega$ setzen, so wird längs eines Wirbelfadens

$$\omega \cdot \sigma = \text{konst.},$$

d. h. es ist das Produkt aus der Rotationsgeschwindigkeit und dem Querschnitt des Wirbelfadens konstant. Dieses Produkt heißt die Stärke des Wirbelfadens.

c) Aus dem so bewiesenen Satze kann man folgern, daß so lange $\omega \neq 0$ ist, auch $\sigma \neq 0$ sein muß; die Wirbelfäden und damit die Wirbellinien können daher im Innern der in Wirbelbewegung befindlichen Flüssigkeitsmenge nicht aufhören, sie sind entweder geschlossen oder durchsetzen die ganze wirbelnde Flüssigkeitsmenge. Sie können auch auf der Oberfläche der Flüssigkeit endigen.

d) Wir nehmen eine einfach zusammenhängende Fläche σ an, die von Wirbellinien gebildet wird, und auf ihr eine geschlossene Kurve s, dann können wir nach dem oben befolgten

Verfahren zeigen, daß die Zirkulation längs s verschwindet. Denken wir uns σ und damit s zusammen mit den Flüssigkeitsteilchen, die es zu Anfang erfüllen, bewegt, so muß die Zirkulation längs s andauernd verschwinden, und dies gilt, wie auch die Kurve auf σ angenommen sei, σ muß also andauernd von Wirbellinien gebildet sein, und wenn wir zwei solche Flächen ins Auge fassen, so muß auch ihre Schnittkurve, die zu Anfang eine Wirbellinie ist, eine Wirbellinie bleiben, d. h. die Wirbelfäden bewegen sich mit der Flüssigkeit, die Teilchen, die sie einmal erfüllen, erfüllen sie dauernd (Satz von der Persistenz der Wirbelfäden).

e) Durch dasselbe Verfahren läßt sich zeigen, daß die Stärke eines Wirbelfadens sich mit der Zeit nicht ändert.

Die vorstehenden, von Helmholtz stammenden Sätze erfahren eine schöne Bestätigung durch den bekannten Versuch von Tait mit den Rauchringen.[1])

7. Die Lagrangeschen Gleichungen. Wir wollen nun die zweite klassische Form der Bewegungsgleichungen aufstellen.

Wir betrachten, anders wie vorhin, die Lage P eines Flüssigkeitsteilchens zur Zeit t als Funktion der Zeit und der Anfangslage P_0 des Teilchens. Analytisch ausgedrückt heißt das, wenn x, y, z die Koordinaten von P, a, b, c die Koordinaten von P_0 sind, daß x, y, z als Funktionen der vier unabhängigen Veränderlichen a, b, c, t angesehen werden sollen.

1) Helmholtz, *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen*, Journal für Math. Bd. 55, S. 25 (1858), Wissensch. Abhdlgn., Leipzig 1882, Bd. 1, S. 111. Diese Resultate wurden weiter ausgedehnt von Hankel, *Zur allgemeinen Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten*, Göttingen 1861. Die im Text gegebenen Beweise stammen von W. Thomson, *On vortex motion*, Trans. of the R. Soc. Edinburgh t. 25, p. 217, 1867. Über die Versuche mit den Rauchringen usw. s. Tait, *Conférences sur quelques-uns des progrès* etc., Paris 1887, p. 374; Brillouin, *Recherches récentes sur diverses questions d'Hydrodynamique, 1ère Partie: Tourbillons*, Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, t. 1, 1887; und Paris 1897.

Unter diesem neuen Gesichtspunkte müssen wir die Grundgleichungen (6) und (3) umformen. Wir können die hierzu notwendigen Rechnungen leichter ausführen und das Endresultat in einfacherer Gestalt darstellen, wenn wir in aller Kürze die linearen Vektortransformationen, die uns schon mehrfach begegnet sind, betrachten.[1])

Wir gehen aus von den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz,\\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz,\\ dw &= \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Diese stellen eine lineare Transformation dar, durch die der Vektor dP, dessen Komponenten dx, dy, dz sind, in den Vektor $d\dot{P}$ mit den Komponenten du, dv, dw übergeht. Symbolisch wollen wir diese Transformation bezeichnen durch

$$d\dot{P} = \alpha(dP). \tag{18}$$

Aus dieser Gleichung leiten wir unmittelbar die weitere symbolische Gleichung ab

$$\frac{d\dot{P}}{dP} = \alpha. \tag{19}$$

Der gewöhnlichen Ausdrucksweise folgend, können wir sagen, daß α die Derivierte von $\dot{P}$ nach P ist. Unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Koordinatensystems wird α durch die neun gewöhnlichen, partiellen Derivierten $\frac{\partial u}{\partial x}, \cdots$ als die Koeffizienten einer linearen Transformation festgelegt.

Die Determinante Δ der Gleichungen (17), die dritte Invariante $I_3\alpha$ der Transformation α, die wir von 0 verschieden voraussetzen, können wir in der bemerkenswerten Form schreiben

$$\Delta = \frac{\alpha u \wedge \alpha v \times \alpha w}{u \wedge v \times w}, \tag{20}$$

1) Vgl. Burali-Forti e Marcolongo, *Omografie vettoriali con applicazioni alle derivate rispetto ad un punto e alla Fisica-matematica.* Torino 1909.

wenn u, v, w irgend drei nicht komplanare Vektoren sind. Dies läßt sich bei Einführung kartesischer Koordinaten durch direkte Ausrechnung der in Zähler und Nenner des Bruches stehenden Determinanten unter Benutzung eines bekannten Determinantensatzes leicht beweisen.[1])

Ebenso kann man auch zeigen, daß

$$\frac{\alpha u \wedge v \times w + u \wedge \alpha v \times w + u \wedge v \times \alpha w}{u \wedge v \times w} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \dot{P} \qquad (21)$$

1) Es wird nämlich, wenn $\xi, \eta, \zeta; \xi', \eta', \zeta'; \xi'', \eta'', \zeta''$ die Komponenten der Vektoren u, v, w sind, der Ausdruck im Nenner

$$\begin{vmatrix} \xi & \xi' & \xi'' \\ \eta & \eta' & \eta'' \\ \zeta & \zeta' & \zeta'' \end{vmatrix},$$

der Ausdruck im Zähler

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta, & \frac{\partial u}{\partial x}\xi' + \frac{\partial u}{\partial y}\eta' + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta', & \frac{\partial u}{\partial x}\xi'' + \frac{\partial u}{\partial y}\eta'' + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta'' \\ \frac{\partial v}{\partial x}\xi + \frac{\partial v}{\partial y}\eta + \frac{\partial v}{\partial z}\zeta, & \frac{\partial v}{\partial x}\xi' + \frac{\partial v}{\partial y}\eta' + \frac{\partial v}{\partial z}\zeta', & \frac{\partial v}{\partial x}\xi'' + \frac{\partial v}{\partial y}\eta'' + \frac{\partial v}{\partial z}\zeta'' \\ \frac{\partial w}{\partial x}\xi + \frac{\partial w}{\partial y}\eta + \frac{\partial w}{\partial z}\zeta, & \frac{\partial w}{\partial x}\xi' + \frac{\partial w}{\partial y}\eta' + \frac{\partial w}{\partial z}\zeta', & \frac{\partial w}{\partial x}\xi'' + \frac{\partial w}{\partial y}\eta'' + \frac{\partial w}{\partial z}\zeta'' \end{vmatrix}$$

und diese Determinante wird nach der Multiplikationsregel der Determinanten

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi & \xi' & \xi'' \\ \eta & \eta' & \eta'' \\ \zeta & \zeta' & \zeta'' \end{vmatrix},$$

so daß in der Tat für den Wert des ganzen Bruches folgt:

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

wird.[1]) Es ist die erste Invariante $I_1 \alpha$ der Transformation α.

Wir wollen auch die Transformation

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial a} da + \frac{\partial x}{\partial b} db + \frac{\partial x}{\partial c} dc, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial a} da + \frac{\partial y}{\partial b} db + \frac{\partial y}{\partial c} dc, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial a} da + \frac{\partial z}{\partial b} db + \frac{\partial z}{\partial c} dc \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

betrachten, die wir symbolisch in der Form

$$dP = \beta(dP_0) \quad \text{oder} \quad \beta = \frac{dP}{dP_0} \tag{22}$$

schreiben und als die Derivierte von P nach P_0 bezeichnen. Hierzu nehmen wir noch diejenige Transformation β' hinzu, die sich von β nur dadurch unterscheidet, daß in dem Schema der Koeffizienten die Spalten und Reihen vertauscht sind. Diese Transformation β' heißt die zu β konjugierte. (Es ist wohl zu beachten, daß hier nicht wie im siebenten Kapitel β eine lineare Transformation mit symmetrischem Koeffizientenschema bedeutet.)

Man bestätigt leicht, daß für zwei beliebige Vektoren $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$

---

1) Der Zähler des Bruches wird bei Benutzung kartesischer Koordinaten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta, & \xi', & \xi'' \\ \frac{\partial v}{\partial x}\xi + \frac{\partial v}{\partial y}\eta + \frac{\partial v}{\partial z}\zeta, & \eta', & \eta'' \\ \frac{\partial w}{\partial x}\xi + \frac{\partial w}{\partial y}\eta + \frac{\partial w}{\partial z}\zeta, & \zeta', & \zeta'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi, & \frac{\partial u}{\partial x}\xi' + \cdots, & \xi'' \\ \eta, & \frac{\partial v}{\partial x}\xi' + \cdots, & \eta'' \\ \zeta, & \frac{\partial w}{\partial x}\xi' + \cdots, & \zeta'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi, & \xi', & \frac{\partial u}{\partial x}\xi'' + \cdots \\ \eta, & \eta', & \frac{\partial v}{\partial x}\xi'' + \cdots \\ \zeta, & \zeta', & \frac{\partial w}{\partial x}\xi'' + \cdots \end{vmatrix}$$

und bei der Ausrechnung dieser Determinanten zerstören sich alle Glieder, die nicht $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ oder $\frac{\partial w}{\partial z}$ als Faktor enthalten. Was übrig bleibt, ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \begin{vmatrix} \xi & \xi' & \xi'' \\ \eta & \eta' & \eta'' \\ \zeta & \zeta' & \zeta'' \end{vmatrix}.$$

die Gleichung besteht

$$u \times \beta v = v \times \beta' u.\text{[1]} \tag{23}$$

Wir wollen schließlich bemerken, daß diese Derivierten von Punkten viele Eigenschaften der gewöhnlichen Derivierten besitzen. So wird z. B.

$$\frac{d\dot{P}}{dP_0} = \frac{d\dot{P}}{dP}\frac{dP}{dP_0} = \alpha\beta. \tag{24}$$

Dies vorausgeschickt schreiben wir die Gleichung (6) in der Form

$$\ddot{P} = \operatorname{grad}_P \Phi,$$

indem wir dadurch andeuten, daß bei der Bildung des Gradienten nur der Punkt P als variabel angesehen wird, während jetzt Φ auch von der Lage des Punktes P_0 abhängt. Es wird demnach

$$d\Phi = \operatorname{grad}_P \Phi \times dP = \operatorname{grad}_{P_0} \Phi \times dP_0,$$

und nach (22) und (23) ist

$$\operatorname{grad}_P \Phi \times dP = \operatorname{grad}_P \Phi \times \beta(dP_0) = \beta'(\operatorname{grad}_P \Phi) \times dP_0;$$

da dP_0 willkürlich ist, folgt hieraus

$$\beta'(\operatorname{grad}_P \Phi) = \operatorname{grad}_{P_0} \Phi.$$

Wendet man demnach die Operation β' auf beide Seiten der Gleichung (6) an, so ergibt sich

$$\beta'(\ddot{P}) = \operatorname{grad}_{P_0} \Phi \tag{25}$$

und dies ist die gesuchte Umformung von (6). In kartesischen Koordinaten wird sie

---

1) Es lautet diese Gleichung nämlich in kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned}
&\xi\left(\frac{\partial x}{\partial a}\xi' + \frac{\partial x}{\partial b}\eta' + \frac{\partial x}{\partial c}\zeta'\right) + \eta\left(\frac{\partial y}{\partial a}\xi' + \frac{\partial y}{\partial b}\eta' + \frac{\partial y}{\partial c}\zeta'\right)\\
&\qquad + \zeta\left(\frac{\partial z}{\partial a}\xi' + \frac{\partial z}{\partial b}\eta' + \frac{\partial z}{\partial c}\zeta'\right)\\
&= \xi'\left(\frac{\partial x}{\partial a}\xi + \frac{\partial y}{\partial a}\eta + \frac{\partial z}{\partial a}\zeta\right) + \eta'\left(\frac{\partial x}{\partial b}\xi + \frac{\partial y}{\partial b}\eta + \frac{\partial z}{\partial b}\zeta\right)\\
&\qquad + \zeta'\left(\frac{\partial x}{\partial c}\xi + \frac{\partial y}{\partial c}\eta + \frac{\partial z}{\partial c}\zeta\right).
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial a}\ddot{x}+\frac{\partial y}{\partial a}\ddot{y}+\frac{\partial z}{\partial a}\ddot{z}-\frac{\partial \Phi}{\partial a}=0,\\ \frac{\partial x}{\partial b}\ddot{x}+\frac{\partial y}{\partial b}\ddot{y}+\frac{\partial z}{\partial b}\ddot{z}-\frac{\partial \Phi}{\partial b}=0,\\ \frac{\partial x}{\partial c}\ddot{x}+\frac{\partial y}{\partial c}\ddot{y}+\frac{\partial z}{\partial c}\ddot{z}-\frac{\partial \Phi}{\partial c}=0.\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

Wir transformieren nun auch die Gleichung (3). Zu dem Zweck führen wir die Determinante $D = I_3\beta$ der Gleichungen (a) ein. Diese wird nach (20), wenn e_1, e_2, e_3 in der gewohnten Weise drei orthogonale Einheitsvektoren bezeichnen, so daß $e_1 \wedge e_2 \times e_3 = 1$ ist,

$$D = \beta e_1 \wedge \beta e_2 \times \beta e_3.$$

Differenzieren wir nach der Zeit, so folgt

$$\frac{dD}{dt} = \frac{d\beta}{dt} e_1 \wedge \beta e_2 \times \beta e_3 + \beta e_1 \wedge \frac{d\beta}{dt} e_2 \times \beta e_3 + \beta e_1 \wedge \beta e_2 \times \frac{d\beta}{dt} e_3.$$

Es wird aber nach (24) $\frac{d\beta}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{dP}{dP_0} = \frac{d\dot{P}}{dP_0} = \alpha\beta$, mithin

$$\frac{dD}{dt} = \alpha\beta e_1 \wedge \beta e_2 \times \beta e_3 + \beta e_1 \wedge \alpha\beta e_2 \times \beta e_3 + \beta e_1 \wedge \beta e_2 \times \alpha\beta e_3.$$

Setzen wir nun in (21) $u = \beta e_1$, $v = \beta e_2$, $w = \beta e_3$, so geht der Zähler des Bruches auf der linken Seite in $\frac{dD}{dt}$, der Nenner in D über und es wird

$$\frac{1}{D}\frac{dD}{dt} = \operatorname{div} \dot{P},$$

so daß wir aus (6) erhalten

$$\frac{d\mu}{dt} + \frac{\mu}{D}\frac{dD}{dt} = \frac{1}{D}\frac{d(\mu D)}{dt} = 0$$

und durch Integration

$$\mu D = \text{konst.}$$

Um den Wert der Konstanten zu bestimmen, machen wir $t = 0$. Da dann P in P_0 übergeht, wird die Transformation die Identität und $D = 1$; ferner werde $\mu = \mu_0$, so folgt

$$\mu D = \mu_0. \tag{27}$$

Die Gleichungen (26) und (27) werden als die Lagrangeschen Grundgleichungen der Hydrodynamik bezeichnet.[1])

8. Die Cauchyschen Integrale der Bewegungsgleichungen. Wir gehen von der Gleichung (25) aus, die sich schreiben läßt

$$\beta'\left(\frac{d\dot{P}}{dt}\right) = \operatorname{grad}_{P_0}\Phi;$$

wir nehmen die Rotation der linken und rechten Seite nach P_0, rechts ergibt sich dann 0 und somit wird

$$\operatorname{rot}_{P_0}\beta'\left(\frac{d\dot{P}}{dt}\right) = 0. \tag{28}$$

Wir beachten nun, daß

$$\frac{d}{dt}\beta'(\dot{P}) = \frac{d\beta'}{dt}\dot{P} + \beta'\left(\frac{d\dot{P}}{dt}\right),$$

und da mit $\frac{d\beta'}{dt}$ diejenige Transformation bezeichnet ist, deren Koeffizienten die Derivierten der Koeffizienten von β' sind, sieht man sofort, daß $\frac{d\beta'}{dt}\dot{P}$ dasselbe ist wie $\frac{1}{2}\operatorname{grad}_{P_0}\dot{P}^2$, mithin wird

$$\frac{d}{dt}\beta'\dot{P} = \frac{1}{2}\operatorname{grad}_{P_0}\dot{P}^2 + \beta'\left(\frac{d\dot{P}}{dt}\right);$$

nehmen wir davon die Rotation nach P_0, so finden wir nach (28)

$$\operatorname{rot}_{P_0}\frac{d}{dt}\beta'(\dot{P}) = 0;$$

aber P_0 und t sind unabhängige Veränderliche, also folgt

$$\frac{d}{dt}\left\{\operatorname{rot}_{P_0}\beta'(\dot{P})\right\} = 0$$

und daraus

$$\operatorname{rot}_{P_0}\beta'(\dot{P}) = \text{konst.}$$

Die Konstante bestimmen wir wie gewöhnlich, indem wir $t = 0$ machen; dann wird $\dot{P} = \dot{P}_0$, β' zur Identität, und wir finden so

$$\operatorname{rot}_{P_0}(\beta'\dot{P}) = \operatorname{rot}_{P_0}\dot{P}_0. \tag{29}$$

1) Sie rühren indes nicht von Lagrange, sondern von Euler her: Novi Commentarii Acad. Petrop. t. 14, p. 376, 369 (1759). Sie heißen nach Lagrange, weil dieser sie in seiner *Mécanique analytique* benutzt hat (Œuvres compl. t. 11, p. 273, 287).

Wir beachten nun, daß nach (20)

$$\beta u \times \beta v \wedge \beta w = D \cdot u \times v \wedge w$$

wird und nach (23) die linke Seite in dieser Gleichung

$$= u \times \beta'(\beta v \wedge \beta w).$$

Es ergibt sich daraus, da u ein willkürlicher Vektor ist,

$$\beta'(\beta v \wedge \beta w) = D \cdot v \wedge w;$$

insbesondere wird, da $dP = \beta(dP_0)$, $\delta P = \beta(\delta P_0)$,

$$\beta'(dP \wedge \delta P) = D \cdot dP_0 \wedge \delta P_0. \qquad (\alpha)$$

Wir erinnern uns nun, daß nach der ursprünglichen Definition der Rotation

$$\text{rot}_P\, u \times dP \wedge \delta P = d(u \times \delta P) - \delta(u \times dP);$$

es wird aber, wieder nach (23),

$$u \times \delta P = u \times \beta(\delta P_0) = \beta' u \times \delta P_0, \quad u \times dP = \beta' u \times dP_0$$

und sonach

$$\text{rot}_P\, u \times dP \wedge \delta P = \text{rot}_{P_0}(\beta' u) \times dP_0 \wedge \delta P_0.$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit D, so können wir die rechte Seite nach (α) mit Rücksicht auf (23) schreiben

$$\text{rot}_{P_0}\, \beta' u \times \beta'(dP \wedge \delta P) = \beta(\text{rot}_{P_0}\, \beta' u) \times dP \wedge \delta P$$

und damit ergibt sich endlich, wenn wir $u = \dot{P}$ nehmen,

$$D \cdot \text{rot}_P\, \dot{P} = \beta(\text{rot}_{P_0}\, \beta' \dot{P}).$$

Wenden wir also auf beide Seiten der Gleichung (29) die Operation β an, so finden wir

$$D \cdot \text{rot}_P\, \dot{P} = \beta(\text{rot}_{P_0}\, \dot{P}_0). \qquad (30)$$

Dies ist das sogenannte Cauchysche Integral in vektorieller Form. Nennen wir für ein rechtwinkliges Koordinatensystem p, q, r die Komponenten von $\frac{1}{2}\text{rot}\, \dot{P}$, p_0, q_0, r_0 die Komponenten von $\frac{1}{2}\text{rot}\, \dot{P}_0$, so löst sich (30) in die folgenden drei Gleichungen auf

$$\left.\begin{aligned} Dp &= \frac{\partial x}{\partial a}p_0 + \frac{\partial x}{\partial b}q_0 + \frac{\partial x}{\partial c}r_0, \\ Dq &= \frac{\partial y}{\partial a}p_0 + \frac{\partial y}{\partial b}q_0 + \frac{\partial y}{\partial c}r_0, \\ Dr &= \frac{\partial z}{\partial a}p_0 + \frac{\partial z}{\partial b}q_0 + \frac{\partial z}{\partial c}r_0.^{1)} \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

Aus (30) folgt auch sofort, daß, wenn rot $\dot{P}_0 = 0$ ist, auch rot $\dot{P} = 0$ wird, wir erhalten also wieder den Lagrangeschen Satz.

Betrachten wir die Wirbellinie, die von P_0 ausgeht, so haben wir längs ihr

$$dP_0 = \varrho \cdot \mathrm{rot}_{P_0} \dot{P}_0$$

und wenn wir diese Gleichung skalar mit sich selbst multiplizieren, finden wir für $ds_0 = \mathrm{mod}\, dP_0$, $\omega = \frac{1}{2}\, \mathrm{mod}\, \mathrm{rot}_{P_0} P$

$$ds_0^2 = \varrho^2 (2\omega_0)^2, \quad \text{also} \quad \varrho = \pm \frac{ds_0}{2\omega_0}.$$

Verfolgen wir nun die Wirbellinie durch die Bewegung hindurch, wobei P_0 in P übergeht, so folgt aus (30)

$$D \cdot \mathrm{rot}_P \dot{P} = \frac{1}{\varrho}\beta(dP_0) = \frac{1}{\varrho}dP,$$

also

$$dP = \varrho D \cdot \mathrm{rot}_P \dot{P},$$

d. h. die von P_0 ausgehende Wirbellinie wird zu der von P ausgehenden Wirbellinie. Außerdem ergibt sich

$$\varrho D = \pm \frac{ds}{2\omega},$$

d. h., wenn wir vom Vorzeichen absehen,

$$\frac{ds}{\omega} = \frac{ds_0}{\omega_0} D.$$

Ist σ_0 der Querschnitt eines Wirbelfadens in P_0, so wird das Massenelement des Wirbelfadens bei P_0

$$\mu_0 \sigma_0 \, ds_0,$$

1) Cauchy, *Sur la théorie de la propagation des ondes*, (1815) Mémoires des savants étrangers, Œuvres compl. (1) t. 1, p. 38. Die nachstehend angegebene Begründung des Lagrangeschen Satzes stammt ebenfalls von Cauchy und war der erste strenge Beweis dieses Satzes.

und das zugehörige Massenelement des Wirbelfadens bei P wird analog $\mu \sigma ds$, mithin folgt

$$\mu \sigma ds = \mu_0 \sigma_0 ds_0,$$

und wenn wir diese Gleichung durch die oben gewonnenen dividieren und beachten, daß nach (27) $\mu = \frac{\mu_0}{D}$, finden wir

$$\sigma \omega = \sigma_0 \omega_0,$$

wie oben bereits durch synthetische Betrachtungen abgeleitet wurde.

Übungsbeispiele.

1. Aufgabe. *Eine unbegrenzt ausgedehnte inkompressible Flüssigkeit umgibt eine feste Kugel. Die Bewegung ist wirbelfrei und im Unendlichen hat die Geschwindigkeit einen bestimmten endlichen Wert. Das Geschwindigkeitspotential zu bestimmen.*

Auflösung. Das Potential ψ genügt außerhalb der Kugel (deren Radius a sei) der Differentialgleichung

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

und ist eindeutig. Wenn A die Grenze bezeichnet, der die Geschwindigkeit im Unendlichen zustrebt, und die z-Achse dieser Geschwindigkeit entgegengesetzt gerichtet angenommen wird, so haben wir im Unendlichen

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = -A.$$

Die Geschwindigkeit der Flüssigkeit an der Kugeloberfläche muß tangential gerichtet sein; bezeichnet daher allgemein ϱ die Entfernung eines Punktes vom Kugelmittelpunkt, so wird

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \varrho}\right)_{\varrho = a} = 0.$$

Diese Bedingungen legen zusammen das Potential fest. Setzen wir

$$\psi = \varphi - Az,$$

so wird auch $\Delta \varphi = 0$ und wir haben $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\right)_{\varrho = a} = A \frac{z}{a}$, während im Unendlichen alle Derivierten von φ Null sind.

Wir beachten nun, daß $\Delta \frac{1}{\varrho} = 0$ und ebenfalls $\Delta \left(\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial z} \right) = 0$ ist. Es wird aber $\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial z} = -\frac{z}{\varrho^3}$ und davon erhält die Derivierte nach ϱ, nämlich $\frac{2z}{\varrho^4}$, für $\varrho = a$ den Wert $\frac{2z}{a^4}$. Wir können also annehmen

$$\varphi = -\frac{A a^3}{2} \frac{z}{\varrho^3} = \frac{A a^3}{2} \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial z}$$

und somit

$$\psi = -A\left[z + \frac{a^3}{2} \frac{z}{\varrho^3}\right].$$

Dieses Potential hängt nur von z und ϱ oder von z und $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ab.

Betrachten wir die Bewegung in einer Meridianebene (die beliebig durch die z-Achse gelegt ist). Die zugehörigen Komponenten der Geschwindigkeit sind

$$\dot{z} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = A\left[\frac{a^3}{2}\left(\frac{3z^2}{\varrho^5} - \frac{1}{\varrho^3}\right) - 1\right],$$

$$\dot{r} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = A \frac{a^3}{2} \frac{3zr}{\varrho^5}.$$

Die Integration kann in zwei besonderen Fällen leicht ausgeführt werden. Für $r = 0$, $\varrho = z$ ist die zweite Gleichung erfüllt, die erste Gleichung liefert dann

$$\dot{z} = A\left(\frac{a^3}{z^3} - 1\right), \quad z > a,$$

woraus sich mit Hilfe einer Quadratur z durch t ausdrücken läßt.

Wenn wir weiter überlegen, daß

$$\varrho\dot{\varrho} = z\dot{z} + r\dot{r} = A\left(\frac{a^3}{\varrho^3} - 1\right)z,$$

so sehen wir, daß die obenstehenden Gleichungen für $\varrho = a$ erfüllt sind; die zugehörige Bahnlinie wird ein Meridiankreis der Kugel. Darauf folgt aus

$$\dot{z} = \tfrac{3}{2} A\left(\frac{z^2}{a^2} - 1\right)$$

die Gleichung

$$\frac{dz}{z^2 - a^2} = \tfrac{3}{2}\frac{A}{a^2}\, dt$$

und durch Integration

$$z = c + a \,\mathfrak{Tang}\left(\tfrac{3}{2}\frac{A}{a}t\right).$$

An den Polen der Kugel (für $x, y = 0$, $z = \pm a$) ist die Geschwindigkeit gleich Null, die Bewegung verlangsamt sich ins Unbegrenzte, wenn das Flüssigkeitsteilchen sich auf dem Meridian einem Pole nähert, derart, daß es den Pol nie erreicht.

2. Aufgabe. *Die vorige Aufgabe für den Fall eines unendlich langen Rotationszylinders.*

Auflösung. Wir betrachten die Bewegung in einer Ebene senkrecht zu den Erzeugenden des Zylinders, die wir zur xy-Ebene wählen. In unendlicher Entfernung von dem Zylinder setzen wir die Bewegung geradlinig und gleichförmig voraus, z. B. parallel der x-Achse und von der Geschwindigkeit A, so daß das Potential ψ den Gleichungen

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \text{für } x, y = \infty$$

genügt. Da außerdem an der Zylinderoberfläche die Geschwindigkeit tangential sein soll, wird

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)_{r=a} = 0,$$

wenn a den Zylinderradius bedeutet. In jedem Punkte der Flüssigkeit, der außerhalb des Zylinders liegt, wird

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Um die Funktion ψ zu bestimmen, setzen wir

$$\psi = \varphi + Ax, \tag{1}$$

dann muß φ der Gleichung genügen

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

und außerdem wird

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{für } x, y = \infty, \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r=a} = -A\frac{x}{a}. \tag{4}$$

Eine Lösung von (2) ist $\varphi = \log r$, wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, oder auch $\varphi = \frac{\partial \log r}{\partial x} = \frac{x}{r^2}$. Wir wollen, indem k eine passende Konstante

bezeichnet,

$$\varphi = k\frac{x}{r^2}$$

setzen. Die Gleichung (2) und die Bedingungen (3) sind dann identisch erfüllt. Für (4) finden wir

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=a} = -k\frac{x}{a^3} = -A\frac{x}{a}$$

und daraus

$$k = Aa^2.$$

So ist φ vollständig bestimmt und wir erhalten weiter

$$\psi = Ax\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right).$$

Wir wollen noch die Stromlinien bestimmen, die sich als die orthogonalen Trajektorien der Niveaulinien $\psi =$ konst. ergeben. Es genügt zu beachten, daß ψ der reelle Teil von

$$A\left[x + iy + \frac{a^2(x - iy)}{r^2}\right] = \psi + i\chi$$

ist. Setzen wir

$$x + iy = X, \quad \psi + i\chi = \Theta,$$

so wird

$$\Theta = A\left[X + \frac{a^2}{X}\right],$$

ist also eine Funktion der komplexen Variabeln X. Es folgt daraus sofort (vgl. die folgende Aufgabe), daß die Kurven $\chi =$ konst. die gesuchten Stromlinien sind. Dabei wird

$$\chi = Ay\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right).$$

Diese Linien sind Kurven dritter Ordnung, die zur y-Achse symmetrisch sind und sich von ihr aus nach beiden Seiten der x-Achse nähern, bis sie dieser in unendlicher Entfernung parallel werden. Als spezieller Fall ist unter ihnen der Querschnitt des Zylinders zusammen mit der x-Achse enthalten.

Was die Komponenten u, v der Geschwindigkeit $\dot{P}$ eines Punktes der Flüssigkeit betrifft, so wird

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial x} = A\left[1 + \frac{a^2(r^2 - 2x^2)}{r^4}\right],$$

$$v = \frac{\partial\psi}{\partial y} = -2Aa^2\frac{xy}{r^4}.$$

Für die Punkte des Zylinders auf der y-Achse wird

$$u = 2A, \quad v = 0,$$

für die Punkte auf der x-Achse $u = 0$, $v = 0$.

Zur Berechnung des Druckes dient die Formel

$$\tfrac{1}{2}\mu V^2 + p = \text{konst.},$$

da hier das Potential der äußeren Kräfte einfach eine Konstante ist; μ ist die Dichtigkeit. Für die vom Zylinder sehr weit entfernten Punkte wird $V = \text{konst.}$ und mithin auch $p = \text{konst.}$ In zwei Punkten des Zylinderquerschnitts, die einander diametral gegenüberliegen, haben u und v dieselben Werte und wird mithin auch der Druck p derselbe. Auf diese Weise halten die von der Bewegung der Flüssigkeit herrührenden Druckkräfte sich an dem Zylinder im Gleichgewicht: die Bewegung erfährt durch den Zylinder keinen Widerstand.

3. Aufgabe. ***Zu zeigen, wie die ebene, wirbelfreie Bewegung einer homogenen, inkompressibeln Flüssigkeit allgemein auf die Betrachtung einer Funktion mit komplexem Argument zurückgeführt werden kann.***

Auflösung. Unter einer Funktion des komplexen Arguments $x + iy$ versteht man einen Ausdruck

$$\Theta = \psi(x, y) + i\chi(x, y), \qquad \text{(a)}$$

der den Bedingungen genügt

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \chi}{\partial x}. \qquad \text{(b)}$$

Geometrisch ausgedrückt, bedeuten diese Bedingungen, daß die Kurven

$$\psi(x, y) = \text{konst.} \quad \text{und} \quad \chi(x, y) = \text{konst.},$$

wo sie sich begegnen, sich rechtwinklig schneiden. Es folgt nämlich aus (b)

$$i \operatorname{grad} \psi = \operatorname{grad} \chi.$$

Aus den Gleichungen (b) folgt aber auch durch nochmalige Differentiation

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0,$$

der reelle Teil der komplexen Funktion Θ genügt also der Differentialgleichung des Geschwindigkeitspotentials. Dasselbe gilt auch für den imaginären Teil, denn man findet auch

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = 0.$$

Man kann also entweder die Kurven $\psi(x, y) =$ konst. als die Niveaulinien und die Kurven $\chi(x, y) =$ konst. als die Stromlinien ansehen oder umgekehrt. Im ersteren Falle bestimmt sich der Druck p aus der Gleichung

$$p = C - \frac{1}{2}\mu\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2\right],$$

in der μ die Dichtigkeit und C eine Konstante bezeichnet.

Der Druck darf nicht unter einen gewissen negativen Wert $-c$ sinken, wenn kein Zerreißen der Flüssigkeit eintreten soll. Wir müssen also annehmen, daß die Geschwindigkeit einen bestimmten Wert $\sqrt{\frac{2(C+c)}{\mu}}$ nicht überschreitet, wenn nirgends eine Diskontinuität eintreten soll.

Vgl. Stokes, Cambridge Philos. Transactions vol. 71 (1842), Math. and Phys. Papers vol. 1, Cambridge 1880, p. 1; Kirchhoff, Journ. f. Math. Bd. 70 (1869), Ges. Abhdlgn. S. 416, Mechanik, 22. Vorlesung.

4. Aufgabe. *Nach der in der vorigen Aufgabe entwickelten Methode die Bewegung der Flüssigkeit innerhalb einer rotierenden Ellipse zu bestimmen.*

Auflösung. Wenn die feste Begrenzung der Flüssigkeit in gleichförmiger Rotation begriffen ist, so läßt sich die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens am Rande aus zwei Komponenten, der Rotationsgeschwindigkeit und einer Strömung längs dem als fest vorausgesetzten Rande, zusammensetzen. Man findet also für die Geschwindigkeit eines Punktes am Rande

$$u = -\omega y - \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \quad v = \omega x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x},$$

wenn ω die Rotationsgeschwindigkeit und $f(x, y) = 0$ die Gleichung der Randkurve ist. Nun war aber

$$u = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \chi}{\partial x},$$

also muß am Rande, wo $f(x, y) = 0$ ist,

$$\chi = -\frac{1}{2}\omega(x^2 + y^2) + \text{konst.}$$

werden.

Ist der Rand eine Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so genügt es,

$$\chi = -\tfrac{1}{2}\omega\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}(x^2-y^2)$$

anzunehmen, denn addiert man hierzu den am Rande verschwindenden Wert

$$-\omega\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)+\omega\frac{a^2b^2}{a^2+b^2},$$

so findet man am Rande

$$\chi = -\tfrac{1}{2}\omega(x^2+y^2)+\omega\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

Man bestätigt auch leicht, daß

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}=0.$$

Der angesetzte Wert von χ ist aber der imaginäre Teil der komplexen Funktion

$$\Theta = \psi + i\chi = -\tfrac{1}{2}i\omega\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}(x+iy)^2,$$

und diese Funktion löst sonach das Problem.

5. Aufgabe. *Die Wirbelbewegung zu untersuchen, bei der die Gleichungen gelten*

$$p = k\frac{\partial\frac{1}{\varrho}}{\partial y},\quad q = -k\frac{\partial\frac{1}{\varrho}}{\partial x},\quad r = 0,$$

wobei $\varrho^2 = x^2+y^2+z^2$ *und* k *konstant ist.*

Auflösung. Da $p = -\frac{ky}{\varrho^3}$, $q = \frac{kx}{\varrho^3}$, $r = 0$ ist, folgt

$$x\,dx + y\,dy = 0,$$

die Wirbellinien sind Kreise, die der xy-Ebene parallel sind und deren Mittelpunkte auf der z-Achse liegen. Außerdem wird

$$\omega^2 = \frac{k^2(x^2+y^2)}{\varrho^6}$$

unendlich im Koordinatenursprung, dieser Punkt muß also außerhalb der Flüssigkeit liegen.

Man setze

$$u = \frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z},\quad v = \frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x},\quad w = \frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y},$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}=0,$$

so wird

$$2p = -\Delta U, \quad 2q = -\Delta V, \quad 2r = -\Delta W,$$

mithin

$$\Delta U = -2k\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial y}, \quad \Delta V = 2k\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x}, \quad \Delta W = 0.$$

Es ist aber

$$\Delta \frac{y}{\varrho} = 2\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial y}, \quad \Delta \frac{z}{\varrho} = 2\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial z},$$

wir können also annehmen

$$U = -k\frac{y}{\varrho}, \quad V = k\frac{x}{\varrho}, \quad W = 0$$

und folglich

$$u = k\frac{xz}{\varrho^3}, \quad v = k\frac{yz}{\varrho^3}, \quad w = k\left(\frac{z^2}{\varrho^3} + \frac{1}{\varrho}\right).$$

Die Flüssigkeit ruht im Unendlichen ($u, v, w = 0$). Die Stromlinien, für die

$$u : v : w = dx : dy : dz$$

wird, sind in Ebenen durch die z-Achse enthalten; ihre Ermittelung hängt von Quadraturen ab. Die Geschwindigkeit längs dem Radiusvektor ϱ ist

$$\frac{ux + vy + wz}{\varrho} = \frac{2kz}{\varrho}.$$

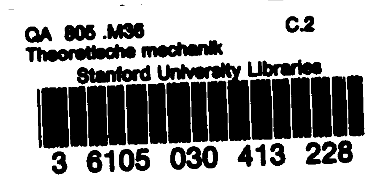
Dieses Resultat kann man so erklären: wenn eine Kugel vom Radius ϱ sich längs der z-Achse mit der Geschwindigkeit $2k$ bewegt, erlangen ihre Punkte in der Richtung der Radien die hier angegebene Geschwindigkeit.

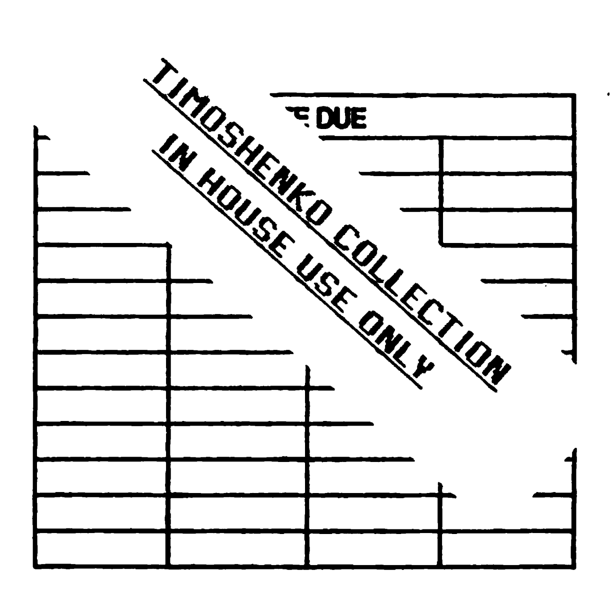
Alphabetisches Register.

Die Zahlen bedeuten die Seiten.

$a + bi$ [illegible] $=$

$= aa_1 + $ [illegible] $i + ba_1 i + bb_1 i^2$




DUE
TIMOSHENKO COLLECTION
IN HOUSE USE ONLY

